Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas

Aproximación Hermite-Padé y aplicaciones

Autor: Ulises Fidalgo Prieto.
Tutor: Guillermo López Lagomasino.

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

APROXIMACIÓN HERMITE-PADÉ Y APLICACIONES

Autor: **Ulises Fidalgo Prieto**
Licenciado en Física

Memoria presentada para optar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas.
Realizada bajo la dirección de **Dr. Guillermo López Lagomasino.**
Mayo, 2004.

A mi abuela.

Agradecimientos

Antes que a nadie debo agradecer a mi tutor Guillermo López Lagomasino por su paciente y acertada orientación (creo que el sustantivo orientación se queda escaso), además de su afecto y el de su familia. También agradezco al Departamento de Matemáticas de la Universiadad Carlos III de Madrid, por haberme aceptado en el programa de doctorado de Ingeniería Matemática. Me gustaría mencionar en especial el inestimable apoyo que me brindaron los profesores que integran el área de investigación de análisis aplicado. Es justo recordar también la ayuda de mis compañeros del doctorado, con los cuales además he pasado muchos momentos agradables. No voy a dejar fuera de esta lista tan genérica a mis amigos más íntimos. No exagero si digo que sin ellos tal vez no hubiera concluido la tesis y en algunos casos, ni siquiera habría comenzado. En este momento recuerdo lo necesario que me ha sido el cariño geográficamente distante, aunque largo, de mis tres hermanos y de J. A. Rodríguez, el padre de mi hermana. Tal vez en compensación a la lejanía, la escurridiza justicia poética me ha compensado con una nueva familia. Agradezco a mi familia política todo el amor con el que me han acogido. Al decir de Borges, la verja de vuestro jardín se me ha abierto con la docilidad de una página. Por último, he reservado el agradecimiento del final a Inés (no creo necesario esgrimir argumentos aquí).

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Importancia del tema

La Teoría Constructiva de Funciones constituye una de las fuentes más apreciadas en las aplicaciones de las matemáticas. Brinda el sostén teórico para la aproximación de funciones y propone métodos de cálculo numérico. De particular importancia resulta la rama dedicada a la Aproximación Racional de Funciones Análiticas y temas afines, como son la Teoría de Polinomios Ortogonales y Métodos de Cuadratura Interpolatoria. Areas de aplicación directa son: la Teoría de Números, el Análisis Numérico, la Teoría de Sistemas, la Mecánica y la Teoría de Operadores.

Veamos un problema de carácter aplicado íntimamente vinculado con las aplicaciones que se proponen en el último capítulo de la tesis. Se trata de la construcción de métodos de cuadratura simultánea. Supongamos que tenemos un haz constante de una luz policrómatica de espectro continuo. Para facilitar el estudio hacemos una partición adecuada del espectro en $m \in \mathbb{N}$ intervalos. Queremos calcular la intesidad de la luz p_i, $i = 1, \ldots, m$, correspondiente a cada uno de los intervalos de esta partición. Según [6], necesitamos calcular las integrales $\int f d\mu_i$, donde f es una función que representa la intensidad de la luz relativa a cada frecuencia y μ_i la distribución de la intensidad de luz en el intervalo i-ésimo. Carlos F. Borges implementó en [6] un método de cálculo con m fórmulas de cuadraturas que aproximan m integrales simultáneamente. La ventaja de la aproximación simulánea radica en que el número de evaluaciones que hay que hacer de la función f para un orden determinado de exactitud (en el espacio de los polinomios) es mucho menor que si se utilizan otros métodos tradicionales como, por ejemplo, la cuadratura de Gauss-Jacobi en cada intervalo. De este modo se disminuye el error de redondeo.

La tesis se enmarca en la teoría general de Aproximación Racional de Funciones Analíticas; mas precisamente, en la aproximación simultánea de vectores de funciones analíticas mediante vectores de fracciones racionales, que se contruyen a partir de criterios de interpolación a lo largo de una tabla prefijada de puntos. Los vectores de funciones que se aproximan están formados por sistemas de Markov; esto es, transformadas de Cauchy de medidas de Borel soportadas en el eje real. Como veremos en la próxima sección este tipo de funciones incluye una amplia gama de funciones elementales y constituyen la resolvente de los operadores autoconjugados. Por otra parte, es bien conocido que la aproximación racional simultánea de funciones tiene una amplia aplicación en la Teoría de números. Sistemas de funciones de este tipo y la propia construcción de estos aproximantes fueron empleados por Charles Hermite [32] en su clásica demostración de la trascendencia del número e. Otras aplicaciones en este contexto pueden encontrarse en [42] y [47].

Luego, los sistemas de Markov de funciones constituyen una clase amplia de vectores de funciones analíticas cuyo estudio resulta de interés teórico y práctico. En la tesis damos condiciones suficientes de convergencia para la aproximación racional simultanea de cierto tipo de sistemas de Markov (llamados sistemas de Nikishin) y de procesos de cuadraturas simultáneas asociados. También se dan estimados del orden de convergencia y bajo hipótesis adicionales sobre las medidas se demuestra que el orden de convergencia dado es exacto. En las demostraciónes se emplean técnicas de la teoría general de funciones de variable compleja, la teoría de la medida y la teoría del potencial logarítmico.

1.2. Antecedentes.

Como precedente de los aproximantes de Hermite-Padé estudiados en esta memoria tenemos los aproximantes diagonales de Padé. Desde el siglo XIX son conocidos algunos resultados generales relativos a la convergencia de los aproximantes diagonales de Padé a funciones de Markov o Stieltjes (véanse los Teoremas 1.1 y 1.2 que aparecen en esta sección) y aplicaciones de estos a fórmulas de cuadratura de tipo Gauss-Jacobi. En nuestra tesis obtenemos resultados análogos para los aproximantes Hermite-Padé y de tipo Hermite-Padé los cuales definiremos más adelante. Comenzamos con un breve bosquejo sobre la aproximación diagonal de Padé, su definición y los resultados más relevantes a los efectos de esta memoria.

Sea g una serie formal de potencias

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}} \tag{1.1}$$

en el infinito y n un número natural. Existen polinomios Q_n, P_n que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} &i) \quad \deg Q_n \leq n, \quad \deg P_n \leq n-1, \quad Q_n \not\equiv 0, \\ &ii) \quad (Q_n g - P_n)(z) = \tfrac{A_n}{z^{n+1}} + \tfrac{A_{n+1}}{z^{n+2}} + \cdots . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Encontrar a Q_n y P_n se reduce a resolver un sistema de $2n$ ecuaciones lineales y homogéneas con $2n+1$ incognitas, que son los coeficientes de Q_n y P_n. Es fácil ver que este problema tiene solución no trivial con $Q_n \not\equiv 0$. La fracción racional $R_n = P_n/Q_n$ recibe el nombre de n-ésimo aproximante diagonal de Padé de g.

De (1.2) tenemos que P_n es la parte polinómica del desarrollo en serie de Laurent en el infinito del producto $Q_n g$. Por lo tanto, R_n está unívocamente determinado por el polinomio Q_n. Supongamos que los pares (Q, P) y $(\widetilde{Q}, \widetilde{P})$ son soluciones del problema (1.2) para g y el índice n. Escribimos $ii)$ para ambos pares y tenemos que

$$(Qg - P)(z) = \frac{A_n}{z^{n+1}} + \cdots , \tag{1.3}$$

y

$$(\widetilde{Q}g - \widetilde{P})(z) = \frac{\widetilde{A}_n}{z^{n+1}} + \cdots . \tag{1.4}$$

Multiplicamos (1.3) y (1.4) por $\widetilde{Q}$ y Q, respectivamente; luego restamos ambas igualdades y obtenemos entonces que

$$\widetilde{Q}P - Q\widetilde{P} = \frac{\overline{A}_1}{z} + \frac{\overline{A}_2}{z^2} + \cdots .$$

Del lado izquierdo tenemos un polinomio; por lo tanto, el desarrollo en potencias de z que tenemos del lado derecho tiene que ser idénticamente nulo. Luego, podemos asegurar que

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{\widetilde{P}}{\widetilde{Q}} .$$

De donde concluimos que el n-ésimo aproximante diagonal de Padé R_n de una serie g es único. El primer problema que nos vamos a encontrar en la extensión de este concepto al caso de la aproximación simultanea es que en general los aproximantes simultaneos Hermite-Padé no estan unívocamente determinados.

Los primeros estudios sobre la aproximación diagonal de Padé, se llevaron a cabo a finales del siglo XIX por los matemáticos P. L. Tchebycheff (véase por ejemplo [52], [53], [54]), A. A. Markov [40] y T. J. Stieltjes [48]. Ellos encontraron una conexión de estos aproximantes con la teoría de los polinomios ortogonales. En particular T. J. Stieltjes en [49] introdujo el concepto de ortogonalidad con respecto a una medida general.

En toda esta memoria entendemos por medida a una medida finita de Borel de signo constante soportada en un subconjunto infinito de puntos contenido en el eje real. Recordamos que el soporte de una medida μ, que denotaremos por $\mathrm{sop}(\mu)$, es el menor conjunto cerrado cuyo complemento tiene medida cero. Por signo constante queremos decir que la medida de todo conjunto de Borel contenido en el soporte tiene el mismo signo (siempre positivo o siempre negativo). Si el soporte de la medida μ es un conjunto no acotado supondremos adicionalmente que

$$|\int x^{\nu} d\mu(x)| < \infty\,, \qquad \nu \in \mathbb{Z}_+ = 0, 1, 2, \dots\,.$$

En lo esencial nos limitaremos a medidas soportadas en subconjuntos compactos del eje real. El caso de medidas soportadas en un número finito de puntos (llamadas medidas atómicas) no es de nuestro interés. Desde el punto de vista de la aproximación, las funciones de Markov que ellas definen son fracciones racionales y los problemas de aproximación en este caso se resuelven de manera trivial. Sin embargo, las emplearemos en el Capítulo 5 para expresar polinomios mediante el potencial logarítmico de la llamada medida contadora asociada al polinomio.

Definición 1.2.1 Sea μ una medida y n un número natural. Decimos que Q_n es el n-ésimo polinomio ortogonal correspondiente a la medida μ si $\deg Q_n \leq n, Q_n \not\equiv 0$, y

$$\int x^{\nu} Q_n(x) d\mu(x) = 0\,, \qquad \nu = 0, \dots, n-1. \tag{1.5}$$

De la definición se deduce fácilmente que Q_n tiene exactamente n ceros simples en el interior del menor intervalo $I = \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\mu))$ que contiene el soporte de la medida. Por interior de un intervalo del eje real entendemos el interior con la topología euclídea de $\mathbb{R}$. Salvo que se especifique de otro modo al hablar de polinomio ortogonal tomaremos el mónico; o sea, aquel cuyo coeficiente conductor es igual a 1.

Para un polinomio h arbitrario de grado $\leq n$, de (1.5) obtenemos la siguiente igualdad

$$\int \frac{Q_n(x)}{z-x} d\mu(x) = \frac{1}{Q_n(z)} \int \frac{Q_n(x)}{z-x} d\mu(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^{n+1}}) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus I). \tag{1.6}$$

Consideremos el polinomio

$$P_n(z) = \int_I \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z-x} d\mu(x).$$

Usando (1.6) tenemos que

$$\left(Q_n\widehat{\mu} - P_n\right)(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^{n+1}}) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus I), \tag{1.7}$$

donde

$$\widehat{\mu}(z) = \int_I \frac{d\mu(x)}{z-x}. \tag{1.8}$$

Comparando (1.7) y la condición ii) de (1.2) tenemos que la fracción racional P_n/Q_n es el n-ésimo aproximante diagonal de Padé de la función $\widehat{\mu}$.

La función $\widehat{\mu}$ es conocida como la transformada de Cauchy de la medida μ. Si $\text{sop}(\mu)$ está acotado entonces a $\widehat{\mu}$ se le llama función de Markov asociada a la medida μ; si no está acotado el soporte, dicha función se conoce por función de Stieltjes. Veamos algunos ejemplos de tales funciones.

1. Si el soporte de μ contiene solamente un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k$, con pesos $y_1, y_2, \ldots, y_k$ respectivamente, entonces $\widehat{\mu}$ es la fracción racional
$$\widehat{\mu}(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{y_k}{z-x_j}, \quad y_j > 0, \quad \widehat{\mu}(z) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}).$$

2. Sea $d\mu(x) = dx$ con soporte en $[-1,1]$, entonces
$$\widehat{\mu}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{z-x} = \log\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]),$$
tomando $\log 1 = 0$.

3. Sea $d\mu(x) = dx/\pi\sqrt{1-x^2}$ con soporte en $[-1,1]$, entonces
$$\widehat{\mu}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]),$$
donde $\sqrt{z^2-1} > 0$ para $z > 1$.

4. Sea $d\mu(x) = \text{sen}(\pi\alpha)[(1+x)/(1-x)]^\alpha dx$, $\alpha \in (-1,1)$, con soporte en $[-1,1]$, entonces
$$\widehat{\mu}(z) = \text{sen}(\pi\alpha)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha \frac{dx}{z-x} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^\alpha - 1,$$
donde $[(z+1)/(z-1)]^\alpha > 0$ para $z > 1$. Observemos que $\widehat{\mu}(z) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1])$.

Otras muchas funciones elementales se pueden expresar mediante transformadas de Cauchy de medidas de Borel. Como dijimos anteriormente, la función resolvente de todo operador autoconjugado es la transformada de Cauchy de la medida espectral asociada al operador. Estos ejemplos muestran la utilidad del estudio de las funciones de Markov y Stieltjes, y de sus aproximaciones. El siguiente Teorema debido a A. A. Markov apunta en esta dirección. Una prueba del mismo puede encontrarse en el Teorema 3.5.4 de [50].

Teorema 1.1 (Teorema de Markov) *Sea $\{P_n/Q_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$,la sucesión de los aproximantes diagonales de Padé de la función de Markov $\widehat{\mu}$. Entonces*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \widehat{\mu}(z),$$
uniformemente en cada subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(\text{sop}(\mu))$.

Stieltjes extendió este resultado a una clase de transformadas de Cauchy cuyas medidas no necesariamente tienen soporte acotado. Para ello utilizó el concepto de problema de momentos. Este concepto fue introducido precisamente por Stieltjes en su clásica publicación [48].

Dada una medida positiva μ soportada en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ (no necesariamente acotado) se llama momento k-ésimo de μ al valor
$$c_k = \int_I x^k d\mu(x), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{1.9}$$
Como dijimos anteriormente supondremos que estas integrales son convergentes.

Dada una sucesión infinita de números reales $\{c_k\}_{k=0}^\infty$, se llama problema de momentos en un intervalo I al estudio de la existencia y unicidad de una medida soportada en I de modo que momentos coincidan con los números dados en la sucesión. Si existe solución se dice que el problema de momentos está definido; si existe y además la solución es única se dice que el problema de momentos está determinado. Una vez introducidos estos conceptos, ya podemos enunciar el Teorema de Stieltjes.

Teorema 1.2 (Teorema de Stieltjes) *Sea μ una medida finita positiva y de Borel tal que $\operatorname{sop}\mu \subset I = \mathbb{R}_+$ y $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de sus momentos. Si el problema de momentos para $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ está determinado en $\mathbb{R}_+$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \widehat{\mu}(z)\,,$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus Co(\operatorname{sop}(\mu))$.

Este resultado invita a encontrar condiciones suficientes para que el problema de momentos relacionado con una medida μ esté determinado. En [16] T. Carleman probó que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c_k}\right)^{1/2k} = \infty\,, \tag{1.10}$$

donde los c_k son los momentos asociados a la medida μ, se puede asegurar entonces que el problema de momentos para la sucesión $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ está determinado en $\mathbb{R}_+$. Con ello quedan satisfechas las hipótesis del Teorema 1.2. Es fácil comprobar que si $\operatorname{sop}(\mu)$ está acotado se tiene (1.10); luego, el Teorema de Stieltjes generaliza el Teorema de Markov.

Relativamente reciente se han obtenido resultados similares para los llamados aproximantes multipuntuales Padé y tipo Padé. Introduzcamos ahora estos conceptos.

Sea $\widehat{\mu}$ la función de Markov correspondiente a una medida μ finita positiva y de Borel cuyo soporte contenido en un intervalo I el eje real contiene un número infinito de puntos. Tomemos una sucesión de polinomios mónicos $\{\beta_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ de signo constante en I cuyos ceros se encuentran en dicho intervalo. Supongamos que $\deg \beta_n = \tau(n) \leq n$. Luego,

$$\beta_n(z) = \prod_{k=1}^{\tau(n)} (z - \beta_{n,k}), \quad \beta_{n,k} \in I\,,$$

y los ceros en el interior de I tienen multiplicidad par. Fijemos un compacto $F \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus I$, simétrico con respecto al eje real y una tabla de puntos

$$\{\alpha_{n,i}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n - \tau(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

contenida en F que es también simétrica con respecto al eje real (contando multiplicidades). Denotemos

$$\alpha_n(z) = \prod_{i=1}^{2n-\tau(n)} (z - \alpha_{n,i}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Algunos de los puntos $\alpha_{n,i}$ podemos considerarlos iguales a ∞. En este caso omitimos los factores correspondientes en (1.11). Por simetría, los coeficientes de α_n son reales y como $I \cap \Delta = \emptyset$, α_n no se anula en I.

De manera análoga a como se hizo para los aproximantes diagonales de Padé, se puede verificar fácilmente que existe una única fracción racional de la forma $R_n = P_n/\beta_n Q_n$, donde P_n y Q_n son polinomios que satisfacen

$$\begin{aligned} &i) \quad \deg P_n \leq n-1\,, \quad \deg Q_n \leq n-\tau(n)\,, \quad Q_n \not\equiv 0\,, \\ &ii) \quad \left(\tfrac{Q_n\beta_n\widehat{\mu}-P_n}{\alpha_n}\right)(z) = \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{z^{n-\tau(n)+1}}\right) \in H(\overline{\mathbb{C}}\setminus I), \quad \text{como } z\to\infty. \end{aligned} \tag{1.12}$$

En este caso para determinar P_n y Q_n se debe resolver un sistema lineal y homogéneo de $2n-\tau(n)$ ecuaciones en $2n-\tau(n)+1$ incognitas. Estos aproximantes se les llama de tipo Padé puesto que los polos se prefijan parcialmente, aunque preferimos denominarlos aproximantes generalizados de Padé.

Cuando $\tau(n) = 0$ (todos los polos de R_n son libres) esta construcción recibe el nombre de aproximante multipuntual diagonal de Padé de $\widehat{\mu}$, relativo al par (n, α_n). Para este caso, el primer estudio sobre la convergencia de la sucesión correspondiente de fracciones racionales $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ aparece en [25], donde también se hace un análisis sobre la velocidad de convergencia. Un estudio minucioso sobre la convergencia de tales sucesiones puede encontrarse en la monografía [51], donde también se hallan citas a varios trabajos más recientes en esta dirección. En los últimos 20 años se han publicado diversos resultados sobre condiciones suficientes para la convergencia y comportamiento asintótico de la aproximación multipuntual, tanto para medidas de soporte acotado como no acotado. Por ejemplo, en [36] G. López Lagomasino demostró que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{|\alpha_{n,k}|}} = \infty. \tag{1.13}$$

es una condición suficiente para la convergencia de la sucesión de aproximantes multipuntuales diagonales de Padé $\{R_n\}$ a su correspondiente función de Stieljtes $\widehat{\mu}$, siempre y cuando existan los momentos de la medida μ. En ese artículo también se dan condiciones suficientes de convergencia en términos de momentos generalizados que extienden el resultado conjunto Stieltjes-Carleman. Precedente de [36] para el caso de funciones de Markov es [25].

Con relación a los aproximantes multipuntuales tipo Padé nos referiremos a algunos resultados. En [10] se da una expresión de la velocidad exacta de convergencia; para la demostración los autores hacen uso de técnicas de la teoría del potencial. En el mismo trabajo se ofrece una aplicación de los resultados a la obtención de fórmulas de cuadraturas convergentes que son exactas en espacios de fracciones racionales con polos prefijados. Otros trabajos en esta dirección son [11], [15], [30], [31], [4] y [5]. En [30] y [31] se dan aplicaciones a la convergencia de fórmulas de cuadratura racionales con pesos complejos. En los trabajos más recientes [4] y [5] se encuentran aplicaciones a la estimación del orden de convergencia de fórmulas de cuadraturas de Gauss-Kronrod y Gauss-Kronrod racionales para integrandos analíticos.

Los aproximantes racionales que hemos expuesto hasta aquí aproximan a una sola serie de potencia g, como la dada en (1.1). El objeto de estudio de nuestra tesis es cierto tipo de fracciones racionales vectoriales que interpolan simultáneamente a un número finito de series de potencias $g_1, \ldots, g_m$,

$$g_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{j,k}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.14}$$

Tales vectores de fracciones racionales son conocidos como aproximantes Hermite-Padé (AHP), multipuntuales Hermite-Padé (AMHP) y generalizados Hermite-Padé (AGHP) en dependencia del grado de generalidad con que se definen. Como se verá a lo largo de la exposición, los aproximantes Hermite-Padé pueden entenderse como casos particulares de los multipuntuales y estos a su vez de los generalizados. Por otra parte, la aproximación diagonal de Padé coincide con la Hermite-Padé cuando $m = 1$.

Sea $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$, un sistema de m funciones de Markov, donde las medidas s_j, $j = 1, \ldots, m$, correspondientes están soportadas en intervalos $I_j, j = 1, \ldots, m$, del eje real. Fijemos un multi-índice

$$n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$$

donde $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Denotemos $|n| = n_1 + \cdots + n_m$. Tomemos un entero positivo κ_n y dos polinomios mónicos con coeficientes reales α_n y β_n, tales que $\deg \beta_n = \kappa_n$ y $\deg \alpha_n \leq |n| + \kappa_n + \min n_j$. Los ceros de α_n están en un compacto $F \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \cup_{i=1}^m I_i$ simétrico con respecto al eje real y los de β_n se encuentran en $\cup_{i=1}^m I_i$; además, el polinomio β_n no cambia de signo en este conjunto. Entonces existen polinomios Q_n, $P_{n,j}$, $j = 1, \ldots, m$, que satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} &i) \quad \deg Q_n \leq |n|, \quad Q_n(z) \not\equiv 0, \quad \deg P_{n,i} \leq |n| + \kappa_n - 1; \\ &ii) \quad \frac{(\beta_n Q_n \widehat{s}_j - P_{n,j})(z)}{\alpha_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \cup_{i=1}^m I_i), \quad j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Encontrar a $Q_n, P_{n,j}$, $j = 1, \ldots, m$, se reduce a resolver un sistema de $(m+1)|n| + m\kappa_n$ ecuaciones lineales y homogéneas con $(m+1)|n| + m\kappa_n + 1$

incognitas, que son los coeficientes de los polinomios. Este problema tiene solución no trivial con $Q_n \not\equiv 0$. Para cada solución de (1.15), llamamos aproximante generalizado Hermite-Padé (AGHP) de $\widehat{S}$ correspondiente a (n, α_n, β_n), al vector $R_n = (R_{n,1}, \ldots, R_{n,m})$ cuyas componentes son las fracciones racionales

$$R_{n,j} = \frac{P_{n,j}}{Q_n}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Cuando $\beta_n = 1$, R_n se denomina aproximante multipuntual Hermite-Padé. Si además $\alpha_n = 1$, entonces el vector R_n se conoce por aproximante Hermite-Padé.

A diferencia de los aproximantes diagonales de Padé, R_n puede no estar unívocamente determinado. Esto es fácil de ver considerando un sistema de funciones de Markov linealmente dependientes entre si; en particular, el sistema de funciones de Markov $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$, donde se tiene que $\widehat{s}_1 = \widehat{s}_2 = \ldots = \widehat{s}_m$, es un ejemplo de sistema en el cual no hay unicidad para R_n. Sin embargo, tienen en común con la aproximación diagonal de Padé que el polinomio Q_n satisface condiciones de ortogonalidad en este caso compartidas entre las distintas medidas. Por ello, se dice que Q_n es un polinomio multi-ortogonal. Estas relaciones de ortogonalidad son:

$$0 = \int x^{\nu} Q_n(x) d\widetilde{s}_j, \quad \nu = 0, \ldots, n_j - 1, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.16}$$

donde

$$d\widetilde{s}_j = \frac{\beta_n}{\alpha_n} ds_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Contrario al caso $m = 1$, las igualdades (1.16) no aseguran que Q_n sea único salvo un factor constante. Tenemos entonces la siguiente definición.

Definición 1.2.2 Sean $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$ un vector de funciones de Markov y $n = (n_1, \ldots, n_m)$ un multi-índice. Decimos que n es **débilmente normal** con respecto a $\widehat{S}$ si el polinomio Q_n está determinado en forma única salvo un factor constante, le llamamos **normal** si toda solución Q_n de (1.16) es tal que $\deg Q_n = |n|$, y es **fuertemente normal** si el polinomio Q_n tiene $|n|$ ceros simples en el interior de $\mathrm{Co}(\cup_{i=1}^{m} I_i)$. Si todo n es débilmente normal, normal o fuertemente normal, decimos que el sistema $\widehat{S}$ es **débilmente perfecto, perfecto o fuertemente perfecto**, respectivamente.

Obviamente, si un multi-índice n es fuertemente normal también será normal. A su vez, si es normal entonces es debilmente normal. Esto se debe a que si tenemos dos polinomios Q_n y $\widetilde{Q}_n$ que no sean múltiplos uno de otro y que satisfagan (1.16) siempre podemos construir un tercero, no identicamente nulo, que satisface (1.16) y es de grado $< |n|$. Luego, el multi-índice n no sería normal. Es fácil comprobar, y lo veremos en el texto, que la unicidad de Q_n salvo factores constantes es equivalente a la unicidad de R_n.

Un sistema de Markov $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$ se dice de Angelesco si para todo $i \neq j, \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_i)) \cap \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_j)) = \emptyset$. Esta clase de sistemas fue introducida por M. A. Angelesco en [1].

Veamos que un sistema de Angelesco $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$ es fuertemente perfecto. En efecto de las relaciones de ortogonalidad (1.16) es fácil deducir que Q_n tiene que tener en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_j))$ al menos n_j cambios de signo. Luego, tiene al menos n_j ceros distintos de multiplicidad impar en dicho intervalo. Como $\deg Q_n \leq |n|$ y los intervalos $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_j))$ son disjuntos los ceros deben ser simples y en cantidad $|n|$.

Existe una amplia bibliografía sobre convergencia y propiedades asintóticas de los aproximantes Hermite-Padé correspondientes a sistemas de Angelesco y sus denominadores comunes. Como ejemplo, podemos citar a [26] [28], [29], [41] y [44]. En [28] se obtiene la asintótica de los denominadores Q_n y con ello los subconjuntos de $\mathbb{C}$ donde hay convergencia y divergencia de los aproximantes Hermite-Padé correspondientes. En dependencia de la distancia relativa entre los soportes de las distintas medidas, pueden haber regiones de divergencia en un entorno de los soportes, si estos se encuentran demasiado cercanos unos de otros. En [29] se generaliza este resultado para una clase de sistemas de Markov que contiene a los sistema de Angelesco y son llamados sistemas mixtos. Se les llama mixtos porque también incluyen como casos particulares a los sistemas de Nikishin. En ambos trabajos hay un uso interesante de la teoría del potencial logarítmico.

Los sistemas de Nikishin fueron introducidos por E. M. Nikishin en [43] y es la base de trabajo de esta tesis. Para definirlos adoptaremos la notación usada en [29], que es muy sencilla de entender.

Sean σ_1 y σ_2 dos medidas finitas de signo constante y soporte compacto contenidos en $\mathbb{R}$. Para cada $i = 1, 2$, denotamos $\Delta_i = \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_i))$. Supongamos que $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. Definimos el producto de estas dos medidas mediante

$$d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) = \int \frac{d\sigma_2(t)}{x - t} d\sigma_1(x) = \widehat{\sigma}_2(x) d\sigma_1(x) \,. \tag{1.17}$$

Cuando resulte más cómodo usaremos la notación diferencial para denotar una medida. Se ve que $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ es una medida de signo constante, cuyo soporte es igual al de σ_1.

Sea $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ un sistema de intervalos cerrados tal que $\Delta_{j-1} \cap \Delta_j = \emptyset, j = 2, \ldots, m$. Sean ahora $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ medidas finitas de Borel cada una de signo constante, tal que $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_j)) = \Delta_j$. Para cada $i = 1, \ldots, m$, definimos inductivamente las medidas

$$s_j(x) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_j \rangle(x) = \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \ldots, \sigma_j \rangle\rangle(x)\,.$$

Definición 1.2.3 Decimos que $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \quad \sigma_m)$, donde

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \ldots, \quad s_m = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_m \rangle\,,$$

es el **sistema de Nikishin de medidas** asociado al sistema $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

La pregunta de si los sistemas de Nikishin son fuertemente perfectos es aún un problema abierto. Sin embargo, existe una amplia clase de multi-índices fuertemente normales. En [43] Nikishin demostró que los multi-índices $n = (n_1, \ldots, n_m)$, tales que sus componentes satisfacen

$$n_1 + 1 = n_2 + 1 = \cdots = n_k + 1 = n_{k+1} = \cdots = n_m, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{1.18}$$

son fuertemente normales. Posteriormente en [19] se probó normalidad fuerte para los multi-índices tales que $1 \leq i < j \leq m$ implica $n_j \leq n_i + 1$ (ver también [20]). Otra prueba de este resultado que incluye los llamados sistemas mixtos se puede encontrar en [29]. Obviamente la segunda clase de índices contiene a la primera. De los resultados de [9] se puede deducir que los sistemas de Nikishin de dos funciones son perfectos. En [8] los autores defininieron una clase de multi-índices, que denotaron mediante $\mathbb{Z}_+^m(*)$, formada por todos los multi-índices $n = (n_1, \ldots n_m)$ para los cuales no puede encontrarse $1 \leq i < j < k \leq m$ tales que $n_i < n_j < n_k$ y probaron que esta clase está formada por multi-índices fuertemente normales.

Relativo a la convergencia de aproximantes Hermite-Padé para sistemas de Nikishin no hay muchos resultados disponibles y se refieren solamente al caso Hermite-Padé puro; o sea, cuando todos los polos se dejan libres ($\beta_n \equiv 1$) y toda la interpolación se realiza en el infinito ($\alpha_n \equiv 1$). Reseñamos los más importantes. El siguiente teorema es del propio Nikishin y aparece como Teorema 4 en [43].

Teorema 1.3 *Sea $S = (s_1, s_2) = \mathcal{N}(\sigma_1, \sigma_2)$ un sistema de Nikishin de dos elementos cuyas medidas tienen soporte compacto. Entonces, la sucesión de aproximantes Hermite-Padé $\{R_{n(k)} = (P_{n(k),1}/Q_{n(k)}, P_{n(k),2}/Q_{n(k)})\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, de $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \widehat{s}_2)$ correspondiente a la sucesión de multi-índices $\{n(k) = (k,k)\}, k \in \mathbb{Z}_+$, satisface*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_{n(k),i}}{Q_{n(k)}} = \widehat{s}_i\,, \qquad i = 1, 2,$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$.

En la demostración de este Teorema se hace uso de un sistemas de cuadraturas simultáneas que se introduce en la sección 4 del mismo artículo [43].

En [9] se obtuvo convergencia de los aproximantes de Hermite-Padé de sistemas de Nikishin con m elementos en un sentido más débil que la uniforme. Se consideran sucesiones de multi–índices cuyas componentes cumplen

$$n_i \geq \frac{|n|}{m} - c\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,, \tag{1.19}$$

donde c es una constante positiva que no depende de n. Como corolario del resultado principal los autores deducen

Teorema 1.4 *Sea $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de Nikishin de m elementos cuyas medidas tienen soporte compacto. Sea $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ una sucesión de multi-índices fuertemente normales que cumple (1.19) para todo $n \in \Lambda$. Entonces, la sucesión de aproximantes Hermite-Padé $\{R_n = (P_{n,1}/Q_{n(k)}, \ldots, P_{n,m}/Q_n)\}$, $n \in \Lambda$, de $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_{n,i}}{Q_n} = \widehat{s}_i\,, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$.

En el momento en que se publicó [9] los únicos índices que se sabía que eran fuertemente normales eran los de la forma indicada en (1.18). Los resultados de este trabajo contemplan el caso de sistemas de Nikishin cuyas medidas tienen soporte no acotado. Las demostraciones se basan en el uso de técnicas de la teoría de la medida y del análisis complejo.

En [29], A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov y V. N. Sorokin, además de ampliar la clase de multi-índices fuertemente normales dan el orden exacto de convergencia de los aproximantes Hermíte-Padé y la asintótica logarítmica de la sucesión de los denominadores comunes Q_n para sistemas de Markov mixtos (Angelesco-Nikishin). Reduciremos el enunciado correspondiente al caso de un sistema de Nikishin.

Teorema 1.5 *Sea $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de Nikishin de m elementos tal que $\sigma'(x) > 0$, casi donde quiera para $x \in \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_i)), i = 1, \ldots, m$ y los soportes son conjuntos compactos. Sea $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ una sucesión de multi-índices tal que $j < k$ implica que $n_k \leq n_j + 1$, para todo $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \Lambda$ y*

$$\lim_{n\in\Lambda} \frac{n_i}{|n|} = \theta_i\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,.$$

Entonces, existe una medida de probabilidad $\overline{\mu}, \mathrm{sop}(\overline{\mu}) = \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$, *tal que*

$$\lim_{n\in\Lambda} |Q_n(z)|^{1/|n|} = e^{-V^{\overline{\mu}}(z)}$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sop}(\overline{\mu})$, *donde*

$$V^{\overline{\mu}}(z) = \int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\overline{\mu}(x).$$

Además, existen funciones $\xi_i, i = 1, \ldots, m$, *definidas y negativas en* $\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathrm{sop}(\overline{\mu})$ *tales que*

$$\lim_{n\in\Lambda} \left\| \widehat{s}_i - \frac{P_{n,i}}{Q_n} \right\|_K^{1/|n|} = e^{\xi_i(z)} < 1\,,$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{sop}(\overline{\mu})$.

Tanto la medida de probabilidad $\overline{\mu}$ como las funciones $\xi_i, i = 1, \ldots, m$, se describen en términos de la solución de un problema extremal vectorial de teoría de potencial logarítmico.

Relativo a las cuadraturas simultáneas, el único trabajo del cual tenemos conocimiento es el artículo [6] de C. F. Borges. En ese artículo se describe un esquema aproximativo de cálculo de m integrales con integrando común mediante m fórmulas de cuadraturas cuyos nodos son comunes a todas ellas. El esquema esta basado en la selección de nodos de modo tal que se maximice el orden de exactitud de las cuadraturas en el espacio de los polinomios, dado una cantidad prefijada de nodos que se quieren seleccionar. Ese procedimiento esta íntimamente vinculado con la interpolación simultánea de funciones de Markov. Sin embargo, el autor parece desconocer la relación del método que propone con la aproximación Hermite-Padé ya que no cita ningún trabajo relacionado con este tema. Los razonamientos empleados tienen carácter empírico, pues no ofrece ningún resultado sobre la convergencia del método, y ni siquiera discute la cuestión básica de si los posibles nodos son simples ó múltiples, y si el problema que plantea tiene solución (cuestiones relacionadas con la normalidad fuerte de multi-índices).

1.3. Resultados principales

Uno de los problemas fundamentales en el estudio de la aproximación simultánea es la unicidad de los aproximantes; o sea, la normalidad débil de los multi-índices. Para la demostración de la normalidad fuerte de multi-índices un concepto que ha resultado muy útil es el de AT sistema introducido por E. M. Nikishin en [43]. El objetivo central del **Capítulo 2** es incrementar la clase de multi-índices para los cuales se tiene que los sistemas de Nikishin forman un AT sistema y con ello ampliar la clase de multi-índices conocidos para los cuales se tiene normalidad fuerte.

Definición 1.3.1 Se dice que $(w_1, \ldots, w_m)$ es un **AT sistema** para el multi-índice $n = (n_1, \ldots, n_m)$ en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ si cualquiera sea la colección de polinomios $P_1, \ldots, P_m$ que se escoja con $\deg P_j \leq n_j - 1$, no todos nulos, la función

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(P_1, \ldots, P_m; x) = P_1(x)w_1(x) + \cdots + P_m(x)w_m(x)\,.$$

tiene a lo más $|n| - 1$ ceros en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$. El sistema $(w_1, \ldots, w_m)$ es un AT sistema en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ si es un AT sistema en dicho intervalo para todo $n \in \mathbb{Z}_+^m$.

En las Secciones 2.2 y 2.3 se demuestran los siguientes Teoremas. Denotamos

$$\mathbb{Z}_+^m(*) = \{n \in \mathbb{Z}_+^m : \nexists\, 1 \leq i < j < k \leq m \;\; \text{tales que} \;\; n_i < n_j < n_k\}.$$

Teorema 1.6 *Sea $S_2 = (s_{2,2}, \ldots, s_{2,m}) = \mathcal{N}(\sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de Nikishin arbitrario de $m-1$ medidas y sea $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m(*)$. Entonces, el sistema de funciones $(1, \widehat{s}_{2,2}, \ldots, \widehat{s}_{2,m})$ es un AT sistema para el índice n en cualquier intervalo Δ_1 disjunto con $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_2))$.*

También se tiene:

Teorema 1.7 *Sean σ_2, σ_3 dos medidas en $\mathbb{R}$ tales que $\Delta_2 \cap \Delta_3 = \emptyset$. El sistema $(1, \widehat{s}_2, \widehat{s}_3)$, donde $(s_2, s_3) = \mathcal{N}(\sigma_2, \sigma_3)$, es un AT sistema en cualquier intervalo Δ_1 disjunto con Δ_2.*

A partir de los Teoremas 1.6 se prueba fácilmente lo siguiente.

Teorema 1.8 *Los multi-índices $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$ son fuertemente normales con respecto a cualquier sistema de Nikishin de m medidas.*

Este Teorema 1.8 ya había sido probado en [8], usando el concepto de sistemas equivalentes sin el uso de la propiedad de AT sistema. Sin embargo, la propiedad de AT sistema resultaba imprescindible para el logro de otros objetivos que nos habíamos trazado. Estos resultados fueron publicados en [22]. Del Teorema 1.7 se deduce lo que sigue.

Teorema 1.9 *Los sistemas de Nikishin de tres funciones son fuertemente perfectos.*

El Teorema 1.9 aparece enunciado y demostrado en [21]. El segundo capítulo termina con una sección dedicada a la demostración del entrelazamiento de ceros de los polinomios multi-ortogonales asociados a sistemas de Nikishin.

Sea φ_t la función que representa conformemente $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ en el disco unidad tal que $\varphi_t(t) = 0$ y $\varphi_t'(t) > 0$, donde $t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$. El resultado principal del **Capítulo 3**, que se demuestra en la Sección 3.3, dice:

Teorema 1.10 *Sean $S = (s_1, \ldots, s_m)$ un sistema de Nikishin y Λ una sucesión de multi-índice distintos dos a dos, tales que $m \leq 3$ ó $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$. Supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que para todo $n \in \Lambda$ e $i = 1, \ldots, m$, se tiene que*

$$n_i \geq \frac{|n|}{m} - c|n|^{\kappa}, \quad \kappa < 1. \tag{1.20}$$

Entonces, para cada compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_1$ los AMHP cumplen

$$\limsup_{n \in \Lambda} \|\widehat{s}_i - R_{n,i}\|_K^{1/2|n|} \leq \delta_K < 1, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

donde

$$\delta_K = \sup\{|\varphi_t(z)| : t \in F \cup Co(\mathrm{sop}(\sigma_2)) \cup \{\infty\}\}.$$

Restringido al caso de aproximantes Hermite-Padé y $m \leq 3$ este resultado aparece en [21]. De este teorema se tiene que para sucesiones de multi-índices de una clase muy amplia hay convergencia en todas las componentes de los aproximantes multipuntuales Hermite-Padé con velocidad geométrica. Con él se extiende el Teorema 1.4 de [9] (compárese (1.19) con (1.20)). La demostración del Teorema 1.10 se basa en un resultado de la Sección 3.2 donde se prueba convergencia en un sentido más débil que el de la convergencia uniforme para sucesiones generales de multi-índices en $\mathbb{Z}_+^m$ que cumplan (1.20).

En el **Capítulo 4** nos dedicamos a buscar expresiones exactas de la velocidad de convergencia. Los resultados fueron obtenidos para sucesiones de AGHP. Su demostración requirió del uso de técnicas de la Teoría del Potencial logarítmico. Para ser más preciso, de la solución del problema vectorial de equilibrio en presencia de un campo externo. Este problema fue estudiado anteriormente en el caso escalar por varios autores y en el caso vectorial sin campo externo en [26] y [44]. Bajo ciertas condiciones suficientes, en la Sección 4.3 se prueba que el problema vectorial de equilibrio potencial en presencia de un campo externo siempre tiene solución única y la denotamos $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_m)$. En lo sucesivo, dado una medida μ denotamos por

$$V^{\mu}(z) = \int \log \frac{1}{|z - x|} d\mu(x)$$

a su potencial logarítmico.

Sea $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$ un sistema de funciones de Nikishin. Tomemos una sucesión de multi-índices $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$, tal que

$$\lim_{n\in\Lambda} \frac{n_k}{|n|} = p_k > 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Denotemos por $\{R_n\}, n \in \Lambda$, a la sucesión de AGHP de $\widehat{S}$ relativa Λ y a dos sucesiones de polinomios $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}, n \in \Lambda$, como los indicados en la sección anterior tales que

$$* \lim_{n\in\Lambda} \frac{1}{|n|}\chi(\alpha_n) = \alpha, \quad * \lim_{n\in\Lambda} \frac{1}{|n|}\chi(\beta_n) = \beta,$$

donde $\chi(p)$ denota la medida contadora asociada a un polinomio p, y el límite es en la topología débil estrella. El soporte de la medida α se encuentra dentro de un intervalo F disjunto con Δ_1 y el de β se encuentra en Δ_1. Estamos preparados para enunciar el teorema principal del Capítulo 4.

Teorema 1.11 *Supongamos que $\sigma_j' > 0, j = 1, \ldots, m$, para casi todo punto de Δ_1. Entonces, para cada $j = 1, \ldots, m$, tenemos*

$$\lim_{n\in\Lambda} |(\widehat{s}_j - R_{n,j})(z)|^{1/|n|} = \exp(V^{\overline{\mu}_1} + V^\beta - V^\alpha + \xi_j)(z), \quad z \in \cup_{k=1}^j D_k^j \setminus F,$$

salvo a lo sumo en un conjunto discreto de puntos, y

$$\lim_{n\in\Lambda} |(\widehat{s}_j - R_{n,j})(z)|^{1/|n|} \leq \exp(V^{\overline{\mu}_1} + V^\beta - V^\alpha + \xi_j)(z), \quad z \in D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1\,.$$

En cada caso la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de las regiones indicadas.

Las funciones ξ_j, $j = 1, \ldots, m$, así como las regiones D_k^j serán definidas en la exposición del Capítulo 4. De momento basta subrayar que

$$(V^{\overline{\mu}_1} + V^\beta - V^\alpha + \xi_j)(z) < 0$$

en una vecindad de $z = \infty$ y que

$$D = \cup_{k=1}^j D_k^j\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,.$$

Bajo cierta condición adicional sobre las medidas α y β que describen la distribución asintótica de los ceros de los polinomios α_n y β_n, la cual tiene lugar por ejemplo si $\beta_n \equiv 1, n \in \Lambda$ (o sea en el caso de los AMHP), se consigue probar que

$$(V^{\overline{\mu}_1} + V^\beta - V^\alpha + \xi_j)(z) < 0\,, \qquad z \in D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1\,.$$

Los resultados expuestos en el Capítulo 4 han sido sometidos para su publicación en [23].

En el **Capítulo 5** aprovechamos los resultados obtenidos anteriormente para desarrollar una aplicación a fórmulas de cuadraturas simultáneas. Enunciamos a continuación una consecuencia del Teorema 1.10.

Teorema 1.12 *Sean $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de Nikishin de m medidas y Λ una sucesión de multi-índices distintos dos a dos tal que $m \leq 3$ ó $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$ y se cumple (1.20). Sea*

$$R_{n,i}(z) = \sum_{j=1}^{|n|} \frac{\lambda_{n,i,j}}{z - x_{n,j}}$$

la descomposición en fracciones simples de la componente i-ésima del AMHP correspondiente al sistema de funciones de Nikishin $\widehat{S}$. Entonces, para cada $i = 1, \ldots, m$ y toda $f \in H(\mathcal{V})$, donde $\mathcal{V}$ es una vecindad de $Co(\mathrm{sop}(\sigma_1))$, tenemos

$$\lim_{n \in \Lambda} \left| \int f(x) ds_i(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,i,j} f(x_{n,j}) \right|^{1/2|n|} \leq \rho_{\mathcal{V}} < 1\,,$$

donde $\rho_{\mathcal{V}} = \inf\{\delta_{\gamma_\rho} : \gamma_\rho \subset \mathcal{V}\}$ y $\gamma_\rho = \{z : |\varphi_\infty(z)| = \rho\}, 0 < \rho < 1$.

En este capítulo también se dan condiciones suficientes para que los coeficientes $\lambda_{n,i,j}$ preserven el signo de la medida s_i correspondiente. Esto es importante desde el punto de vista de la estabilidad numérica del método y permite obtener convergencia en clases más amplias de funciones, por ejemplo continuas en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ sin necesidad de que tengan extensión analítica a una vecindad del intervalo. Esta condición se puede garantizar en tres de las componentes. Luego, para el caso de sistemas de Nikishin de tres medidas podemos asegurar estabilidad numérica del método de cuadratura simultánea propuesto, tomando sucesiones adecuadas de multi-índices. En [21] se publicaron resultados contenidos en el Capítulo 5 restringidos a los aproximantes Hermite-Padé. Aquí los hemos generalizado para incluir el caso multipuntual y ampliado las sucesiones de multi-índices para las cuales tiene lugar la convergencia en la clase de funciones analíticas.

Al final de la Memoria hemos propuesto algunos problemas abiertos que nos han surgido durante el desarrollo del trabajo y sirven de base para su continuación.

Capítulo 2

Normalidad

2.1. Tipos de normalidad

Sea $S = (s_1, \ldots, s_m)$ un sistema de m medidas finitas de Borel cada una de signo constante, y soporte $\mathrm{sop}(s_j), j = 1, \ldots, m$, compacto contenido en el eje real $\mathbb{R}$ y con infinitos puntos de masa. Fijemos un multi-índice $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ donde $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y denotemos $|n| = n_1 + \cdots + n_m$. Decimos que Q es un polinomio de ortogonalidad múltiple de S relativo al multi-índice n, si satisface las relaciones

$$\begin{aligned} &i) \quad \deg Q \leq |n|, Q \not\equiv 0, \\ &ii) \quad 0 = \int x^k Q(x) ds_j(x)\,, \quad k = 0, \ldots, n_j - 1\,, \quad j = 1, \ldots, m\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Siempre podemos encontrar un polinomio Q que satisfaga estas condiciones porque el problema (2.1) es equivalente a resolver un sistema homogéneo de $|n|$ ecuaciones lineales con $|n| + 1$ incognitas, que son los coeficientes del polinomio Q, y obviamente existe al menos una solución no trivial.

En un sistema $S = (s_1)$ donde $m = 1$, Q corresponde a la definición del n_1- ésimo polinomio ortogonal de la medida de signo contante s_1. En este caso el problema (2.1) determina un único Q (salvo factores constantes), además $\deg Q = |n| = n_1$, sus ceros son simples y están en el interior del menor intervalo que contiene a $\mathrm{sop}(s_1)$. Al menor intervalo que contiene a un subconjunto I del eje real lo denotaremos $\mathrm{Co}(I)$ y cuando nos refiramos al interior de un intervalo del eje real estamos tomando la topología euclideana de $\mathbb{R}$.

En general, cuando $m > 1$ no podemos decir lo mismo acerca de Q. Por ejemplo, en un sistema de medidas tal que $s_1 = \cdots = s_m$, tenemos que Q no es único (a menos que el multi–índice n tenga una sola componente distinta de cero) pues de hecho solo las relaciones de ortogonalidad relativas a la componente mayor del índice n son relevantes. Para la unicidad de Q es necesario que las distintas medidas “aporten” cada una algo nuevo en las relaciones de ortogonalidad que las haga significativas en relación con el multi–índice elegido. Es entonces razonable clasificar los multi-índices n según se cumpla o no alguna de las características de unicidad mencionadas para Q en el caso particular $m = 1$.

Definición 2.1.1 Decimos que un multi-índice n es **débilmente normal** para el sistema S, si Q está únivocamente determinado, salvo factores constantes. Un multi-índice n se dice que es **normal**, si cualquier solución no trivial Q de (2.1) satisface $\deg Q = |n|$. Si Q tiene exactamente $|n|$ ceros simples y todos están en el interior del menor intervalo que contiene a $\cup_{j=1}^{m} \operatorname{sop}(s_j)$, el índice se dice que es **fuertemente normal**. Cuando todos los índices son débilmente normales, normales, ó fuertemente normales, se dice que el sistema S es débilmente perfecto, perfecto, ó fuertemente perfecto, respectivamente.

Cuando el sistema S satisface que $\operatorname{Co}(\operatorname{sop}(s_i)) \cap \operatorname{Co}\operatorname{sop}(s_j), i \neq j$, se dice que el sistema es de Angelesco. En este caso es fácil verificar que todos los índices son fuertemente normales. O sea, tales sistemas son fuertemente perfectos. Hay una amplia bibliografía dedicada al estudio de las propiedades algebraicas y analíticas de estos sistemas. En esta dirección pueden ver, por ejemplo, [28], [29], [41] y [44]. Sin embargo, los polinomios multi–ortogonales relativos a estos sistemas no cumplen buenas propiedades asintóticas, por lo que desde el punto de vista de las aplicaciones no ofrecen gran interés.

En esta tesis nos centraremos fundamentalmente en el estudio de otro tipo de sistemas llamados de Nikishin, cuyas medidas están todas soportadas en el mismo intervalo. En este caso la definición es algo más complicada y la dejaremos para la sección siguiente donde comentaremos la bibliografía adecuada. De momento nos limitamos a indicar que para tales sistemas el asunto de la normalidad de índices resulta un problema no trivial. Sin embargo, esta complicación inicial da sus frutos, pues las propiedades análiticas que cumplen los sistemas de polinomios multi-ortogonales correspondientes a sistemas de Nikishin e índices normales en mucho extienden las propiedades conocidas para polinomios ortogonales usuales.

Es obvio que la normalidad fuerte implica normalidad. En la demostración del Lema 2.1, veremos que la normalidad implica normalidad débil. Para enunciar dicho Lema necesitamos previamente introducir algunos conceptos.

La matriz de momento del sistema S relativa al multi-índice n es la matriz cuadrada M_n de orden $|n|$ formada al colocar consecutivamente una sobre otra las submatrices

$$\begin{pmatrix} \int ds_j(x) & \cdots & \int x^{|n|-1} ds_j(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int x^{n_j-1} ds_j(x) & \cdots & \int x^{|n|+n_j-2} ds_j(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Si $n_j = 0$, nos saltamos esta componente en la construcción de M_n. Por M'_n denotamos la matriz que se obtiene agregando a la derecha de M_n el vector columna

$$(\int x^{|n|} ds_1(x), \ldots, \int x^{|n|+n_1-1} ds_1(x), \int x^{|n|} ds_2(x), \ldots, \int x^{|n|+n_m-1} ds_m(x))^t\,.$$

Sea $Q(x) = a_{|n|}x^{|n|} + a_{|n|-1}x^{|n|-1} + \cdots + a_0$ una solución de (2.1) y $A = (a_0, \ldots, a_{|n|})^t$ el vector de los coeficientes correspondientes a Q. El sistema de ecuaciones definido por (2.1) se expresa en forma matricial como sigue

$$M'_n A = \overline{0}\,, \tag{2.2}$$

donde $\overline{0}$ denota el vector nulo de dimensión $|n|$. Por $\text{rk}(\cdot)$ denotamos al rango de la matriz indicada.

Lema 2.1 *Sea $(s_1, \ldots, s_m)$ un sistema de medidas y $n = (n_1, \ldots, n_m)$ un multi-índice. Una condición necesaria y suficiente para que n sea débilmente normal es que $rk(M'_n) = |n|$. Para que n sea normal es necesario y suficiente que $rk(M_n) = |n|$. En particular, normalidad implica normalidad débil. Además, si n es normal, cualquier multi–índice que se obtenga disminuyendo en una unidad el valor de una de las componentes de n es débilemnte normal.*

Demostración. Según el Teorema de Rouche-Frobenius el espacio solución del sistema de ecuaciones homogéneo (2.2) es unidimensional si y sólo si $\text{rk}(M'_n) = |n|$. Por supuesto, esto es equivalente al hecho de que Q esté únivocamente determinado salvo factores constantes. Por otra parte, $\text{rk}(M_n) = |n|$ y $a_n = 0$ implica que todas las demás componentes de A, de ser solución del sistema, tienen que ser cero, mientras que si $\text{rk}(M) < |n|$ podemos encontrar una solución no trivial de (2.2) con $a_n = 0$. El resto de las afirmaciones del lema son consecuencia inmediata de todo lo anterior. □

En ocasiones, relativo a (2.1) se puede plantear el problema dual, que desempeña un papel importante en muchas de las demostraciones sobre condiciones suficientes de normalidad. Dicho problema se define para un tipo de sistema de medidas $S = (s_1, \ldots, s_m) = (w_1 d\sigma_1, \ldots, w_m d\sigma_1)$ donde σ_1 es una medida finita de Borel cuyo soporte compacto $\text{sop}(\sigma_1)$ está contenido en el eje real, y tiene infinitos puntos de masa y $(w_1, \ldots, w_m)$ es un sistema de funciones continuas en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ y de signo constante. Cuando resulta más cómodo, hemos adoptado la notación diferencial para las medidas en el sistema S.

Definición 2.1.2 El **problema dual** relativo a (2.1) consiste en encontrar una colección de polinomios $P_1, \ldots, P_m$, no todos nulos, tal que $\deg P_j \leq n_j - 1$ y

$$\int x^{\nu}(P_1(x)w_1(x)+\cdots+P_m(x)w_m(x))d\sigma_1(x) = 0\,, \quad \nu = 0, \ldots, |n|-2\,, \tag{2.3}$$

($\deg P_j \leq -1$ significa que $P_j \equiv 0$).

Obtener dicha colección de polinomios es equivalente a encontrar la solución de un sistema homogéneo de $|n|-1$ ecuaciones lineales con $|n|$ incognitas, los coeficientes de los polinomios P_j, $j = 1, \ldots, m$, lo cual tiene solución no trivial. Por tanto, el problema dual siempre tiene solución.

Definición 2.1.3 Decimos que $n \in \mathbb{Z}_+^m$ es **normal con respecto al problema dual** si ninguna solución de (2.3) satisface

$$\int x^{\nu}(P_1(x)w_1(x)+\cdots+P_m(x)w_m(x))d\sigma_1(x) = 0\,, \quad \nu = 0, \ldots, |n|-1\,, \tag{2.4}$$

($\deg P_j \leq -1$ significa que $P_j \equiv 0$).

Lema 2.2 *Para un sistema $S = (w_1 d\sigma_1, \ldots, w_m d\sigma_1)$, el multi-índice $n \in \mathbb{Z}_+^m$ es normal si y sólo si es normal con respecto al problema dual.*

Demostración. Según el Lema 2.1, n es normal con respecto a S si y sólo si las filas de M_n son linealmente independientes. Tomando combinaciones lineales de las filas de M_n, se ve que esto es igual a decir que no podemos encontrar una colección de polinomios P_j, $j = 1, \ldots, m$, no todos nulos, tales que cumplan $\deg P_j \leq n_j - 1$ y (2.4) tenga lugar. Esto es equivalente a que n sea normal para el problema dual. $\square$

Otro concepto frecuentemente usado en las demostraciones sobre normalidad de índices es el de AT sistema. E. M. Nikishin lo introdujo en su artículo [43] con el propósito de probar normalidad para ciertos multi-índices trabajando con un tipo de sistemas de medidas, también definidos por él y que en la actualidad se conocen como sistemas de Nikishin. Una descripción de dichos sistemas puede encontrarse en la Sección 2.2.

Definición 2.1.4 Se dice que $(w_1, \ldots, w_m)$ es un **AT sistema** para el multi-índice $n = (n_1, \ldots, n_m)$ en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ si cualquiera sea la colección de polinomios $P_1, \ldots, P_m$ que se escoja con $\deg P_j \leq n_j - 1$, no todos nulos, la función

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(P_1, \ldots, P_m; x) = P_1(x)w_1(x) + \cdots + P_m(x)w_m(x)\,.$$

tiene a lo más $|n| - 1$ ceros en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$. El sistema $(w_1, \ldots, w_m)$ es un AT sistema en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ si es un AT sistema en dicho intervalo para todo $n \in \mathbb{Z}_+^m$.

Como σ_1 tiene infinitos puntos de masa en su soporte, (2.4) obliga a $\mathcal{H}(x)$ a tener al menos $|n|$ cambios de signos en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$. Por tanto, una condición necesaria y suficiente para que un índice n sea normal con respecto al problema dual es que $(w_1, \ldots, w_m)$ sea un AT sistema para dicho índice n en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$. De hecho, la propiedad AT tiene otras consecuencias importantes.

Lema 2.3 *Sea σ_1 como antes y $(w_1, \ldots, w_m)$ un sistema de funciones analíticas en una vecindad de Co$(\mathrm{sop}(\sigma_1))$. Sea $S = (w_1 d\sigma_1, \ldots, w_m d\sigma_1)$. Supongamos que $(w_1, \ldots, w_m)$ es un AT sistema para el multi-índice $n = (n_1, \ldots, n_m)$. Entonces n es fuertemente normal para S.*

Demostración. De (2.1) se sigue que

$$0 = \int Q(x)\mathcal{H}(x)d\sigma_1(x) \tag{2.5}$$

para todo $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(P_1, \ldots, P_m; x)$. Supongamos que Q tiene a lo más $N < |n|$ cambios de signo en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$. Escojamos los polinomios $P_j, j = 1, \ldots, m$, para que $\mathcal{H}$ tenga un cero simple en cada punto donde Q cambie de signo en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ y un cero de multiplicidad $|n| - N - 1$ en uno de los extremos de $\Delta_1 = \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$. Recordemos que hemos supuesto que las funciones w_j son analíticas en una vecindad de Δ_1. Encontrar tales polinomios $P_j, j = 1, \ldots, m$, se reduce a resolver un sistema homogéneo de $|n|-1$ ecuaciones con $|n|$ incognitas, que son los coeficientes de los polinomios; luego, existe al menos una solución no trivial. Como $\mathcal{H}(x)$ no puede tener más ceros en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ que los $|n|-1$ antes asignados, tenemos que $Q(x)\mathcal{H}(x)$ no cambia de signo en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$. Por tanto, (2.5) no se puede cumplir para el $\mathcal{H}$ escogido de tal modo. Esto es una contradicción, con lo cual queda demostrado el lema. □

2.2. Normalidad en sistemas de Nikishin

Los sistemas de Nikishin de medidas fueron introducidos en [43]. En nuestra definición adoptamos la notación usada en [29], que es más fácil de comprender. Sean σ_1 y σ_2 dos medidas finitas de signo constante y soporte compacto contenidos en $\mathbb{R}$. Para cada $i = 1, 2$, denotamos $\Delta_i = \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_i))$. Supongamos que $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. Definimos el producto de estas dos medidas mediante

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) = \int \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} d\sigma_1(x) = \widehat{\sigma}_2(x) d\sigma_1(x) \,. \tag{2.6}$$

$\widehat{\sigma}_2$ se conoce como la función de Markov correspondiente a la medida σ_2. Se ve que $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ es una medida de signo constante, cuyo soporte es igual al de σ_1. Para un sistema de intervalos cerrados $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ que satisfacen $\Delta_{j-1} \cap \Delta_j = \emptyset, j = 2, \ldots, m$, y medidas finitas de Borel $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ cada una de signo constante y $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_j)) = \Delta_j$, definimos inductivamente para cada $i = 1, \ldots m$ el sistema de medidas

$$s_{i,j}(x) = \langle \sigma_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_j \rangle(x) = \langle \sigma_i, \langle \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_j \rangle \rangle(x) = \widehat{s}_{i+1,j}(x) d\sigma_i(x),$$

con $j = i, \ldots m$ y $\widehat{s}_{i.i-1} = 1$.

Decimos que $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, donde

$$s_1 = s_{1,1} = \langle \sigma_1 \rangle = \sigma_1, \quad s_2 = s_{1,2} \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \ldots, s_m = s_{1,m} = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_m \rangle \,,$$

es el **sistema de Nikishin de medidas** asociado al sistema $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. Notemos que todas las medidas de un sistema de Nikishin tienen el mismo soporte $\mathrm{sop}(\sigma_1)$, y que para cada $i = 1, \ldots, m$ el sistema $(s_{i,i}, \ldots, s_{i,m}) = \mathcal{N}(\sigma_i, \ldots, \sigma_m)$ es también un sistema de Nikishin.

Para los sistemas de Nikishin ha sido encontrada una amplia clase de multi-ídices fuertemente normales. El primer resultado al respecto se debe a Nikishin. En [43] demostró normalidad fuerte para los multi-índices $n = (n_1, \ldots, n_m)$ de la forma

$$n_1 + 1 = n_2 + 1 = \cdots = n_j + 1 = n_{j+1} = \cdots = n_m, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Luego en [19] los autores encontraron que los multi-índices para los cuales $1 \leq i < j \leq m \Rightarrow n_j \leq n_i + 1$ son fuertemente normales. Este resultado también fue probado de otro modo en [29] donde se introdujo una clase de sistemas de medidas que combina la construcción de los sistemas de Angelesco y la de los sistemas de Nikishin. Es fácil ver que esta clase de índices contiene a la anterior. De los resultados de [9] se sigue que los sistemas de Nikishin de dos funciones son fuertemente perfectos. Una demostración detallada puede encontrarse en [19]. Esto también se puede deducir del Teorema 2.2 de la presente sección.

Denotemos ahora por $\mathbb{Z}_+^m(*)$ la clase de multi-índices $n = (n_1, \ldots, n_m)$ para los cuales no existen tres números naturales $1 \leq i < j < k \leq m$ tales que $n_i < n_j < n_k$. En otras palabras, $\mathbb{Z}_+^m(*)$ está formado por los multi-índices que no contienen tres componentes, no necesariamente consecutivas, crecientes monótonamente. También se pueden caracterizar estos multi–índices por la propiedad de que se pueden particionar en dos multi–indices cuyas componentes son decrecientes (no necesariamente monotonamente). Esta clase contiene todos los multi–índices del párrafo anterior. Esto es obvio si $m = 2$ pues al haber sólo dos componentes, no pueden haber tres que crezcan monótonamente. Si $m \geq 3$ de existir $i < j < k$ tales que $n_i < n_j < n_k$ se tendría $n_k > n_i + 1$. Por otra parte, no es difícil encontrar multi–índices en $\mathbb{Z}_+^m(*)$ para los cuales $n_j > n_i + 1$ con $i < j$. Nótese que $\mathbb{Z}_+^2(*) = \mathbb{Z}_+^2$ y que $\mathbb{Z}_+^3(*)$ contiene todos los índices de $\mathbb{Z}_+^3$ con excepción de aquellos tales que $n_1 < n_2 < n_3$.

Teorema 2.1 *Sea $S_2 = (s_{2,2}, \ldots, s_{2,m}) = \mathcal{N}(\sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de Nikishin arbitrario de $m-1$ medidas y sea $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m(*)$. Entonces, el sistema de funciones $(1, \widehat{s}_{2,2}, \ldots, \widehat{s}_{2,m})$ es un AT sistema para el índice n en cualquier intervalo Δ_1 disjunto con* $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_2))$.

Nota 2.1 Este resultado también es cierto para una definición de sistema de Nikishin en la que sólo se pida que el interior (en $\mathbb{R}$) de $\Delta_{j-1} \cap \Delta_j, j = 2, \ldots, m$, sea vacío con tal que las correspondientes medidas $s_j, j = 1, \ldots, m$, sean todas finitas. Se permite entonces que intervalos consecutivos Δ_j tengan en común un punto extremo, si las medidas son lo suficientemente débiles en un entorno de dicho extremo común. Sin embargo, para facilitar la demostración tomaremos la definición como antes.

Para la demostración del Teorema 2.1 necesitamos introducir conceptos adicionales y enunciar algunos resultados previos. Definimos para cada par i, j, $1 \leq i \leq j \leq m$, la medida

$$s_{i,j} = \langle \sigma_i, \ldots, \sigma_j \rangle \,, \quad (s_{j,j} = \sigma_j).$$

En el apéndice de [34] se demuestra que existe un polinomio $\mathcal{L}_{i,j}$ de grado 1, y una medida finita, positiva y de Borel $\tau_{i,j}$ con $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\tau_{i,j})) \subset \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_{i,j}))$ tales que

$$\frac{1}{\widehat{s}_{i,j}(z)} = \mathcal{L}_{i,j}(z) + \widehat{\tau}_{i,j}(z)\,. \tag{2.7}$$

Para cada $k \in \{1, \ldots m\}$ definimos un sistema de Nikishin auxiliar S^k. Si $k = 1$, tomamos

$$S^1 = (s_2^1, \ldots, s_m^1) = (d\sigma_2, w_3^1 d\sigma_2, \ldots, w_m^1 d\sigma_2) = \mathcal{N}(\sigma_2, \ldots \sigma_m)\,.$$

Cuando $2 \le k \le m$, entonces

$$S^k = (s_2^k, \ldots, s_m^k) = (\tau_{2,k}, w_3^k d\tau_{2,k}, \ldots, w_m^k d\tau_{2,k}) =$$

$$\mathcal{N}(\tau_{2,k}, \widehat{s}_{2,k} d\tau_{3,k}, \ldots, \widehat{s}_{k-1,k} d\tau_{k,k}, \widehat{s}_{k,k} d\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \ldots, \sigma_m)\,. \tag{2.8}$$

Estos sistemas auxiliares fueron introducidos por primera vez en los Lemas 4-6 de [9] en la obtención de relaciones de ortogonalidad similares a las que aparecen en el Lema 3.2 del siguiente capítulo y que son necesarias para el estudio de la convergencia en capacidad de aproximantes Hermite-Padé de sistemas de Niksishin.

El siguiente lema es el Teorema 3.1.3 en [20] donde se emplea de manera análoga a [9] pero permite simplificar los cálculos y hacerlos de forma más elegante. Nos será muy útil en la demostración del Teorema 2.1. En dicho lema se establecen relaciones entre los cocientes de las funciones de Markov correspondientes al sistema S^1 y las funciones de Markov relativas a las medidas en los sistemas $S^k, 2 \le k \le, m$. Incluimos su enunciado para facilitar la lectura y unificar la notación.

Lema 2.4 *Dados los sistemas de Nikishin $S^k = (s_2^k, \ldots, s_2^k)$ y $k \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos las siguientes fórmulas.*

$$\frac{1}{\widehat{s}_k^1(z)} = \mathcal{L}_k(z) + \widehat{s}_2^k(z)\,, \tag{2.9}$$

$$\frac{\widehat{s}_j^1(z)}{\widehat{s}_k^1(z)} = a_j + \widehat{s}_{j+1}^k(z) + c_j \widehat{s}_j^k(z)\,, \quad j = 2, \ldots, k-1\,, \tag{2.10}$$

y

$$\frac{\widehat{s}_j^1(z)}{\widehat{s}_k^1(z)} = a_j + \widehat{s}_j^k(z)\,, \quad j = k+1, \ldots, m\,, \tag{2.11}$$

donde a_j y c_j denotan constantes, y $\mathcal{L}_k$ un polinomio de grado 1.

Demostración del Teorema 2.1 Procederemos por inducción en $m \in \mathbb{N}$, que es el número de funciones en $(1, \widehat{s}_2^1, \ldots, \widehat{s}_m^1)$. Para $m = 1$ este sistema de funciones se reduce a la constante 1 y $n \in \mathbb{Z}_+(*) = \mathbb{Z}_+$ sería un número natural. Este caso es trivial porque cualquier polinomio de grado $\le n-1$ puede tener a lo más $n-1$ ceros en el plano complejo a no ser que sea el polinomio nulo. Luego, tenemos el inicio de inducción. Entonces lo que debemos probar es que supuesto que el enunciado se cumple para $m-1, m \geq 2$, también es cierto para m.

Supongamos lo contrario; o sea, que $(1, \widehat{s}_2^1, \ldots, \widehat{s}_m^1)$ no es un AT sistema para un índice $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$ en un intervalo $[a,b]$ disjunto con Δ_2. Entonces existen polinomios $h_i, \deg h_i \leq n_i - 1, i = 1, \ldots, m$, no todos nulos, tales que $\mathcal{H} = h_1 + h_2\widehat{s}_2^1 + \ldots + h_m\widehat{s}_m^1$ tiene al menos $|n|$ ceros en $[a,b]$ contando multiplicidades. Sea $W_n, \deg W_n \geq |n|$, un polinomio mónico cuyos ceros son los de $\mathcal{H}$ en $[a,b]$. Tenemos entonces,

$$\frac{\mathcal{H}(z)}{W_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{|n|-M}}\right) \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta_2)\,, \quad z \to \infty\,, \tag{2.12}$$

donde $M = \max\{n_1 - 1, n_2 - 2, \ldots, n_m - 2\}$. (En toda la tesis la notación $H(\cdot)$ denota el espacio de las funciones holomorfas en la región que se indique en $(\cdot)$ y el símbolo $\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^N}\right)$, $z \to \infty$, el orden del término principal del desarrollo asintótico de la función que se especifique en una vecindad reducida del infinito.)

Supongamos que $M = n_1 - 1$. Obviamente, multiplicando (2.12) por potencias de z tenemos

$$\frac{z^\nu\mathcal{H}(z)}{W_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta_2)\,, \quad z \to \infty\,, \quad \nu = 0, \ldots, |n| - n_1 - 1\,.$$

Denotemos por Γ un contorno cerrado, de índice uno respecto a los puntos en $\mathrm{Int}(\Gamma)$, tal que $\Delta_2 \subset \mathrm{Int}(\Gamma)$ y $[a,b] \subset \mathrm{Ext}(\Gamma)$. (En lo sucesivo $\mathrm{Int}(\Gamma)$ y $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ denotan las componentes conexas acotada y no acotada, respectivamente, en las cuales Γ divide al plano complejo.) Del Teorema de Cauchy se sigue que para cada $\nu = 0, \ldots, |n| - n_1 - 1$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu\mathcal{H}(z)}{W_n(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(h_2\widehat{s}_2^1 + \ldots + h_m\widehat{s}_m^1)(z)}{W_n(z)}dz\,.$$

Sustituyendo $\widehat{s}_2^1, \ldots, \widehat{s}_m^1$ por su expresión integral, usando el Teorema de Fubini, y la Fórmula Integral de Cauchy, obtenemos ($w_j^1 = \widehat{s}_{3,j}\,, j = 3, \ldots, m$, si $m \geq 3$)

$$0 = \int \frac{x^\nu(h_2 + h_3w_3^1 + \ldots + h_mw_m^1)(x)}{W_n(x)}d\sigma_2(x)\,, \quad \nu = 0, \ldots, |n| - n_1 - 1\,.$$

Como $d\sigma_2(x)/W_n(x)$ es una medida de signo constante en $\mathrm{sop}(\sigma_2)$, de estas relaciones de ortogonalidad se sigue que $h_2 + h_3w_3^1 + \ldots + h_mw_m^1$ está obligado a tener al menos $|n| - n_1$ cambios de signos en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_2))$. Sin embargo, según la hipótesis de inducción, el sistema $(1, w_3^1, \ldots, w_m^1)$ es un AT sistema en Δ_2 para el índice $(n_2,\ldots,n_m)\in\mathbb{Z}_+^{m-1}(*)$, debido a que $(w_3^1,\ldots,w_m^1)$ es un sistema de Nikishin soportado en Δ_3 que es un intervalo disjunto a Δ_2 (si $m=2$ el sistema de funciones se reduce nuevamente a 1 y la conslusión es inmediata). Luego, $h_2+h_3w_3^1+\ldots+h_mw_m^1$ no puede cambiar de signo más de $|n|-n_1-1$ veces en Δ_2. Tenemos entonces una contradicción que prueba el enunciado del teorema para este caso.

Supongamos ahora que $M=n_k-2\,,k\in\{2,\ldots,m\}$. Si k no es único, escogemos el menor. Obsérvese que con esta elección, si tenemos en cuenta que $n\in\mathbb{Z}_+^m(*)$, se tiene que

$$n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_{k-1}\tag{2.13}$$

(este es el único lugar en la demostración donde usamos que $n\in\mathbb{Z}_+^m(*)$). De (2.12) tenemos

$$\frac{z^\nu\mathcal{H}(z)}{(\widehat{s}_k^1W_n)(z)}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)\in H(\mathbb{C}\setminus\Delta_2)\,,\quad z\to\infty\,,\quad \nu=0,\ldots,|n|-n_k-1\,.$$

Sea Γ como antes. Del Teorema de Cauchy podemos decir que

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{z^\nu(h_1+h_2\widehat{s}_2^1+\ldots+h_m\widehat{s}_m^1)(z)}{(\widehat{s}_k^1W_n)(z)}dz\,,\quad \nu=0,\ldots,|n|-n_k-1\,.$$

Usando el Lema 2.4 en la relación anterior y el Teorema de Cauchy, se sigue que

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{z^\nu(h_1(\mathcal{L}_k+\widehat{s}_2^k))(z)}{W_n(z)}dz+\sum_{j=2}^{k-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{z^\nu(h_j(a_j+\widehat{s}_{j+1}^k+c_j\widehat{s}_j^k))(z)}{W_n(z)}dz+$$

$$\sum_{j=k+1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{z^\nu(h_j(a_j+\widehat{s}_j^k))(z)}{W_n(z)}dz=$$

$$\sum_{j=2}^{k-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{z^\nu((h_{j-1}+c_jh_j)\widehat{s}_j^k)(z)}{W_n(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{z^\nu(h_{k-1}\widehat{s}_k^k)(z)}{W_n(z)}dz+$$

$$\sum_{j=k+1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{z^\nu(h_j\widehat{s}_j^k)(z)}{W_n(z)}dz\,,\quad \nu=0,\ldots,|n|-n_k-1\,.$$

Si sustituimos en las últimas relaciones las funciones $\widehat{s}_2^k,\ldots,\widehat{s}_m^k$ por sus expresiones integrales, aplicamos el Teorema de Fubini y la fórmula integral de Cauchy, obtenemos (para la definición de las funciones $w_j^k, j = 3, \ldots, m$, vuelva a la expresión 2.8 y tomemos $w_2^k \equiv 1$),

$$0 = \int \frac{x^\nu (\sum_{j=2}^{k-1} (h_{j-1} + c_j h_j) w_j^k + h_{k-1} w_k^k + \sum_{j=k+1}^m h_j w_j^k)(x)}{W_n(x)} d\tau_{2,k}(x),$$

para cada $\nu = 0, \ldots, |n| - n_k - 1$. Como $d\tau_{2,k}(x)/W_n(x)$ es una medida de signo constante en $\mathrm{sop}(\sigma_2)$, se sigue que

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \sum_{j=2}^{k-1} (h_{j-1} + c_j h_j) w_j^k + h_{k-1} w_k^k + \sum_{j=k+1}^{m} h_j w_j^k \tag{2.14}$$

tiene que tener al menos $|n| - n_k$ cambios de signo en Δ_2.

Cuando $k = 2$, $\sum_{j=2}^{k-1}$ es una suma vacía y $\widetilde{\mathcal{H}}$ se reduce a $h_1 + \sum_{j=3}^m h_{n_j} w_j^2$. Como $(1, w_3^2, \ldots, w_m^2)$ es un AT sistema en Δ_2 ya que el índice $(n_1, n_3, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^{m-1}(*)$, la función $\widetilde{\mathcal{H}}$ tiene a lo sumo $|n| - n_2 - 1$ ceros en Δ_2. En este caso, también llegamos a una contradicción (si $m = 2$ el sistema de funciones se reduce a 1 y la conclusión es trivial).

Si $k \geq 3$, teniendo en cuenta (2.13), podemos asegurar que $\deg h_{j-1} + c_j h_j \leq n_{j-1} - 1, j = 2, \ldots, k-1$. La hipótesis de inducción nos dice que $(1, w_3^k, \ldots, w_m^k)$ es un AT sistema en Δ_2 para el índice

$$(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^{m-1}(*),$$

ya que $(w_3^k, \ldots, w_m^k)$ es un sistema de Nikishin soportado en Δ_3, que es disjunto de Δ_2. Por tanto, $\widetilde{\mathcal{H}}$ puede cambiar de signo en Δ_2 a lo más $|n| - n_k - 1$ veces. Con esta contradicción concluimos la demostración. □

Del Teorema 2.1 y el Lema 2.3 se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 2.2 *Los multi-índices $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$ son fuertemente normales con respecto a cualquier sistema de Nikishin de m medidas.*

Las cuestiones relativas a la normalidad de índices desempeñan un papel central en todos los aspectos de la teoría y aplicación de la aproximanción simultánea, en particular para sistemas de Nikishin. Sería importante esclarecer si los sistemas de Nikishin son o no fuertemente perfectos. Como $\mathbb{Z}_+^2(*) = \mathbb{Z}_+^2$ del teorema anterior se deduce el resultado ya conocido que todo sistema de Nikishin de dos medidas es fuertemente perfecto. En la próxima sección demostramos que lo mismo es cierto para sistemas de Nikishin de tres medidas. El problema general permanece abierto cuando $m \geq 4$. En este caso sabemos que hay multi–indices fuera de $\mathbb{Z}_+^m(*)$ que son fuertemente normales pero no hemos logrado descubrir (salvo cuando $m = 3$) las transformaciones necesarias para una demostración en una clase más general de multi–índices.

2.3. Sistemas perfectos

Para demostrar que los sistemas de Nikishin de tres medidas son fuertemente perfectos el siguiente teorema es fundamental. En el mismo se establece una propiedad útil relativa a los AT sistemas.

Teorema 2.3 *Sean σ_2, σ_3 dos medidas en $\mathbb{R}$ tales que $\Delta_2 \cap \Delta_3 = \emptyset$. El sistema $(1, \widehat{s}_2, \widehat{s}_3)$, donde $(s_2, s_3) = \mathcal{N}(\sigma_2, \sigma_3)$, es un AT sistema en cualquier intervalo Δ_1 disjunto con Δ_2.*

En la demostración del Teorema 2.3 utilizaremos el siguiente lema.

Lema 2.5 *Sean σ_2, σ_3 dos medidas como en el enunciado del Teorema anterior. Entonces*

$$\widehat{\sigma}_2(z)\widehat{\sigma}_3(z) = \widehat{s}_{2,3}(z) + \widehat{\zeta}_{3,2}(z)\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\Delta_2 \cup \Delta_3)\,, \tag{2.15}$$

donde $s_{2,3} = \langle \sigma_2, \sigma_3 \rangle$ y $\zeta_{3,2} = \langle \sigma_3, \sigma_2 \rangle$.

Demostración. En efecto,

$$\widehat{\sigma}_2(z)\widehat{\sigma}_3(z) = \int\int \frac{d\sigma_2(x)d\sigma_3(t)}{(z-x)(z-t)} = \int\int \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-t}\right)\frac{d\sigma_2(x)d\sigma_3(t)}{x-t}$$
$$= \int \frac{\widehat{\sigma}_3(x)d\sigma_2(x)}{z-x} + \int \frac{\widehat{\sigma}_2(t)d\sigma_3(t)}{z-t}$$

que es lo que necesitábamos probar. □

Demostración del Teorema 2.3. Supongamos que $(1, \widehat{s}_2, \widehat{s}_3)$ no es un AT sistema en un Δ_1. Entonces existen un multi-índice $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ y polinomios $P_i, \deg P_i \leq n_i - 1, i = 1, 2, 3$, no idénticamente nulos a la vez, tales que $\mathcal{H} = P_1 + P_2\widehat{s}_2 + P_3\widehat{s}_3$ tiene $N \geq |n|$ ceros en Δ_1 contando multiplicidades. Obviamente, $N < \infty$ ya que $\mathcal{H}$ es analítica en una vecindad de Δ_1, y si $N = \infty$ entonces se tendría $\mathcal{H} \equiv 0$ y, consecuentemente, $P_i \equiv 0, i = 1, 2, 3$.

Sea W_n el polinomio mónico cuyos ceros están en los ceros de $\mathcal{H}$ en Δ_1 (contando multiplicidades). Por tanto,

$$\frac{\mathcal{H}(z)}{W_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N-M}}\right) \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta_1)\,, \tag{2.16}$$

donde $M = \max\{n_1 - 1, n_2 - 2, n_3 - 2\}$.

Supongamos que $M = n_1 - 1$. De (2.16) tenemos que

$$\frac{z^\nu \mathcal{H}(z)}{W_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta_1)\,, \quad \nu = 0, \ldots, n_2 + n_3 - 1\,.$$

Sea Γ un contorno cerrado de índice 1 respecto a sus puntos interiores tal que $\Delta_2 \subset \mathrm{Int}(\Gamma)$ y $\Delta_1 \subset \mathrm{Ext}(\Gamma)$. Del Teorema de Cauchy, se sigue que

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu \mathcal{H}(z)}{W_n(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu (P_2\widehat{s}_2 + P_3\widehat{s}_3)(z)}{W_n(z)}dz\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_2{+}n_3{-}1\,.$$

Sustituyendo $\widehat{s}_2$ y $\widehat{s}_3$ por sus expresiones integrales, usando el Teorema de Fubini y la fórmula integral de Cauchy, obtenemos

$$0 = \int \frac{x^\nu (P_2 + P_3\widehat{\sigma}_3)(x)}{W_n(x)}d\sigma_2(x)\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_2+n_3-1\,.$$

Como $d\sigma_2(x)/W_n(x)$ es una medida de signo constante en $\mathrm{sop}(\sigma_2)$, se sigue que $(P_2+P_3\widehat{\sigma}_3)(x)$ tiene que tener al menos n_2+n_3 cambios de signo en Δ_2. Usando el Teorema 2.1 para el caso $m = 2$, se llega a que lo anterior sólo es posible si $P_2 \equiv P_3 \equiv 0$. Sin embargo, esto conduce directamente a una contradicción. P_1 tendría $N > n_1 - 1$ ceros en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$, lo cual implicaría que $P_1 \equiv 0$. Evidentemente, esto está en contra de la suposición inicial.

Sea ahora el caso $M = n_2 - 2$. De (2.16) se sigue que

$$\frac{z^\nu \mathcal{H}(z)}{\widehat{\sigma}_2(z)W_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \in H(\mathbb{C}\setminus\Delta_1)\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_1+n_3-1\,.$$

Volvemos a tomar Γ como antes. Del Teorema de Cauchy obtenemos

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu \mathcal{H}(z)}{(\widehat{\sigma}_2 W_n)(z)}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu P_1(z)}{(\widehat{\sigma}_2 W_n)(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu (P_3\widehat{s}_{2,3})(z)}{(\widehat{\sigma}_2 W_n)(z)}dz\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_1+n_3-1\,.$$

Según (2.7), existe una medida finita τ_2 de signo constante tal que

$$\frac{1}{\widehat{\sigma}_2(z)} = \mathcal{L}_2(z) + \widehat{\tau}_2(z), \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathrm{sop}(\sigma_2)\,, \tag{2.17}$$

De (2.17), el Teorema de Cauchy, el Teorema de Fubini, y la fórmula integral de Cauchy, tenemos para la primera integral en el miembro derecho

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu P_1(z)}{(\widehat{\sigma}_2 W_n)(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu (P_1\widehat{\tau}_2)(z)}{W_n(z)}dz = \int \frac{x^\nu P_1(x)}{W_n(x)}d\tau_2(x)\,.$$

Para la segunda integral, usando (2.15), (2.17), el Teorema de Cauchy, el Teorema de Fubini, y la fórmula integral de Cauchy, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu (P_3\widehat{s}_{2,3})(z)}{(\widehat{\sigma}_2 W_n)(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu P_3(z)}{W_n(z)}\left(\widehat{\sigma}_3(z) - \frac{\widehat{\zeta}_{3,2}(z)}{\widehat{\sigma}_2(z)}\right)dz =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_3\widehat{\zeta}_{3,2}\widehat{\tau}_2)(z)}{W_n(z)}dz = -\int \frac{x^\nu(P_3\widehat{\zeta}_{3,2})(x)}{W_n(x)}d\tau_2(x)\,.$$

Efectuando la suma,

$$0 = \int \frac{x^\nu(P_1 - P_3\widehat{\zeta}_{3,2})(x)}{W_n(x)}d\tau_2(x)\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_1+n_3-1\,.$$

Otra vez por el Teorema 2.1, si se razona como en el caso anterior se llega a una contradicción.

Finalmente, supongamos que $M = n_3 - 2$. De (2.16) tenemos que

$$\frac{z^\nu\mathcal{H}(z)}{\widehat{s}_{2,3}(z)W_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \in H(\mathbb{C}\setminus\Delta_1)\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_1+n_2-1\,.$$

Tomando Γ del mismo modo que en los casos anteriores y usando el Teorema de Cauchy se tiene que

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu\mathcal{H}(z)}{(\widehat{s}_{2,3}W_n)(z)}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu P_1(z)}{(\widehat{s}_{2,3}W_n)(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_2\widehat{\sigma}_2)(z)}{(\widehat{s}_{2,3}W_n)(z)}dz\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_1+n_2-1\,.$$

De acuerdo con (2.7), sea $\tau_{2,3}$ tal que $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\tau_{2,3})) \subset \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_{2,3})) = \Delta_2$ y

$$\frac{1}{\widehat{s}_{2,3}(z)} = \mathcal{L}_{2,3}(z) + \widehat{\tau}_{2,3}(z), \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathrm{sop}(s_{2,3})\,, \tag{2.18}$$

De (2.18)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu P_1(z)}{(\widehat{s}_{2,3}W_n)(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_1\widehat{\tau}_{2,3})(z)}{(W_n)(z)}dz = \int \frac{x^\nu P_1(x)}{W_n(x)}d\tau_{2,3}(x)\,.$$

Para la segunda integral, usando (2.15) y (2.18), tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_2\widehat{\sigma}_2)(z)}{(\widehat{s}_{2,3}W_n)(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu P_2(z)}{(\widehat{\sigma}_3W_n)(z)}\frac{(\widehat{s}_{2,3}+\widehat{\zeta}_{3,2})(z)}{\widehat{s}_{2,3}(z)}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu P_2(z)}{(\widehat{\sigma}_3W_n)(z)}\frac{\widehat{\zeta}_{3,2}(z)}{\widehat{s}_{2,3}(z)}dz = \int \frac{x^\nu(P_2\widehat{\zeta}_{3,2})(x)}{(\widehat{\sigma}_3W_n)(x)}d\tau_{2,3}(x)\,.$$

Ponemos juntas las expresiones y obtenemos

$$0 = \int \frac{x^\nu(P_1\widehat{\sigma}_3 + P_2\widehat{\zeta}_{3,2})(x)}{(\widehat{\sigma}_3W_n)(x)}d\tau_{2,3}(x)\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_1+n_2-1\,. \tag{2.19}$$

No podemos aplicar directamente el Teorema 2.1 como hicimos antes para concluir la demostración pues la función $P_1\widehat{\sigma}_3 + P_2\widehat{\zeta}_{3,2}$ no es de la forma adecuada. En su lugar, tenemos que dar otro paso más.

De (2.19) conocemos que $P_1\widehat{\sigma}_3+P_2\widehat{\zeta}_{3,2}$ tiene que tener $N_1 \geq n_1+n_2$ ceros en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_2))$ y por el modo en que fueron escogidos P_1, P_2 no pueden ser ídenticamente nulos a la vez. Esto implicaría, como hemos visto en situaciones similares, que P_3 fuese nulo también. Sea V el polinomio mónico cuyos ceros son los ceros de $P_1\widehat{\sigma}_3 + P_2\widehat{\zeta}_{3,2}$ en Δ_2. Por tanto,

$$\frac{(P_1\widehat{\sigma}_3 + P_2\widehat{\zeta}_{3,2})(z)}{V(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N_1-M_1}}\right) \in H(\mathbb{C}\setminus\Delta_3)\,, \tag{2.20}$$

donde $M_1 = \max\{n_1-2, n_2-2\}$.

Supongamos que $M_1 = n_1 - 2$. De (2.20) tenemos que

$$\frac{z^\nu(P_1\widehat{\sigma}_3 + P_2\widehat{\zeta}_{3,2})(z)}{(\widehat{\sigma}_3 V)(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \in H(\mathbb{C}\setminus\Delta_3)\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_2-1\,.$$

Sea Γ un contorno cerrado de integración con índice 1 respecto a sus puntos interiores, tal que $\Delta_3 \subset \mathrm{Int}(\Gamma)$ y $\Delta_2 \subset \mathrm{Ext}(\Gamma)$. Usando el Lema 2.5, se sigue que

$$\begin{aligned}0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_1\widehat{\sigma}_3 + P_2\widehat{\zeta}_{3,2})(z)}{(\widehat{\sigma}_3 V)(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_2\widehat{\zeta}_{3,2})(z)}{(\widehat{\sigma}_3 V)(z)}dz = \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_2\widehat{s}_{2,3})(z)}{(\widehat{\sigma}_3 V)(z)}dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_2\widehat{s}_{2,3}\widehat{\tau}_3)(z)}{V(z)}dz = \\ -\int \frac{x^\nu(P_2\widehat{s}_{2,3})(x)}{V(z)}d\tau_3(x)\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_2-1\,,\end{aligned}$$

donde $1/\widehat{\sigma}_3(z) = \mathcal{L}_3(z) + \widehat{\tau}_3(z), z \in \mathbb{C}\setminus\Delta_3$. Esto no es posible a no ser que $P_2 \equiv 0$ y, consecuentemente, $P_1 \equiv 0$ lo cual contradice la suposición inicial para dichos polinomios.

Si $M_1 = n_2 - 2$, de (2.20) tenemos que

$$\frac{z^\nu(P_1\widehat{\sigma}_3 + P_2\widehat{\zeta}_{3,2})(z)}{(\widehat{\zeta}_{3,2} V)(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \in H(\mathbb{C}\setminus\Delta_3)\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_1-1\,.$$

Tomamos Γ como antes y $1/\widehat{\zeta}_{3,2}(z) = \mathcal{L}_{3,2}(z) + \widehat{\tau}_{3,2}(z), z \in \mathbb{C}\setminus\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_3))$. Se sigue que

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_1\widehat{\sigma}_3 + P_2\widehat{\zeta}_{3,2})(z)}{(\widehat{\zeta}_{3,2} V)(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_1\widehat{\sigma}_2\widehat{\sigma}_3)(z)}{(\widehat{\sigma}_2\widehat{\zeta}_{3,2} V)(z)}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_1\widehat{s}_{2,3})(z)}{(\widehat{\sigma}_2\widehat{\zeta}_{3,2}V)(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^\nu(P_1\widehat{s}_{2,3}\widehat{\tau}_{3,2})(z)}{(\widehat{\sigma}_2 V)(z)}dz =$$

$$\int \frac{x^\nu(P_1\widehat{s}_{2,3})(x)}{(\widehat{\sigma}_2 V)(x)}d\tau_{3,2}(x)\,, \quad \nu = 0,\ldots,n_1-1\,.$$

Razonando como en el caso anterior, obtenemos una contradicción. Así concluimos la demostración del Teorema 2.3. □

Del Teorema 2.3 y el Lema 2.3 se tiene como consecuencia inmediata el resultado fundamental de la sección.

Teorema 2.4 *Los sistemas de Nikishin de tres funciones son fuertemente perfectos.*

Repetimos que es de gran de gran interés teórico y práctico determinar si son o no perfectos los sistemas de Nikishin de más de tres funciones.

Nota 2.2 Los resultados que hemos expuesto en este capítulo, han sido deducidos para sistemas de Nikishin generados por medidas de soporte compacto cuyas envolturas convexas no se intersectan. Sin embargo, con demostraciones esencialmente iguales a las anteriores se pueden generalizar para sistemas generadores donde haya medidas cuyos soportes no estén acotados e incluso si las envolturas convexas de los soportes de medidas consecutivas tengan un punto extremo común. En estos casos basta con exigir que los momentos correspondientes a las medidas con soporte no acotado existan, y para las medidas consecutivas, tales que la envoltura convexa de sus soportes tengan un extremo común, pedir que la medida producto de las mismas en el sentido (2.6) sea acotada. Estas condiciones permiten garantizar la finitud de todas las integrales consideradas y la aplicabilidad de los Teoremas de Fubini, Cauchy y la Fórmula Integral de Cauchy tomando las debidas precauciones.

2.4. Entrelazamiento de ceros

Es bien conocida la propiedad de entrelazamiento de ceros de polinomios de grados consecutivos ortogonales con respecto a una medida de Borel soportada en el eje real. O sea, para sistemas de Nikishin con $m = 1$ tiene lugar la propiedad de entrelazamiento de ceros. En esta sección veremos como esta propiedad se extiende para sistemas de Nikishin cuando $m \geq 2$. El resultado correspondiente lo deduciremos a partir de un teorema general relativo a entrelazamiento de ceros de polinomios consecutivos ortogonales con respecto a un sistema de Markov de funciones. Para el caso particular en que la medida de integración es la medida de Lebesgue, la propiedad de entrelazamiento fué demostrada por D. Kershaw en [33]. Nosotros hemos modificado su demostración para incluir el caso más general en que la integración se realiza con respecto a una medida de Borel arbitraria.

Definición 2.4.1 Se dice que una familia de N funciones reales y continuas $\{m_1(x), \dots, m_N(x)\}$ es un sistema de Tchebychef en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si no podemos encontrar constantes c_k, no todas iguales a cero, tales que $\sum_{k=1}^{N} c_k m_k(x)$ tenga más de $N-1$ ceros en $[a, b]$.

De la Definición 2.1.4 se deduce que si el sistema de funciones $(w_1, \dots w_m)$ es un AT sistema para un multi-índice $n = (n_1, \dots n_m)$ en $[a, b]$ entonces el sistema

$$(w_1(x), xw_1(x), \dots, x^{n_1-1}w_1(x), \dots, w_m(x), \dots, x^{n_m-1}w_m(x))$$

es un sistema de Tchebychef en el mismo intervalo. De hecho una manera de definir los AT sistemas es a partir de los sistemas de Tchebychef (véase [43]).

Definición 2.4.2 Sea un sistema de funciones $\{m_1(x), \dots, m_N(x)\}$ como en la Definición 2.4.1. Si para cada $k = 1, \dots, N$, $\{m_1(x), \dots, m_k(x)\}$ es un sistema de Tchebychef en $[a, b]$, entonces se dice que $\{m_1(x), \dots, m_N(x)\}$ es un sistema de Markov.

Análogamente, se extiende la definición de sistema de Markov para una familia infinita de funciones $\{m_1, \dots, m_N, \dots\}$. Más información sobre los sistemas de Markov y Tchebychef puede encontrarse en el Capítulo II de [34]).

Consideremos el determinante

$$M_N(t_1, \dots, t_N) = \begin{vmatrix} m_1(t_1) & m_2(t_1) & \dots & m_N(t_1) \\ m_1(t_2) & m_2(t_2) & \dots & m_N(t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ m_1(t_N) & m_2(t_N) & \dots & m_N(t_N) \end{vmatrix}$$

y denotemos por $V_N(t_1, \dots, t_N)$ el determinante de Vandermonde

$$V_N(t_1, \dots, t_N) = \begin{vmatrix} t_1^{N-1} & t_1^{N-2} & \dots & 1 \\ t_2^{N-1} & t_2^{N-2} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ t_N^{N-1} & t_N^{N-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Sea $T = \{(t_1, \dots, t_N) : a \le t_1 < t_2 < \dots < t_N \le b\}$. De la Definición 2.4.2 y de la continuidad de $m_1(t), \dots, m_N(t)$, se sigue que la función $M_N(t_1, \dots, t_N)$ tiene signo constante en T. Además, dados $t_1, \dots, t_k \in (a, b)$

con $t_i \neq t_j$ y $k+1 \leq N$, la función de t, $M_{k+1}(t, t_1, \ldots, t_k)$, cambia de signo en dichos puntos y por ser $\{m_1, \ldots, m_{k+1}\}$ un sistema de Tchebychev no puede tener más ceros en dicho intervalo.

Definición 2.4.3 Sea $\{m_1(x), \ldots, m_N(x), \ldots\}$ un sistema de Markov en $[a, b]$ y σ una medida positiva, finita de Borel con soporte contenido en $[a, b]$. Decimos que $\{p_N\}, N \in \mathbb{N}$, es la **sucesión de polinomios ortogonales mónicos** con respecto al sistema de Markov dado y la medida σ si para cada N, p_N es el polinomio mónico de menor grado que satisface

$$\int p_N(x) m_k(x) d\sigma(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Estamos en condiciones de probar el siguiente teorema. La parte i) es bien conocida pero se incluye para completar la idea. La afirmación ii) contiene la esencia del resultado.

Teorema 2.5 *Sea σ una medida positiva, finita y de Borel, con soporte contenido en el intervalo $[a, b]$ y sea $\{m_1(x), \ldots, m_N(x), \ldots\}$ un sistema de Markov en $[a, b]$. Sea $\{p_n\}, N \in \mathbb{N}$, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos relativa al sistema de Markov y σ. Entonces*

i) $\deg p_N = N$ *y* p_N *tiene* N *ceros simples en el interior de* $[a, b]$.

ii) La siguiente fórmula tiene lugar

$$\frac{p_{N+1}(x) p_N(y) - p_{N+1}(y) p_N(x)}{x - y}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_T K_N(t_1, \ldots, t_N) \prod_{i=1}^{N} (x - t_i) \prod_{i=1}^{N} (y - t_i) d\sigma(t_1) d\sigma(t_2) \cdots d\sigma(t_N)}{\displaystyle\int_T K_N(t_1, \ldots, t_N) d\sigma(t_1) d\sigma(t_2) \cdots d\sigma(t_N)}.$$

donde $K_N = M_N(t_1, \ldots, t_N) V_N(t_1, \ldots, t_N)$.

Demostración. Obviamente, como en la definición se exige que p_N tenga el menor grado posible, entonces $\deg p_N \leq N$, pues el sistema homogéneo de ecuaciones que garantiza las relaciones de ortogonalidad que deben satisfacerse tiene solución no trivial en la clase de polinomios de grado $\leq N$.

Sean $x_1, \ldots, x_k$ los puntos donde $p_N(x)$ cambia de signo en $[a, b]$. Si $k < N$, tenemos que

$$\int p_N(x) M_{k+1}(x, x_1, \ldots, x_k) d\sigma(x) = 0.$$

Esto es imposible ya que $M_{k+1}(x, x_1, \ldots, x_k)$ cambia de signo en $x_1, \ldots, x_k$ (y solo en esos puntos), lo cual significa que $Q_N(x)M_{k+1}(x, x_1, \ldots, x_k)$ tiene signo constante en $[a, b]$. Entonces, $k = N$ y tenemos la afirmación $i)$ del Teorema.

Sea $C = [a, b] \times \cdots \times [a, b] \subset \mathbb{R}^N$. Para simplificar, denotemos $d\tau(t) = d\sigma(t_1) \cdots d\sigma(t_N)$. Está claro que el polinomio $q_N(x)$ definido mediante el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} x^N & x^{N-1} & \ldots & 1 \\ \int t_1^N m_1(t_1)d\sigma(t_1) & \int t_1^{N-1} m_1(t_1)d\sigma(t_1) & \cdots & \int m_1(t_1)d\sigma(t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \int t_N^N m_N(t_N)d\sigma(t_N) & \int t_N^{N-1} m_N(t_N)d\sigma(t_N) & \cdots & \int m_N(t_N)d\sigma(t_N) \end{vmatrix}$$

satistisface las condiciones de ortogonalidad

$$\int q_N(x)m_k(x)d\sigma(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2.21}$$

Usando la multilinealidad del determinante, la linealidad de la integración, y la fórmula explícita del determinante de Vandermonde, es fácil ver que q_N se puede escribir como

$$q_N(x) = \int_C m_1(t_1) \cdots m_M(t_N) V_{N+1}(x, t_1, \ldots, t_N) d\tau(t)$$

$$= \int_C m_1(t_1) \cdots m_M(t_N) V_N(t_1, \ldots, t_N) \prod_{i=1}^{N} (x - t_i) d\tau(t).$$

Sea $\wp$ el conjunto de permutaciones de $\{1, \ldots, N\}$. Como el integrando es cero cuando $t_i = t_j$ para algún (i, j), obtenemos que

$$q_N(x) = \sum_{\pi \in \wp} \int_{\phi_\pi(T)} m_1(t_1) \cdots m_N(t_N) V_N(t_1, \ldots, t_N) \prod_{i=1}^{N} (x - t_i) d\tau(t)$$

donde $\phi_\pi(t_1, \ldots, t_N) = (t_{\pi(1)}, \ldots, t_{\pi(N)})$. Haciendo el cambio de variables correspondiente ϕ_π en cada una de las integrales, la fórmula anterior se convierte en

$$q_N(x) = \int_T \sum_{\pi \in \wp} m_1(t_{\pi(1)}) \cdots m_N(t_{\pi(N)}) V_N(t_{\pi(1)}, \ldots, t_{\pi(N)}) \prod_{i=1}^{N} (x - t_i) d\tau(t)$$

$$= \int_T M_N(t_1,\ldots,t_N)V_N(t_1,\ldots,t_N)\prod_{i=1}^{N}(x-t_i)d\tau(t)\,.$$

Siguiendo el mismo procedimiento tenemos que el coeficiente conductor de $q_N(x)$ es

$$\int_T M_N(t_1,\ldots,t_N)V_N(t_1,\ldots,t_N)d\tau(t)\,.$$

Obviamente, el coeficiente conductor es distinto de cero pues $M_N(t_1,\ldots,t_N)$ y $V_N(t_1,\ldots,t_N)$ tienen signo constante en T. Como consecuencia de i), p_N es el único polinomio mónico de grado $\leq N$ que satisface las relaciones de ortogonalidad (2.21). Luego,

$$p_N(x) = \frac{\displaystyle\int_T M_N(t_1,\ldots,t_N)V_N(t_1,\ldots,t_N)\prod_{i=1}^{N}(x-t_i)d\tau(t)}{\displaystyle\int_T M_N(t_1,\ldots,t_N)V_N(t_1,\ldots,t_N)d\tau(t)} \tag{2.22}$$

Sea y un punto tal que $p_N(y) \neq 0$. Fijemos y. Consideremos la expresión

$$p_{N+1}(x)p_N(y) - p_{N+1}(y)p_N(x)$$

Esta expresión corresponde a un polinomio de grado $N+1$ en la variable x con coeficiente conductor $p_N(y)$ y divisible por $x-y$. Por lo tanto,

$$p_{N+1}(x)p_N(y) - p_{N+1}(y)p_N(x) = (x-y)p_N(y)T_N^{(y)}(x) \tag{2.23}$$

donde $T_N^{(y)}(x)$ es un polinomio mónico en x de grado N, cuyos coeficientes dependen de y (en principio, no necesariamente en forma polinomial).

De la definición de p_N y p_{N+1}, y la expresión anterior se tiene que $T_N^{(y)}$ satisface las relaciones de ortogonalidad

$$\int (y-x)T_N^{(y)}(x)m_k(x)d\sigma(x) = 0, \quad k=1,\ldots,N\,. \tag{2.24}$$

Además, es el único polinomio mónico de grado N que satisface dichas relaciones. En efecto, supongamos que existe otro polinomio mónico $\widetilde{T}(x)$ de grado N que cumple (2.24). Entonces,

$$\int (y-x)(T_N^{(y)}(x) - \widetilde{T}(x))m_k(x)d\sigma(x) = 0, \quad k=1,\ldots,N\,.$$

Como $(y-x)(T_N^{(y)}(x) - \widetilde{T}(x))$ es un polinomio en x de grado $\leq N$, de las relaciones de ortognalidad anteriores tenemos que

$$(y-x)(T_N^{(y)}(x) - \widetilde{T}(x)) = cp_N(x)$$

para alguna constante c. Evaluando esta relación en $x = y$ concluimos que $c = 0$ debido al hecho que $p_N(y) \neq 0$.

Usando el procedimiento anterior obtenemos que el polinomio en x de grado N definido por el determinante

$$\begin{vmatrix} x^N & \dots & 1 \\ \int(y-t_1)m_1(t_1)t_1^N d\sigma(t_1) & \dots & \int(y-t_1)m_1(t_1)d\sigma(t_1) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \int(y-t_N)m_N(t_N)t_N^N d\sigma(t_N) & \dots & \int(y-t_N)m_N(t_N)d\sigma(t_N) \end{vmatrix}$$

$$= \int_T M_N(t_1,\dots,t_N)V_N(t_1,\dots,t_N)\prod_{i=1}^N(y-t_i)\prod_{i=1}^N(x-t_i)d\tau(t)$$

satisface las relaciones de ortogonalidad (2.24) y tiene coeficiente conductor

$$\int_T M_N(t_1,\dots,t_N)V_N(t_1,\dots,t_N)\prod_{i=1}^N(y-t_i)d\tau(t)\,.$$

De acuerdo con (2.22), el coeficiente conductor es igual a

$$p_N(y)\int_T M_N(t_1,\dots,t_N)V_N(t_1,\dots,t_N)d\tau(t) \neq 0\,.$$

Luego, el polinomio definido por este determinante es $T_N^{(y)}(x)$ multiplicado por alguna constante. En consecuencia,

$$T_N^{(y)}(x) = \frac{\int_T M_N(t_1,\dots,t_N)V_N(t_1,\dots,t_N)\prod_{i=1}^N(x-t_i)\prod_{i=1}^N(y-t_i)d\tau(t)}{p_N(y)\int_T M_N(t_1,\dots,t_N)V_N(t_1,\dots,t_N)d\tau(t)}.$$

De la fórmula anterior y (2.23) se deduce que

$$p_{N+1}(x)p_N(y) - p_{N+1}(y)p_N(x) =$$

$$(x-y)\frac{\int_T M_N(t_1,\dots,t_N)V_N(t_1,\dots,t_N)\prod_{i=1}^N(x-t_i)\prod_{i=1}^N(y-t_i)d\tau(t)}{\int_T M_N(t_1,\dots,t_N)V_N(t_1,\dots,t_N)d\tau(t)}$$

siempre que $p_N(y) \neq 0$. Como ambos miembros de esta igualdad representan funciones continuas en y, por continuidad podemos afirmar que la fórmula es válida para todo y. Con esto concluimos la prueba de ii) y del teorema. □

La propiedad de entrelazamiento se obtiene como caso particular del siguiente corolario cuando $\lambda = 0$.

Corolario 2.1 *Sea $\{m_1(x),\ldots,m_{N+1}(x)\}$ un sistema de Markov de $N+1$ funciones en el intervalo $[a,b]$ y σ una medida finita positiva de Borel con soporte contenido en $[a,b]$. Sean p_N y p_{N+1} los polinomios ortogonales mónicos de grado N y $N+1$ relativos al sistema de Markov y la medida σ. Sea p un polinomio mónico arbitrario con coeficientes reales de grado $N+1$ que cumple las mismas relaciones de ortogonalidad que el polinomio p_N. Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$p = p_{N+1} + \lambda p_N\,.$$

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el polinomio $p_{N+1} + \lambda p_N$ tiene $N+1$ ceros reales y simples que entrelazan los ceros de p_N. En particular, esto es cierto para p.

Demostración. Ante todo queremos señalar que en la demostración del Teorema 2.5 no es necesario que el sistema de Markov sea infinito. Sólo se emplea que $\{m_1(x),\ldots,m_{N+1}(x)\}$ es un sistema de Markov en $[a,b]$ tal como hemos impuesto en las hipótesis de este corolario.

Como el polinomio $p-p_{N+1}$ es de grado N y cumple las mismas relaciones de ortogonalidad que p_N, por la parte i) del teorema anterior tenemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p - p_{N+1} = \lambda p_N$ como queríamos probar.

Sea $y \in \mathbb{R}$. Haciendo x tender a y en *ii*) del teorema anterior obtenemos

$$p'_{N+1}(y)p_N(y) - p_{N+1}(y)p'_N(y) = \tag{2.25}$$

$$\frac{\displaystyle\int_T M_N(t_1,\ldots,t_N)V_N(t_1,\ldots,t_N)\prod_{i=1}^{N}(y-t_i)^2 d\sigma(t_1)d\sigma(t_2)\cdots d\sigma(t_N)}{\displaystyle\int_T M_N(t_1,\ldots,t_N)V_N(t_1,\ldots,t_N)d\sigma(t_1)d\sigma(t_2)\cdots d\sigma(t_N)} > 0\,.$$

Por otro lado, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned} p'_{N+1}(y)p_N(y) - p_{N+1}(y)p'_N(y) &= (p_{N+1}+\lambda p_N)'(y)p_N(y) \\ &\quad -(p_{N+1}+\lambda p_N)(y)p'_N(y)\,. \end{aligned}$$

Esto junto con (2.25) nos da que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(p_{N+1}+\lambda p_N)'(y)p_N(y) - (p_{N+1}+\lambda p_N)(y)p'_N(y) > 0 \tag{2.26}$$

cualquiera sea $y \in \mathbb{R}$.

Sabemos que p_N tiene N ceros simples en el interior de $[a,b]$. Evaluando (2.26) en dos ceros consecutivos de p_N se ve que $(p_{N+1}+\lambda p_N)$ cambia de signo. Luego, tiene al menos un cero entre dos ceros consecutivos de p_N. Por otro lado, de esa misma formula se deduce que $(p_{N+1}+\lambda p_N)$ no puede tener ceros reales de multiplidad mayor que 1 pues de lo contrario en tal punto se anularían $(p_{N+1}+\lambda p_N)$ y $(p_{N+1}+\lambda p_N)'$ obteniéndose una contradicción. Por lo tanto, los ceros de $(p_{N+1}+\lambda p_N)$ son todos reales y simples o tiene $N-1$ ceros reales y simples y otros dos que son complejos conjugados uno del otro. Veamos que esto último no es posible.

Supongamos que existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$(p_{N+1}+\lambda p_N)(x) = (x-z_1)(x-\overline{z}_1)\widetilde{p}\,, \qquad \deg \widetilde{p} = N-1\,.$$

De las condiciones de ortogonalidad que satisface $p_{N+1}+\lambda p_N$ se sigue que

$$\int m_k(x)\widetilde{p}(x)|x-z_1|^2 d\sigma(x) = 0\,, \qquad k=1,\ldots,N\,.$$

Por la propiedade i) del Teorema 2.5, $\widetilde{p}$ tendría que tener N ceros en el interior de $[a,b]$ puesto que la medida $|x-z_1|^2 d\sigma(x)$ es positiva y el sistema $\{m_1(x),\ldots,m_N(x)\}$ es de Markov en $[a,b]$. Esto implica que $\widetilde{p}\equiv 0$ y, consecuentemente, $p\equiv 0$ lo cual no es posible.

Entonces tenemos que $p_{N+1}+\lambda p_N$ tiene $N+1$ ceros simples en $[a,b]$ como habíamos afirmado. Para concluir hacemos uso nuevamente de (2.26). Evaluando el lado izquierdo entre dos ceros consecutivos de $p_{N+1}+\lambda p_N$ vemos que p_N cambia de signo y por lo tanto en el intermedio debe de haber un cero de p_N. Con esto concluimos la prueba. □

Nota 2.3 Queremos significar que del corolario anterior sólo se desprende que $p_{N+1}+\lambda p_N$ tiene $N-1$ ceros en el interior de $[a,b]$. Si $\lambda=0$, como p_{N+1} es ortogonal al sistema de Markov $\{m_1(x),\ldots,m_{N+1}(x)\}$, sí tenemos que todos sus ceros están en dicho interior y, por continuidad, esto también es cierto para λ lo suficientemente próximo a cero. Por otro lado, es fácil justificar que para valores grande de λ (en valor absoluto) los ceros exteriores de $p_{N+1}+\lambda p_N$ se salen del intervalo $[a,b]$.

Definición 2.4.4 Decimos que $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ es una **sucesión secuencial** de multi-índices de $\mathbb{Z}_+^m$ si cumple:

i) $|\cdot| : \Lambda \longrightarrow \mathbb{N}$ define una aplicación biyectiva.

ii) Para cada $n\in\Lambda$ existe un multi–índice $n^+\in\Lambda$ que se obtiene adicionándole 1 a una de las componentes de n.

A n^+ se le llama el **sucesor** de n en Λ.

Se pueden construir sucesiones secuenciales de multi-índices contenidas en $\mathbb{Z}_+^m(*)$. Por ejemplo, la sucesión

$$(1,0,0,\ldots,0),(1,1,0,\ldots,0),\ldots,(2,1,1,\ldots,1),\ldots,$$

es de esta naturaleza. Por otro lado, cualquiera sea $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$ es fácil ver que se puede construir (al menos) una sucesión secuencial en $\mathbb{Z}_+^m(*)$ que tiene entre sus elementos a n.

Teorema 2.6 *Sea $S = (s_1,\ldots,s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ un sistema de Nikishin y $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$ una sucesión secuencial. Sean Q_n y Q_{n^+} los polinomios mónicos de ortogonalidad multiple de S relativos a n y n^+, respectivamente, donde $n, n^+ \in \Lambda$. Entonces, para cada $n \in \Lambda$ los ceros Q_{n^+} entrelazan los ceros de Q_n y todos ellos se encuentran en el interior de* $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1)$.

Demostración. Que todos los ceros están en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ ya ha sido demostrado puesto que todos los índices estan en $\mathbb{Z}_+^m(*)$.

Denotemos $(s_{2,2},\ldots,s_{2,m}) = \mathcal{N}(\sigma_2,\ldots,\sigma_m)$, que es un sistema de Nikishin de $m-1$ medidas. Del Teorema 2.1 se sigue que el sistema de funciones $(1,\widehat{s}_{2,2},\ldots,\widehat{s}_{2,m})$ es un AT sistema en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ con respecto al multi-índice n^+. Por lo tanto, el sistema

$$(1,x,\ldots,x^{n_1'-1},\widehat{s}_{2,2},x\widehat{s}_{2,2},\ldots,x^{n_2'-1}\widehat{s}_{2,2},\ldots,\widehat{s}_{2,m},\ldots,x^{n_m'-1}\widehat{s}_{2,m})$$

es un sistema de Markov con $|n|+1$ funciones. El polinomio Q_{n^+} cumple las mismas relaciones de ortogonalidad que Q_n con respecto a este sistema de Markov. Por lo tanto, el entrelazamiento de ceros es consecuencia del Corolario 2.1. □

Del Corolario 2.1 también se desprende lo siguiente.

Corolario 2.2 *Sea $S = (s_1,\ldots,s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ un sistema de Nikishin y $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$. Sea n' un multi-índice cualquiera que se obtiene adicionándole* 1 *a una de las componentes de n. Si n' es normal entonces el polinomio $Q_{n'}$ tiene $|n'| = |n|+1$ ceros simples que entrelazan los ceros de Q_n.*

Demostración. Como ya indicamos anteriormente, es fácil construir una sucesión secuencial en $\mathbb{Z}_+^m(*)$ que contiene a n. Por hipótesis $\deg Q_{n'} = |n'| = |n|+1$ ya que n' es normal. Solo resta aplicar lo que dice el Corolario 2.1 con relación al polinomio p de su enunciado.

Nota 2.4 De lo dicho en la Nota 2.3 se desprende que no podemos afirmar en el Corolario 2.2 que el indice n' sea fuertemente normal pues no conocemos si sus $|n'|$ ceros simples caen o no en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1)$.

Capítulo 3

Convergencia en contenido Hausdorff.

3.1. Contenido de Hausdorff

En este capítulo definiremos los sistemas de funciones de Nikishin y los aproximantes multipuntuales Hermite-Padé (AMHP) correspondientes. Eso se hará en la Sección 3.2. Posteriormente, en la Sección 3.3, enunciaremos algunas condiciones de convergencia uniforme de los AMHP. Antes debemos introducir el concepto de 1-contenido de Hausdorff. A ello dedicaremos la presente sección. Este concepto es un modo de cuantificar el tamaño de un subconjunto E del plano complejo $\mathbb{C}$.

Definición 3.1.1 Sea E un subconjunto de $\mathbb{C}$ y $\{U_\nu\}$ un cubrimiento de E mediante discos U_ν. Se define el **1-contenido de Hausdorff** del conjunto E mediante

$$m_1(E) = \operatorname{ínf} \sum |U_\nu| \, ,$$

donde el ínfimo se toma sobre el conjunto de todos los cubrimientos de E mediante discos y $|U_\nu|$ denota el radio del disco U_ν.

De la definición es inmediato que el 1-contenido de Hausdorff de un disco de radio a, es exactamente a. Sea $P(z) = z^l + c_{l-1}z^{l-1} + \cdots + c_0$ un polinomio mónico de grado l. Consideremos el conjunto $E = \{z : |P(z)| \leq a\}$, es fácil verificar que

$$m_1(E) \leq a^{1/l} \, . \tag{3.1}$$

El 1-contenido de Hausdorff no es una medida porque en general no cumple la propiedad σ-aditiva; sin embargo, se cumplen las propiedades de monotonía y subaditividad.

Proposición 3.1 *Sean E_1 y E_2 dos conjuntos del plano complejo, entonces:*

i) $m_1(E_1 \cup E_2) \leq m_1(E_1) + m_1(E_2)$,

ii) $E_1 \subset E_2$ *implica* $m_1(E_1) \leq m_1(E_2)$.

Demostración: Las afirmaciones de la proposición son inmediatas a partir de la definición 3.1.1, ya que en ambos apartados, en el miembro izquierdo de las desigualdades el ínfimo se toma sobre una clase más amplia de cubrimientos que en el miembro derecho. □

Definimos la convergencia en 1-contenido de Hausdorff de funciones de manera análoga a como se define la convergencia en medida.

Definición 3.1.2 Sea $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones y f una función, definidas todas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Decimos que la sucesión $\{f_n\}$ **converge en 1-contenido de Hausdorff** a f y lo denotamos por

$$\mathcal{H} \lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

si para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$m_1 \left(\{ z \in K : |(f_n - f)(z)| \geq \epsilon \} \right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

En [24] A. A. Gonchar demostró un lema sumamente útil para el estudio de la convergenceia de sucesiones de funciones meromorfas. Bajo ciertas condiciones, probó que para obtener la convergencia uniforme de este tipo de sucesiones basta comprobar que convergen en el sentido más débil de 1-contenido de Hausdorff. Para facilitar la lectura, enunciamos el resultado correspondiente sin demostración.

Lema 3.1 (Lema de Gonchar) *Supongamos que una sucesión de funciones $\{\phi_n\}, n \in \mathbb{N}$, converge en 1-contenido de Hausdorff a una función ϕ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Tenemos:*

1. *Si las funciones ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots$, son holomorfas en Ω, entonces la sucesión $\{\phi_n\}$ converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de Ω y, en consecuencia, la función ϕ es holomorfa en Ω.*

2. *Si cada una de las funciones ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots$, es meromorfa en Ω y tiene a lo más d $(< +\infty)$ polos en Ω, entonces la función límite es también meromorfa y tiene a lo más d polos en Ω.*

3. *Supongamos que cada función ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots$, es meromorfa en Ω y tiene a lo más d $(< +\infty)$ polos en Ω, y ϕ es meromorfa y tiene exáctamente d polos en Ω. Sean $z_1, \ldots, z_l$ los distintos polos de ϕ de multiplicidades $d_1, \ldots, d_l$ respectivamente. Entonces para cada $\nu, 1 \leq \nu \leq l$ y todo $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces ϕ_n tiene exactamente d_ν polos en el disco $\{z : |z - z_\nu| < \epsilon\}$. Además, la sucesión $\{\phi_n\}$ converge uniformemente a ϕ en cada subconjunto compacto de $\Omega' = \Omega \setminus \{z_\nu\}_1^l$.*

Cuando se cumple la propiedad de los ceros expresada en el apartado 3) de este resultado decimos que los polos de la sucesión $\{\phi_n\}$ convergen a los polos de ϕ teniendo en cuenta su multiplicidad. Haciendo uso del Lema de Gonchar y teniendo en cuenta las condiciones de normalidad fuerte obtenidas en el Capítulo 1, podremos hallar condiciones suficientes para la convergencia uniforme de los aproximantes multipuntuales Hermite-Padé de sistemas de Nikishin.

Otro modo de cuantificar el tamaño de un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ es a través de la capacidad logarítmica. Este concepto se puede introducir de varias maneras equivalentes. Un modo muy sencillo es como aparece en el capítulo 5 de [45]. Aquí hacemos un resumen.

Sea K un compacto del plano complejo $\mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{M}(K)$ al espacio de todas las medidas finitas de Borel μ soportadas en K ($\text{sop}(\mu) \subset K$). Denotamos $|\mu| = \mu(K)$, su variación total. Es fácil ver que

$$I(\mu) = \int\int \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(z) d\mu(\zeta) \geq |\mu|^2 \log \frac{1}{d},$$

donde $d = \text{máx}\{|z - x| : z, \zeta \in K\}$. La cantidad $I(\mu)$ recibe el nombre de **energía** asociada a μ. De la desigualdad anterior, se tiene que

$$I(K) = \inf_{|\mu|=1} \{I(\mu) : \mu \in \mathcal{M}(K)\} \geq \log \frac{1}{d} > -\infty.$$

Definición 3.1.3 Se llama **capacidad logarítmica** del compacto K a la cantidad

$$\text{cap}(K) = e^{-I(K)}.$$

Para un conjunto arbitrario $E \subset \mathbb{C}$ se define su capacidad logarítmica como

$$\text{cap}(E) = \sup\{\text{cap}(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Usualmente esta definición corresponde con la de capacidad logarítmica interior del conjunto E. A los efectos de nuestro trabajo nos basta con esta definición y por tanto para abreviar la llamaremos capacidad logarítmica ó simplemente capacidad. Hay conjuntos de capacidad logarítmica cero. Por ejemplo, si E está formado por una cantidad numerable de puntos, entonces toda medida de probabilidad en K tiene al menos un punto con masa; de lo contrario por la propiedad σ-aditiva, se tendría que $|\mu| = 0$. Es fácil ver que la energía asociada a una medida con al menos un punto de masa vale infinito; luego, todo conjunto numerable tiene capacidad logarítmica cero. Hay conjuntos no numerables de puntos de capacidad logarítmica cero; pero de la definición se deduce que la única medida con energía finita soportada en un conjunto de capacidad logarítmica cero es la medida cero. En particular se tiene que la capacidad logarítmica es una cuantificación del tamaño de conjuntos del plano complejo más gruesa que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ (la energía de la medida de Lebesgue restringida a un compacto cualquiera del plano complejo es finita). Es decir, hay conjuntos de medida de Lebesgue cero que no tienen capacidad logarítmica cero; sin embargo, los conjuntos de capacidad logarítmica nula tienen medida de Lebesgue nula.

Definición 3.1.4 Sea $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones y f una función, definidas todas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Decimos que la sucesión $\{f_n\}$ **converge en capacidad logarítmica** a f y lo denotamos por

$$\mathcal{C} \lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

si para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\operatorname{cap}\left(\{z \in K : |(f_n - f)(z)| \geq \epsilon\}\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

La capacidad logarítmica también cumple la propiedad de monotonía.

Proposición 3.2 *Sean E_1 y E_2 dos conjuntos del plano complejo, entonces*

i) $E_1 \subset E_2$ implica $cap(E_1) \leq cap(E_2)$.

Demostración: La afirmacion es inmediata a partir de la definición 3.1.3 ya que si $K_1 \subset K_2$ entonces el conjunto de las medidas de probabilidad soportadas en el compacto K_1 es más pequeño que el conjunto de las medidas de probabilidad soportadas en K_2 . □

Según el Teorema 3.13 del epígrafe 4 correspondiente al capítulo III de [35], el 1-contenido de Hausdorff de un conjunto se puede acotar superiormente por su capacidad logarítmica. En particular, los conjuntos cuya capacidad logarítmica es cero tienen 1-contenido de Hausdorff nulo. Otra consecuencia es que la convergencia en capacidad de una sucesión de funciones implica su convergencia en 1-contenido de Hausdorff. De aquí concluimos que el Lema de Gonchar permanece válido si en la suposición general se asume que $\mathcal{C} \lim_n \phi_n = \phi$ en lugar de $\mathcal{H} \lim_n \phi_n = \phi$.

3.2. Aproximación multipuntual Hermite-Padé.

Sea un sistema de Nikishin de medidas $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \cdots, \sigma_m)$, llamamos **sistema de funciones de Nikishin** correspondiente a S al vector $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots \widehat{s}_m)$, cuyas componentes son las funciones de Markov asociadas a cada una de las medidas s_i, $i = 1, \ldots, m$,. Esto es

$$\widehat{s}_i(z) = \int \frac{ds_i(x)}{z - x}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Las funciones $\widehat{s}_i$, $i = 1, \ldots, m$, son holomorfas en $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1$.

Fijemos un multi-índice $n = (n_1, \cdots, n_m)$. Sea α un polinomio mónico con coeficientes reales tal que $\deg \alpha = \kappa \le |n| + \text{mín}\{n_i\}$. Los ceros de α pertenecen a D. Existe entonces un vector de fracciones racionales $R = (P_1/Q, \cdots, P_m/Q)$ tal que, para cada $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} &i) \quad \deg Q \le |n|, \quad Q \not\equiv 0, \quad \deg P_i \le |n| - 1, \\ &ii) \quad \left[\frac{Q\widehat{s}_i - P_i}{\alpha}\right](z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_i+1}}\right) \in H(D), \quad z \to \infty. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Probar la existencia de R se reduce a resolver un sistema homogéneo de $(m+1)|n|$ ecuaciones lineales con $(m+1)|n| + 1$ incognitas, lo cual siempre tiene solución no trivial. Llamamos al vector de funciones racionales R, **aproximante multipuntual Hermite-Padé** (AMHP) de $\widehat{S}$ relativo a (n, α). Cuando $\alpha \equiv 1$ el aproximante multipuntual Hermite-Padé se reduce a un aproximante de Hermite-Padé clásico. Si $m = 1$ obtenemos el n_1-ésimo aproximante diagonal de Padé y su denominador es el polinomio ortogonal de grado n_1 con respecto a la medida s_1. Probaremos un resultado análogo para el denominador común Q de las componentes de un AMHP.

De la condicion $ii)$ de (3.2) tenemos

$$z^\nu \left[\frac{Q\widehat{s}_i - P_i}{\alpha}\right](z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \in H(D), \quad \nu = 0, \ldots, n_i - 1, \qquad i = 1, \ldots m. \tag{3.3}$$

Sea Γ una curva cerrada de índice 1 con respecto a todos sus puntos interiores, tal que todos los ceros de α estén en $\text{Ext}(\Gamma)$ y $\Delta_1 \subset \text{Int}(\Gamma)$. Por $\text{Int}(\Gamma)$ y $\text{Ext}(\Gamma)$ denotamos las componentes conexas acotada y no acotada, respectivamente, en que Γ divide al plano complejo. Integrando (3.3) sobre Γ y usando el Teorema de Cauchy, obtenemos para cada $i = 1, \ldots, m$

$$0 = \int_\Gamma z^\nu \left[\frac{Q\widehat{s}_i - P_i}{\alpha}\right](z)dz = \int_\Gamma z^\nu \frac{Q\widehat{s}_i}{\alpha}(z)dz, \qquad \nu = 0, \ldots, n_i - 1. \tag{3.4}$$

Tras sustituir $\widehat{s}_i$ por su expresión integral en (3.4), aplicar el Teorema de Fubini, y la fórmula integral de Cauchy, se sigue que para cada $i = 1, \ldots, m$

$$\int_{\Delta_1} x^\nu Q(x) \frac{ds_i(x)}{\alpha(x)} = \int_{\Delta_1} x^\nu Q(x) d\widetilde{s}_i(x) = 0, \quad \nu = 0, \ldots, n_i - 1, \tag{3.5}$$

donde

$$d\widetilde{s}_i = \frac{ds_i}{\alpha}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Obsérvese que $\widetilde{S} = (\widetilde{s}_1, \ldots, \widetilde{s}_m) = \mathcal{N}(\widetilde{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ es un sistema de Nikishin, donde $d\widetilde{\sigma}_1 = d\sigma_1/\alpha$.

De (3.5) tenemos que Q es solución del problema 2.1 y por tanto es un polinomio de ortogonalidad múltiple del sistema de medidas $\widetilde{S}$ relativo al multi-índice n. Las condiciones de normalidad fuerte relativas a un sistema de Nikishin S, enunciadas en las secciones 2.2 y 2.3, nos aseguran que para multi-índices adecuados las funciones componentes del correspondiente AMHP (el vector $R = (\frac{P_1}{Q}, \ldots, \frac{P_m}{Q})$), son holomorfas en $D = \mathbb{C} \setminus \Delta_1$. Para próximas secciones debemos recordar que $\widetilde{S}$ depende del multi-índice n ya que α, que depende de n, aparece en las medidas del sistema. Es lo que se conoce por un sistema de medidas variantes.

Para cada $i = 1, \ldots, m$, partiendo de (3.5) podemos deducir una expresión integral para ii). Dado un polinomio arbitrario h, $\deg h \leq n_i$, de acuerdo con (3.5), tenemos que

$$\int_{\Delta_1} \frac{h(z) - h(x)}{z - x} Q d\widetilde{s}_i(x) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$h(z) \int_{\Delta_1} \frac{Q(x)}{z - x} d\widetilde{s}_i(x) = \int_{\Delta_1} \frac{(Qh)(x)}{z - x} d\widetilde{s}_i(x), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{3.6}$$

Sea ahora la función holomorfa en $D = \mathbb{C} \setminus \Delta_1$

$$\widetilde{P}_i(z) = \int_{\Delta_1} \frac{Q(z)\alpha(x) - Q(x)\alpha(z)}{z - x} d\widetilde{s}_i(x)\,. \tag{3.7}$$

Reescrita convenientemente, nos percatamos de que $\widetilde{P}_i$ es un polinomio. En efecto,

$$\widetilde{P}_i = \int_{\Delta_1} \left[\frac{Q(z) - Q(x)}{z - x} \alpha(x) - \frac{\alpha(z) - \alpha(x)}{z - x} Q(x) \right] d\widetilde{s}_i(x). \tag{3.8}$$

Ahora, de (3.7) tenemos

$$\left[\frac{Q\widehat{s}_i - \widetilde{P}_i}{\alpha}\right](z) = \int_{\Delta_1} \frac{Q(x)}{z-x} d\widetilde{s}_i(x), \qquad i = 1, \cdots m. \tag{3.9}$$

Para cada $i = 1, \ldots, m$, tomando $h(z) = z^{n_i}$ en (3.6) y de (3.9), obtenemos

$$\left[\frac{Q\widehat{s}_i - \widetilde{P}_i}{\alpha}\right](z) = \frac{1}{z^{n_i}} \int \frac{Q(x)x^{n_i}}{z-x} d\widetilde{s}_i(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_i+1}}\right) \in H(D), \quad z \to \infty. \tag{3.10}$$

De (3.10) y la condición $ii)$ de (3.2) se sigue que

$$\left[\frac{P_i - \widetilde{P}_i}{\alpha}\right](z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_i+1}}\right) \in H(D), \quad z \to \infty \quad i = 1, \ldots m.$$

De aquí se tiene que $\deg \alpha > \deg(P_i - \widetilde{P}_i)$. En consecuencia, $(P_i - \widetilde{P}_i) \equiv 0$, ya que al ser holomorfa la función cociente, el polinomio del numerador se debe anular en todos los puntos donde se anula el denominador. Luego, $P_i \equiv \widetilde{P}_i$ y R queda unívocamente determinada por Q mediante la fórmula (3.7). Además, de (3.6) y (3.9) se sigue que

$$\left[\frac{Q\widehat{s}_i - P_i}{\alpha}\right](z) = \frac{1}{h(z)} \int \frac{(hQ)(x)}{z-x} d\widetilde{s}_i(x), \tag{3.11}$$

cualquiera sea el polinomio h tal que $\deg h \leq n_i$.

Definición 3.2.1 Sea $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$. Para cada $i = 1, \ldots, m$, definimos otro multi-índice asociado $n^i = (n_2^i, \ldots, n_m^i)$ cuyas $m-1$ componentes se definen del siguiente modo

$$n_j^i = \begin{cases} \min(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_i - 1), & \text{cuando} \quad j = 2, \ldots, i, \\ \\ \min(n_i, \ldots, n_j), & \text{cuando} \quad j = i+1, \ldots, m\,. \end{cases} \tag{3.12}$$

Denotamos $|n^i| = \sum_{j=2}^m n_j^i$.

Obsérvese que para cada $i = 1, \ldots, m$, $n^i \in \mathbb{Z}_+^{m-1}(*)$

Definición 3.2.2 Sean S un sistema de Nikishin y R un AMHP de S. Para cada $i = 1, \ldots, m$ decimos que

$$\Phi_i(z) = \left[\frac{Q\widehat{s}_i - P_i}{\alpha}\right](z) = \int_{\Delta_1} \frac{Q(x)}{z-x} d\widetilde{s}_i(x). \tag{3.13}$$

es la **i-ésima función resto** relativa a S y R

A cada función $\Phi_i, i = 1, \ldots, m$, le asociamos el sistema de Nikishin de $m-1$ medidas $S^i = (s_2^i, \ldots, s_m^i) = \mathcal{N}(\sigma_2^i, \ldots, \sigma_m^i)$ introducido en (2.8). Si $i = 1$, tomamos

$$S^1 = (s_2^1, \ldots, s_m^1) = (d\sigma_2, w_3^1 d\sigma_2, \ldots, w_m^1 d\sigma_2) = \mathcal{N}(\sigma_2, \ldots \sigma_m)\,.$$

Cuando $2 \leq i \leq m$, entonces

$$S^i = (s_2^i, \ldots, s_m^i) = (\tau_{2,i}, w_3^i d\tau_{2,i}, \ldots, w_m^i d\tau_{2,i}) =$$

$$\mathcal{N}(\tau_{2,i}, \widehat{s}_{2,i} d\tau_{3,i}, \ldots, \widehat{s}_{i-1,i} d\tau_{i,i}, \widehat{s}_{i,i} d\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \ldots, \sigma_m)\,.$$

Mantenemos la notación introducida anteriormente donde se entiende que $s_j^i = \langle \sigma_2^i, \ldots, \sigma_j^i \rangle, j = 2, \ldots, m$. Obsérvese que todas las medidas de dichos m sistemas de Nikishin tienen sus soportes contenidos en Δ_2.

Lema 3.2 *Sea un multi-índice $n = (n_1, \ldots, n_m)$. Para cada $i = 1, \ldots, m$ consideramos su asociado $n^i = (n_2^i, \ldots, n_m^i)$. Se cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad*

$$\int_{\Delta_2} (h_j \Phi_i)(x_2) ds_j^i(x_2) = 0 \quad j = 2, \ldots, m\,, \tag{3.14}$$

donde $\deg h_j < n_j^i$.

Demostración: Fijemos $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sustituimos la fórmula (3.13) en la parte izquierda de (3.14) y obtenemos

$$\int_{\Delta_2} (h_j \Phi_i)(x_2) ds_j^i(x_2) = \int_{\Delta_2} h_j(x_2) \int_{\Delta_1} \frac{Q(x_1)}{x_2 - x_1} d\widetilde{s}_i(x_1) ds_j^i(x_2).$$

La primera de las siguientes igualdades se deduce usando (3.6) y el hecho de que $\deg h_j < n_j^i \leq n_i$. En la segunda se aplica el Teorema de Fubini y la definición de $\widehat{s}_j^i$. Así

$$\int_{\Delta_2} h_j(x_2) \int_{\Delta_1} \frac{Q(x_1)}{x_2 - x_1} d\widetilde{s}_i(x_1) ds_j^i(x_2) = \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_1} \frac{(h_j Q)(x_1)}{x_2 - x_1} d\widetilde{s}_i(x_1) ds_j^i(x_2) =$$

$$= -\int_{\Delta_1} (h_j Q \widehat{s}_j^i)(x_1) d\widetilde{s}_i(x_1) \tag{3.15}$$

Demostremos primero la afirmación del lema para los casos en que $i+1 \leq j \leq m$. Si $i = m$, el conjunto de las j es vacío y no tenemos nada que probar. Supongamos que $i \leq m-1$. Usando (2.11) obtenemos

$$-\int_{\Delta_1} (h_j Q \widehat{s}_j^i)(x_1) d\widetilde{s}_i(x) = \int_{\Delta_1} (h_j Q)(x_1) \left(\frac{\widehat{s}_j^1(x_1)}{\widehat{s}_i^1(x_1)} - a_j \right) d\widetilde{s}_i(x_1) =$$

$$-a_j \int_{\Delta_1} (h_j Q)(x_1) d\widetilde{s}_i(x_1) + \int_{\Delta_1} (h_j Q \widehat{s}_j^1)(x_1) d\widetilde{\sigma}_1(x_1)\,.$$

En la última igualdad obtenemos la suma de dos términos. Por hipótesis $\deg h_j < n_i$. Teniendo en cuenta (3.5) deducimos que el primero de esos términos se anula. En el segundo término, tomando en cuenta que $\widehat{s}_j^1 d\widetilde{\sigma}_1 = d\widetilde{s}_j(t)$, llegamos a

$$\int_{\Delta_1} (h_j Q \widehat{s}_j^1)(x_1) d\widetilde{\sigma}_1(x_1) = \int_{\Delta_1} (h_j Q)(x_1) d\widetilde{s}_j(x_1).$$

Usando una vez más (3.5) y la hipótesis de que $\deg h_j < n_j$, tenemos que dicha integral también se anula con lo cual se concluye la demostración de los primeros casos.

Ahora analizamos los casos en que $j + 2 \leq i$. Usando repetidas veces la fórmula (2.10) descendiendo desde j hasta 2 y después la fórmula (2.9), obtenemos las igualdades

$$\widehat{s}_j^i = \frac{\widehat{s}_{j-1}^1}{\widehat{s}_i^1} - a_{j-1} - c_{j-1}\widehat{s}_{j-1}^i = \tag{3.16}$$

$$\frac{\widehat{s}_{j-1}^1}{\widehat{s}_i^1} - a_{j-1} - c_{j-1}\left(\frac{\widehat{s}_{j-2}^1}{\widehat{s}_i^1} - a_{j-2} - c_{j-2}\widehat{s}_{j-2}^1\right) = \cdots = \mathcal{L}_i + \frac{1}{\widehat{s}_i^1}\sum_{k=1}^{j-1} c_{k-1}\widehat{s}_k^1\,,$$

donde $\mathcal{L}_i$ denota un polinomio de grado uno, $\widehat{s}_1^i \equiv 1$, y $c_{k-1}, k = 2, \ldots, j-1$, son constantes. Notemos que

$$\frac{\widehat{s}_k^1 d\widetilde{s}_i}{\widehat{s}_i^1} = \widehat{s}_k^1 d\widetilde{\sigma}_1 = d\widetilde{s}_k\,, \qquad k = 1, \ldots, j-1\,. \tag{3.17}$$

Sustituyendo (3.16) en (3.15) y usando (3.17), tenemos

$$\int_{\Delta_1} (h_j Q)(x_1) d\widetilde{s}_i(x) =$$

$$= -\int_{\Delta_1} (h_j Q)(x_1)\mathcal{L}_i(x_1) d\widetilde{s}_i(x_1) - \sum_{k=1}^{j-1} c_{k-1} \int_{\Delta_1} (h_j Q)(x_1) d\widetilde{s}_k(t)\,.$$

Debido a (3.5) y a la hipótesis $\deg h_j \leq \text{mín}(n_1 - 1, \ldots, n_{j-1} - 1, n_i - 2)$, todas las integrales del segundo miembro de la igualdad anterior son iguales a cero. Con esto se concluye la demostración $\square$

Teorema 3.1 *Sea* $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ *un sistema de Nikishin y* $n = (n_1, \ldots, n_m)$ *un multi-índice. Para cada* $i = 1, \ldots, m$ *consideramos el multi-índice* n^i *asociado a* n*. Denotamos* $N^i = |n^i| + n_i$*. Entonces, para cada* $i = 1, \ldots, m$ *existe un polinomio mónico* W_i*,* $\deg W_i \geq |n^i|$*, cuyos ceros son simples y están en el interior de* $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_2))$*, tal que tienen lugar las fórmulas*

$$0 = \int x^\nu Q(x) \frac{ds_i(x)}{(\alpha W_i)(x)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, N^i - 1, \tag{3.18}$$

y

$$\left[\frac{Q\widehat{s}_i - P_i}{\alpha W_i}\right](z) = \frac{1}{q(z)} \int \frac{(qQ)(x)}{(\alpha W_i)(x)} \frac{ds_i(x)}{z - x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N^i+1}}\right) \in H(D), \tag{3.19}$$

donde q *es un polinomio arbitrario de grado* $\leq N^i$*.*

Demostración: Para cada $i = 1, \ldots, m$, probamos primero la igualdad

$$\left[\frac{Q\widehat{s}_i - P_i}{\alpha W_i}\right](z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N^i+1}}\right) \in H(D). \tag{3.20}$$

Demostrar la existencia del polinomio W_i es equivalente a probar que la función $\Phi_i(x) = [(Q\widehat{s}_i - P_i)/\alpha](x)$ cambia de signo a lo menos $|n^i|$ veces en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_2))$.

Consideremos el sistema de funciones $(\widehat{s}^i_{3,2}, \ldots, \widehat{s}^i_{3,m})$, donde $\widehat{s}^i_{3,2} = 1$ y para cada $j = 3, \ldots, m$, $\widehat{s}^i_{3,j}$ es la función de Markov correspondiente a la medida $s^i_{3,j} = \langle \sigma^i_3, \ldots, \sigma^i_j \rangle$. Observemos que $ds^i_j = \widehat{s}^i_{3,j} d\sigma^i_2$, $j = 2, \ldots, m$. Reescribimos con esta notación la igualdad (3.14) del Lema 3.2

$$\int_{\Delta_2} (h_j \widehat{s}^i_{3,j} \Phi_i)(x) d\sigma^i_2(x) = 0, \quad j = 2, \ldots, m,$$

donde para cada $j = 2, \ldots, m$, h_j es un polinomio arbitrario con grado $< n^i_j$. Luego

$$\int_{\Delta_2} (\mathcal{P}\Phi_i)(x) d\sigma^i_2(x) = 0, \tag{3.21}$$

con

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(h_2, \ldots, h_m, x) = \sum_{j=2}^{m} (h_j \widehat{s}^i_{3,j})(x), \qquad \deg h_j < n^i_j.$$

Supongamos que Φ_i cambia de signo N veces en el interior del intervalo Δ_2, con $N \leq |n^i| - 1$. Podemos seleccionar adecuadamente los polinomios h_j, $j = 2, \ldots, m$, para que la función $\mathcal{P}(h_2, \ldots, h_m, x)$ tenga un cero simple en cada uno de los puntos donde Φ_i cambia de signo en el interior de Δ_2 y tenga además un cero de multiplicicad $|n^i| - N - 1$ en uno de los extremos del intervalo Δ_2. Según el Teorema 2.1 se sabe que el sistema de funciones $(1, \widehat{s}^i_{3,3}, \ldots, \widehat{s}^i_{3,m})$ es un AT sistema en Δ_2. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ no puede tener más ceros en Δ_2 que los que le hemos asignado y $\mathcal{P}\Phi_i$ tiene signo constante en Δ_2. Esto está en contradicción con (3.21). Consecuentemente, Φ_i tiene al menos $|n^i|$ cambios de signo en el interior de Δ_2. Sea W_i el polinomio mónico cuyos ceros son los puntos donde Φ_i cambia de signo en el interior de Δ_2. De ii) en (3.2) y del hecho que $\deg W_i \geq |n^i|$ se tiene (3.20).

Ahora probamos (3.18). Sea Γ un contorno cerrado de índice 1 respecto a sus puntos interiores, tal que los ceros de α y Δ_2 estén en $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ y $\Delta_1 \subset \mathrm{Int}(\Gamma)$. De (3.20) y el Teorema de Cauchy se sigue que para cada $i = 1, \ldots, m$

$$0 = \int_\Gamma z^\nu \left[\frac{Q\widehat{s}_i - P_i}{\alpha W_i}\right](z) dz\,, \quad \nu = 0, \ldots, N^i - 1\,.$$

Sustituyendo $\widehat{s}_i$ por su expresión integral se obtiene

$$0 = \int_\Gamma z^\nu \left[\frac{Q}{\alpha W_i}\right](z) \int_{\Delta_2} \frac{ds_i(x)}{z-x} dz - \int_\Gamma z^\nu \left[\frac{P_i}{\alpha W_i}\right](z) dz\,, \quad \nu = 0, \ldots, N^i - 1\,.$$

En el segundo miembro, la última integral se anula, puesto que la función $P_i/(\alpha W_i)$ es holomorfa en $\mathrm{Int}(\Gamma)$. En la integral doble, aplicamos el Teorema de Fubini y la Fórmula Integral de Cauchy, y se llega a que

$$0 = \int x^\nu Q(x) \frac{d\widetilde{s}_i(x)}{W_i(x)}\,, \quad \nu = 0, 1, \ldots, N^i - 1\,,$$

que es exactamente la fórmula (3.18).

Queda demostrar aún que

$$\left[\frac{Q\widehat{s}_i - P_i}{\alpha W_i}\right](z) = \frac{1}{q(z)} \int \frac{(qQ)(x)}{W_i(x)} \frac{d\widetilde{s}_i(x)}{z-x}\,,$$

donde q es un polinomio de grado $\leq N^i$.

Sea q como se ha indicado. Partiendo de las relaciones de ortogonalidad (3.18), se tiene que

$$0 = \int_{\Delta_1} \frac{q(z) - q(x)}{z-x} Q(x) \frac{d\widetilde{s}_i(x)}{W_i(x)}.$$

Luego,

$$\int_{\Delta_1} \frac{Q(x)}{W_i(x)} \frac{d\widetilde{s}_i(x)}{z-x} = \frac{1}{q(z)} \int_{\Delta_1} \frac{(qQ)(x)}{W_i(x)} \frac{d\widetilde{s}_i(x)}{z-x}. \tag{3.22}$$

Definamos la función

$$\widehat{P}_i(z) = \int_{\Delta_1} \frac{Q(z)(\alpha W_i)(x) - Q(x)(\alpha W_i)(z)}{z-x} \frac{d\widetilde{s}_i(x)}{W_i(x)} \tag{3.23}$$

La función $\widehat{P}_i$ es un polinomio puesto que

$$\widehat{P}_i(z) = \int_{\Delta_1} \left[\frac{Q(z)-Q(x)}{z-x}(\alpha W_i)(x) - \frac{(\alpha W_i)(z) - (\alpha W_i)(x)}{z-x} Q(x) \right] \frac{d\widetilde{s}_i(x)}{W_i}.$$

Reordenando (3.23) y teniendo en cuenta (3.22) llegamos a

$$\left[\frac{Q\widehat{s}_i - \widehat{P}_i}{\alpha W_i} \right](z) = \int_{\Delta_1} \frac{Q(x)}{W_i(x)} \frac{d\widetilde{s}_i(x)}{z-x} =$$

$$\frac{1}{q(z)} \int_{\Delta_1} \frac{(qQ)(x)}{W_i(x)} \frac{d\widetilde{s}_i(x)}{z-x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N^i+1}}\right) \in H(D), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3.24}$$

Restando (3.24) y (3.20) tenemos que

$$\left[\frac{P_i - \widehat{P}_i}{\alpha W_i} \right](z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N^i+1}}\right) \in H(D), \quad i = 1, \ldots, m.$$

De aquí se sigue que $\deg(P_i - \widehat{P}_i) < \deg(\alpha W_i)$ y que el polinomio del numerador se anula en todos los ceros de αW_i contando multiplicidades. Por lo tanto, $P_i \equiv \widehat{P}_i$. Con esto, sustituyendo en (3.24) concluimos la demostración de este teorema. □

Sea $N = \max\{N^i : i = 1, \ldots, m\}$. El polinomio Q tiene al menos N cambios de signo en Δ_1. En efecto, sea s_i la medida tal que $N^i = N$. Sea q el polinomio cuyos ceros simples son aquellos puntos donde Q cambia de signo en Δ_1. Si $\deg q < N^i$, como Qq no cambia de signo en Δ_1 usando (3.18) tendríamos que

$$0 \neq \int (qQ)(x) \frac{ds_i(x)}{(\alpha W_i)(x)} = 0$$

lo cual es una contradicción. Luego, $\deg q \geq N^i = N$ que equivale a lo que habíamos afirmado.

De lo demostrado en el párrafo anterior tenemos que Q puede ser representado como el producto de dos polinomios mónicos

$$Q = Q_1 Q_2 \,, \qquad \deg Q_1 = \widetilde{N} \geq N \,,$$

los ceros $\{x_j\}$, $j = 1, \ldots, \widetilde{N}$, del polinomio Q_1 son simples y pertenecen al interior de Δ_1, el polinomio Q_2 no cambia de signo en Δ_1 y $\deg Q_2 \leq |n| - \widetilde{N}$.

Denotemos

$$Q_1(z) = \prod_{j=1}^{\widetilde{N}} (z - x_j), \quad d\mu_i = \frac{Q_2 ds_i}{\alpha W_i},$$

$$p_i = \int_{\Delta_1} \frac{Q_1(z) - Q_1(x)}{z - x} d\mu_i(x).$$

Lema 3.3 *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ fijo y todo polinomio $\mathcal{P}$, $\deg \mathcal{P} < \widetilde{N} + N^i$, tenemos*

$$\int_{\Delta_1} \mathcal{P}(x) d\mu_i(x) = \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} \lambda_j^i \mathcal{P}(x_j)\,, \tag{3.25}$$

donde

$$\lambda_j^i = \int_{\Delta_1} \frac{Q_1(x)}{Q_1'(x_j)} \frac{d\mu_i(x)}{x - x_j}. \tag{3.26}$$

Además, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ el número de coeficientes λ_j^i cuyo signo coincide con el de la medida μ_i es mayor o igual que $(\widetilde{N} + N^i)/2 \geq |n^i| + n_i$. Finalmente,

$$\frac{Q_2(z)(\widehat{s}_i - \frac{P_i}{Q})(z)}{(\alpha W_i)(z)} = \int_{\Delta_1} \frac{(Q_1 q)(x)}{(Q_1 q)(z)} \frac{d\mu_i(x)}{z - x} = \int_{\Delta_1} \frac{d\mu_i(x)}{z - x} - \frac{p_i(z)}{Q_1(z)}\,, \tag{3.27}$$

donde q es un polinomio arbitrario de grado $\leq N^i$ y

$$\frac{p_i(z)}{Q_1(z)} = \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} \frac{\lambda_j^i}{z - x_j}. \tag{3.28}$$

Demostración. En efecto, sea $\mathcal{L}$ el polinomio de Lagrange que interpola a $\mathcal{P}$ en los puntos x_j, $j = 1, \ldots, \widetilde{N}$. Tenemos entonces que

$$\mathcal{P} - \mathcal{L} = Q_1 \mathcal{P}_1, \quad \deg \mathcal{P}_1 < N^i.$$

Integrando con respecto a la medida $d\mu_i$ y usando (3.18) se llega a (3.25)-(3.26).

Probemos la afirmación respecto al signo de los λ_j^i. Tomemos

$$\mathcal{P}(z) = \prod^{+} (z - x_{n,j})^2,$$

donde $\prod^+$ denota el producto sobre todas las j para las cuales λ_j^i tiene igual signo que la medida μ_i. Si $\deg \mathcal{P} < \widetilde{N} + N^i$, entonces podemos sustituir $\mathcal{P}$ en (3.25), y obtenemos que

$$\int_{\Delta_1} \mathcal{P}(x) d\mu_i(x) = \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} \lambda_j^i \mathcal{P}(x_j)\,.$$

Como $\mathcal{P}$ es positivo en Δ_1, la integral del miembro izquierdo nos da una cantidad con igual signo que la medida μ_i. En el miembro derecho, todos los términos correspondientes a λ_j^i con igual signo que μ_i se anulan, luego esa suma da un valor de signo contrario al de la medida μ_i o es cero. Por lo tanto, $\deg \mathcal{P} \geq \widetilde{N} + N^i$ que equivale a lo que queríamos probar.

Para probar (3.27) haremos uso de (3.19). Teniendo en cuenta la notación introducida, podemos reescribir (3.19) como sigue

$$\frac{Q_2(z)(\hat{s}_i - \frac{P_i}{Q})(z)}{(\alpha W_i)(z)} = \int_{\Delta_1} \frac{(Q_1 q)(x)}{(Q_1 q)(z)} \frac{d\mu_i(x)}{z-x}\,,$$

donde q es un polinomio arbitrario tal que $\deg q \leq N^i$. En particular, para $q \equiv 1$ se sigue que

$$\frac{Q_2(z)(\hat{s}_i - \frac{P_i}{Q})(z)}{(\alpha W_i)(z)} = \int_{\Delta_1} \frac{(Q_1)(x)}{(Q_1)(z)} \frac{d\mu_i(x)}{z-x} \mp \int_{\Delta_1} \frac{d\mu_i(x)}{z-x} =$$
$$\int_{\Delta_1} \frac{d\mu_i(x)}{z-x} - \frac{p_i(z)}{Q_1(z)}\,.$$

Por lo tanto, (3.27) tiene lugar.

Por otro lado, como $p_i < \deg Q_1$ y los ceros de Q_1 son simples, usando (3.26) y la definición de p_i obtenemos que

$$\operatorname{res}\left(\frac{p_i}{Q_1}, x_j\right) = \lim_{z \to x_j} (z - x_j) \frac{p_i(z)}{Q_1(z)}$$
$$= \lim_{z \to x_j} \frac{z - x_j}{Q_1(z)} \int_{\Delta_1} \frac{Q_1(z) - Q_1(x)}{z - x} d\mu_i(x) = \lambda_j^i.$$

Luego, (3.28) se cumple y concluimos la demostración. □

3.3. Convergencia de AMHP.

En esta sección estudiaremos el límite de los AMHP correspondientes a una sucesión de multi-índices $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ y una sucesión de polinomios $\{\alpha_n\}, n \in$

Λ, con coeficientes reales cuyos ceros están contenidos en $D = \mathbb{C} \setminus \Delta_1$. Por lo tanto, en lo que sigue haremos explícita la dependencia de las expresiones que varían con $n \in \Lambda$. Por ejemplo, escribiremos α_n, Q_n, R_n y $W_{n,i}$ en lugar de α, Q, R y W_i, respectivamente. Reescribamos (3.27) y (3.28) tomando esto en cuenta. Se tiene

$$\frac{Q_{n,2}(z)(\widehat{s}_i - \frac{P_{n,i}}{Q_n})(z)}{(\alpha_n W_{n,i})(z)} = \int_{\Delta_1} \frac{(Q_{n,1}q)(x)}{(Q_{n,1}q)(z)} \frac{d\mu_{n,i}(x)}{z-x} = \int_{\Delta_1} \frac{d\mu_{n,i}(x)}{z-x} - \frac{p_{n,i}(z)}{Q_{n,1}(z)}, \tag{3.29}$$

donde q es un polinomio arbitrario de grado $\leq N_n^i = |n^i| + n_i$,

$$\frac{p_{n,i}(z)}{Q_{n,1}(z)} = \sum_{j=1}^{\deg Q_{n,1}} \frac{\lambda_{n,j}^i}{z - x_{n,j}} \qquad \text{y} \qquad d\mu_{n,i} = \frac{Q_{n,2} ds_i}{\alpha_n W_{n,i}} \tag{3.30}$$

Para cada $i = 1, \ldots m$ y $n \in \Lambda$ tomamos n^i como en la definición 3.2.1. Sea $F \subset D = \mathbb{C} \setminus \Delta_1, \Delta_1 = \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$, un conjunto compacto que contiene los ceros de todos los polinomios $\alpha_n, n \in \Lambda$.

Teorema 3.2 *Sean $S = (s_1, \ldots, s_m)$ un sistema de Nikishin y Λ una sucesión de multi-índices distintos dos a dos. Supongamos que existe un entero positivo c tal que para todo $n \in \Lambda$ e $i = 1, \ldots, m$, se tiene que*

$$n_i \geq \frac{|n|}{m} - c|n|^\kappa, \qquad \kappa < 1. \tag{3.31}$$

Entonces, sobre cada compacto $K \subset D = \mathbb{C} \setminus \Delta_1$ y cada $i = 1, \ldots, m$, se tiene que cualquiera sea $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \in \Lambda} \left(m_1(\{z \in K : |(\widehat{s}_i - R_{n,i})(z)| > \varepsilon\})\right)^{1/2|n|} \leq \delta_K < 1, \tag{3.32}$$

donde

$$\delta_K = \max\{|\varphi_t(z)| : z \in \gamma_K,\, t \in F \cup \Delta_2 \cup \{\infty\}\},$$

y $\varphi_t, t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1$, denota la representación conforme de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1$ en el disco unidad tal que $\varphi_t(t) = 0$ y $\varphi_t'(t) > 0$. En particular,

$$\mathcal{H} \lim_{n \in \Lambda} R_{n,i} = \widehat{s}_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

De hecho, (3.32) se cumple considerando la capacidad logarítmica de los conjuntos señalados en lugar de su contenido de Hausdorff. Si las fracciones racionales $R_{n,i}$ son holomorfas en D, del Lema 3.1, se deduce que la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de D. Por otra parte, si R_n

se define sobre una sucesión de multi-índices fuertemente normales, entonces se puede asegurar que sus componentes son funciones holomorfas en D pues todos los ceros de Q_n caen en el interior de Δ_1. Por lo tanto, de los Teoremas 2.2, 2.4 y 3.2, se obtiene el siguiente Teorema.

Teorema 3.3 *Con las hipótesis del Teorema (3.2), si $m \leq 3$ ó $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$, tenemos que para cada compacto $K \subset D$*

$$\limsup_{n \in \Lambda} \|\widehat{s}_i - R_{n,i}\|_K^{1/2|n|} \leq \delta_K < 1\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,.$$

Demostración del Teorema 3.2. Fijemos $i \in \{1, \ldots, m\}$. Denotemos

$$g_n(z) = \prod^{-}(z - x_{n,j})^2,$$

donde $\prod^-$ denota el producto sobre todas las j tales que $\lambda_{n,j}^i < 0$. Del Lema 3.3 y la hipótesis del teorema, tenemos que

$$\deg g_n \leq 2 \deg Q_{n,1} - \deg Q_{n,1} - |n^i| - n_i \leq (|n| - |n^i| - n_i) \leq cm|n|^\kappa\,.$$

También tenemos que

$$\deg Q_{n,2} \leq |n| - \deg Q_{n,1} \leq |n| - |n^i| - n_i \leq cm|n|^\kappa\,.$$

Sea $\widetilde{W}_n$ un polinomio mónico con coeficientes reales que divide a $\alpha_n W_{n,i}$, de grado lo suficientemente grande como para que al polinomio

$$p_n = \frac{g_n \alpha_n W_{n,i}}{\widetilde{W}_n}$$

sea aplicable la fórmula de cuadratura (3.25) con $\mathcal{P} = p_n$. O sea, queremos que

$$\deg p_n < \deg Q_{n,1} + |n^i| + n_i\,.$$

A la vez, deseamos que p_n sea de grado lo mayor posible. La conveniencia de esto se hará patente más adelante. Veamos que es suficiente tomar $\widetilde{W}_n$ de grado

$$\deg \widetilde{W}_n = 3cm|n|^\kappa + 1\,, \qquad \text{ó} \qquad \deg \widetilde{W}_n = 3cm|n|^\kappa + 2$$

según sea $3cm|n|^\kappa$ un número par o impar. (Esta disyuntiva en el grado es necesaria ya que queremos que $\widetilde{W}_n$ tenga sus coeficientes reales.) En efecto, teniendo en cuenta las estimaciones anteriores de grados y (3.31) se tiene

$$\deg p_n = \deg g_n + \deg \alpha_n + \deg W_{n,i} - \deg \widetilde{W}_n < cm|n|^\kappa + 2|n| - 3cm|n|^\kappa \leq$$

$$2m(\frac{|n|}{m} - c|n|^{\kappa}) \leq 2(|n^i| + n_i) \leq \deg Q_{n,1} + |n^i| + n_i$$

como queríamos probar.

Sea $M = 2\max\{\|z\|_{\Delta_1}, 1\}$. Denotemos por B_n el producto de todos los ceros de $Q_{n,2}$ de módulo mayor que M contando multiplicidades. Tales ceros pueden existir puesto que al no haberse exigido que n sea fuertemente normal pueden haber ceros de Q_n fuera del intervalo Δ_1 y a una distancia del mismo tan grande como se quiera. De acuerdo con la cota obtenida para el grado de $Q_{n,2}$, este polinomio tiene a lo sumo $cm|n|^{\kappa}$ ceros de módulo mayor que M.

Consideremos la función

$$K_n(x,z) = \frac{p_n(z) - p_n(x)}{(z-x)p_n(z)}\,.$$

Esta función es un polinomio en x de grado $< \deg Q_{n,1} + |n^i| + n_i$. Luego, a ella también es aplicable la fórmula de cuadratura (3.25) y

$$\frac{1}{z-x} - K_n(x,z) = \frac{p_n(x)}{(z-x)p_n(z)}\,.$$

Nuestro objetivo inmediato es obtener cotas adecuadas para las funciones

$$\Omega_n = \frac{g_n Q_{n,2}(\widehat{s}_i - R_{n,i})}{B_n \widetilde{W}_n}\,, \qquad n \in \Lambda\,,$$

en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \Delta_1$.

Teniendo en cuenta (3.25), (3.29), y (3.30), tenemos

$$\Omega_n(z) = \frac{(g_n\alpha_n W_{n,i})(z)}{B_n\widetilde{W}_n(z)}\left[\int_{\Delta_1}\frac{d\mu_{n,i}(x)}{z-x} - \frac{p_{n,i}(z)}{Q_{n,1}(z)}\right] =$$

$$\frac{(g_n\alpha_n W_{n,i})(z)}{B_n\widetilde{W}_n(z)}\left[\int_{\Delta_1}\left(\frac{1}{z-x} - K_n(x,z)\right)d\mu_{n,i}(x) - \right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{\deg Q_{n,1}}\lambda^i_{n,j}\left(\frac{1}{z-x_{n,j}} - K_n(x_{n,j},z)\right)\right] =$$

$$\frac{(g_n\alpha_n W_{n,i})(z)}{B_n\widetilde{W}_n(z)}\left[\int_{\Delta_1}\frac{p_n(x)}{(z-x)p_n(z)}d\mu_{n,i}(x) - \sum_{j=1}^{\deg Q_{n,1}}\lambda^i_{n,j}\frac{p_n(x_{n,j})}{(z-x_{n,j})p_n(z)}\right]$$

$$= \frac{1}{B_n}\left[\int_{\Delta_1}\frac{p_n(x)}{z-x}d\mu_{n,i}(x) - \sum_{j=1}^{\deg Q_{n,1}}\lambda^i_{n,j}\frac{p_n(x_{n,j})}{z-x_{n,j}}\right]$$

Sea $d(z,\Delta_1)$ la distancia de z al intervalo Δ_1. Usando una vez más (3.25) tenemos

$$\left|\sum_{j=1}^{\deg Q_{n,1}} \lambda_{n,j}^{i}\frac{p_n(x_{n,j})}{z-x_{n,j}}\right| \leq \frac{1}{d(z,\Delta_1)}\sum_{j=1}^{\deg Q_{n,1}} |\lambda_{n,j}^{i} p_n(x_{n,j})| =$$

$$\frac{1}{d(z,\Delta_1)}\left|\int p_n(x)d\mu_{n,i}(x)\right|.$$

Al aplicar la fórmula de cuadratura se ha empleado que todos los términos de la suma tienen igual signo (o son cero). Efectivamente, el polinomio p_n se anula en todos los términos en los cuales el signo de $\lambda_{n,j}^{i}$ difiere del signo de la medida, además $g_n \geq 0$ en Δ_1 mientras que $\alpha_n W_{n,i}/\widetilde{W}_n$ es un polinomio con coeficientes reales cuyos ceros estan fuera del intervalo Δ_1. Mediante razonamiento análogo se obtiene que

$$\left|\int \frac{p_n(x)}{z-x}d\mu_{n,i}(x)\right| \leq \frac{1}{d(z,\Delta_1)}\left|\int p_n(x)d\mu_{n,i}(x)\right|.$$

Por lo tanto,

$$|\Omega_n(z)| \leq \left|\frac{2}{B_n d(z,\Delta_1)}\int_{\Delta_1} p_n(x)d\mu_{n,i}(x)\right| =$$

$$\left|\frac{2}{B_n d(z,\Delta_1)}\right|\left|\int_{\Delta_1}(g_n Q_{n,2})(x)\frac{ds_i(x)}{\widetilde{W}_n(x)}\right| \leq \frac{2|s_i|}{d(z,\Delta_1)}\left\|\frac{g_n Q_{n,2}}{B_n \widetilde{W}_n}\right\|_{\Delta_1}. \qquad (3.33)$$

Acotemos $\|g_n Q_{n,2}/B_n\widetilde{W}_n\|_{\Delta_1}$. Analicemos cada factor por separado. Los ceros de g_n están en Δ_1, luego

$$\|g_n\|_{\Delta_1} \leq (2\|x\|_{\Delta_1})^{\deg g_n} \leq M^{cm|n|^{\kappa}}.$$

Los ceros de $\widetilde{W}_n$ caen en $\Delta_2 \cup F$. Sea $d = \min\{1, d(\Delta_1, \Delta_2\cup F)\}$. Obviamente, $d > 0$. Entonces

$$\left\|\frac{1}{\widetilde{W}_n}\right\|_{\Delta_1} \leq \left(\frac{1}{d}\right)^{\deg \widetilde{W}_n} \leq \left(\frac{M}{d}\right)^{4cm|n|^{\kappa}}.$$

Para acotar $Q_{n,2}/B_n$ consideramos sus ceros por separado. Sea ζ uno de los ceros de $Q_{n,2}$. Si $|\zeta| \leq M$, tenemos que

$$\|x-\zeta\|_{\Delta_1} \leq \|x\|_{\Delta_1} + |\zeta| \leq 2M.$$

Por otro lado, si $|\zeta| > M$, entre los factores de B_n esta ζ y

$$\left\|\frac{x-\zeta}{\zeta}\right\|_{\Delta_1} \leq 1 + |\zeta|^{-1}\|x\|_{\Delta_1} \leq 2M\,.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\frac{Q_{n,2}}{B_n}\right\|_{\Delta_1} \leq (2M)^{\deg Q_{n,2}} \leq M^{2cm|n|^\kappa}\,.$$

Resumiendo estas acotaciones se llega a que

$$\left\|\frac{g_n Q_{n,2}}{B_n \widetilde{W}_n}\right\|_{\Delta_1} \leq \left(\frac{M}{d}\right)^{4cm|n|^\kappa}\,.$$

Esto junto con (3.33) nos da

$$|\Omega_n(z)| \leq \frac{2|s_i|}{d(z,\Delta_1)}\left(\frac{M}{d}\right)^{4cm|n|^\kappa}\,, \qquad z \in D\,.$$

Esto nos dice que

$$\left[\frac{g_n Q_{n,2}(\widehat{s}_i - R_{n,i})}{B_n \widetilde{W}_n}\right](z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1)\,, \quad z \to \infty\,.$$

y sobre cada compacto $K \subset D = \mathbb{C} \setminus \Delta_1$ se tiene que

$$\left\|\frac{g_n Q_{n,2}(\widehat{s}_i - R_{n,i})}{B_n \widetilde{W}_n}\right\|_K \leq \frac{2|s_i|}{d(K,\Delta_1)}\left(\frac{M}{d}\right)^{4cm|n|^\kappa} \tag{3.34}$$

Sea φ_t la función definida en el enunciado del teorema. Sea $\gamma_\rho = \{z : |\varphi_\infty(z)| = \rho\}, 0 < \rho < 1$. De (3.34) se tiene que

$$\left\|\frac{B_n^{-1} g_n Q_{n,2}(\widehat{s}_i - R_{n,i})}{B_n \widetilde{W}_n}\right\|_{\gamma_\rho} \leq \frac{2|s_i|}{d(\gamma_\rho,\Delta_1)}\left(\frac{M}{d}\right)^{4cm|n|^\kappa}\,. \tag{3.35}$$

Fijemos un compacto $K \subset D$. Tomemos ρ lo suficientemente próximo a 1 de modo que $F \cup \Delta_2 \cup K \subset \mathrm{Ext}(\gamma_\rho)$. Sean $v_n = \deg(\alpha_n W_{n,i}/\widetilde{W}_n)$. Sea w_n el orden exacto del cero que Ω_n tiene en el infinito. Teniendo en cuenta que; $\deg(\alpha_n Q_{n,2}) \leq 2cm|n|^\kappa$, $\deg Q_{n,1} \geq |n^i| + n_i \geq |n| - cm|n|^\kappa$, $\deg \widetilde{W}_n \leq 4cm|n|^\kappa$ y $\deg W_{n,i} \geq (m-1)(\frac{|n|}{m} - c|n|^\kappa)$, de *ii*) en (3.2) se sigue que existe una constante $c' > 0$ tal que

$$2|n| - c'|n|^\kappa \leq w_n + v_n \leq 2|n|\,. \tag{3.36}$$

Sean $\{y_{n,1},\ldots,y_{n,v_n}\}$ el conjunto de los ceros del polinomio $(\alpha_n W_n/\widetilde{W}_n)$. Tenemos que

$$\frac{g_n Q_{n,2}(\widehat{s}_i - R_{n,i})}{B_n\widetilde{W}_n\varphi_\infty^{\omega_n}\prod_{j=1}^{v_n}\varphi_{y_{n,j}}} \in H(D)\,.$$

Definamos

$$\kappa(\gamma_\rho) = \text{ínf}\{|\varphi_t(z)| : z\in\gamma_\rho,\ t\in F\cup\Delta_1\cup\{\infty\}\} > 0\,.$$

Si consideramos $|\varphi_t(z)|$ como una función de las dos variables z y t, es fácil verificar su continuidad en $\overline{\mathbb{C}}^{\,2}$. Luego, $\kappa(\gamma_\rho)>0$ ya que $\gamma_\rho\cap(F\cup\infty)=\emptyset$ y dicha función sólo se anula cuando $z=t$.

De (3.35) se obtiene que

$$\left\|\frac{g_n Q_{n,2}(\widehat{s}_i - R_{n,i})}{B_n\widetilde{W}_n\varphi_\infty^{\omega_n}\prod_{j=1}^{v_n}\varphi_{y_{n,j}}}\right\|_{\gamma_\rho} \le \frac{2|s_i|}{d(\gamma_\rho,\Delta_1)\kappa(\gamma_\rho)^{w_n+v_n}}\left(\frac{M}{d}\right)^{4cm|n|^\kappa}\,.$$

Como $K\subset \operatorname{Ext}(\gamma_\rho)$, haciendo uso del Principio de Máximo para las funciones analíticas se tiene que esta desigualdad también es válida para todo $z\in K$. Por lo tanto

$$\left|\frac{g_n Q_{n,2}(\widehat{s}_i - R_{n,i})}{B_n\widetilde{W}_n}\right| \le$$

$$\frac{2|s_i|}{d(\gamma_\rho,\Delta_1)\kappa(\gamma_\rho)^{w_n+v_n}}\left(\frac{M}{d}\right)^{4cm|n|^\kappa}|\varphi_\infty^{\omega_n}(z)\prod_{j=1}^{v_n}\varphi_{y_{n,j}}(z)|\,,\qquad z\in K\,.$$

Sea ahora

$$\delta_K = \text{máx}\{|\varphi_t(z)| : z\in\gamma_K,\ t\in F\cup\Delta_1\cup\{\infty\}\} < 1\,.$$

De nuevo usando la continuidad de $|\varphi_t(z)|$ como a función de las dos variables z y t en $\overline{\mathbb{C}}^{\,2}$, se ve que $\delta_K<1$ pues solo vale 1 para $x\in\Delta_1$. De la definición de δ_K, la desigualdad anterior y (3.36) se obtiene que

$$\limsup_{n\in\Lambda}\left\|\frac{g_n Q_{n,2}(\widehat{s}_i - R_{n,i})}{B_n\widetilde{W}_n}\right\|_K^{1/2|n|} \le \frac{\delta_K}{\kappa(\gamma_\rho)}\,.$$

Haciendo ρ tender a 1 se tiene que κ_{γ_ρ} tiende a 1; por lo tanto, concluimos que

$$\limsup_{n\in\Lambda}\|\Omega_n\|_K^{1/2|n|} = \limsup_{n\in\Lambda}\left\|\frac{g_n Q_{n,2}(\widehat{s}_i - R_{n,i})}{B_n\widetilde{W}_n}\right\|_K^{1/2|n|} \le \delta_K < 1\,.$$

En particular, de aquí se desprende que para todo $\delta > 0$, todos los multiíndices en Λ, salvo a lo sumo una cantidad finita de ellos, cumplen

$$|\Omega_n(z)| = (\delta_K + \delta)^{2|n|}, \qquad z \in K. \tag{3.37}$$

Para concluir probemos ahora la tésis del teorema. Obsérvese que

$$\widehat{s}_i - R_{n,i} = \frac{B_n \widetilde{W}_n \Omega_n}{g_n Q_{n,2}}. \tag{3.38}$$

Sea $R = 2\max\{\|z\|_K, 1\}$. Denotemos por $Q_{n,R}$ el polinomio mónico cuyos ceros son los ceros de $Q_{n,2}$ de módulo $< R$. Propongámosno obtener una cota de $\|(B_n \widetilde{W}_n Q_{n,R})/(g_n Q_{n,2})\|_K$. Para ello analicemos los factores por separado.

Como los ceros de g_n están en Δ_1 es obvio que

$$\left\|\frac{1}{g_n}\right\|_K \leq \left(\frac{1}{d(K,\Delta_1)}\right)^{\deg g_n} \leq \left(\frac{1}{d_1}\right)^{cm|n|^\kappa},$$

donde $d_1 = \min\{d(K,\Delta_1), 1\}$. Los ceros de $\widetilde{W}_n$ descansan en $F \cup \Delta_2$, por ello

$$\|\widetilde{W}_n\|_K \leq (M(K, F\cup\Delta_2))^{\deg \widetilde{W}_n} \leq M_1^{4cm|n|^\kappa},$$

donde $M(K, F \cup \Delta_2) = \max\{|z - \zeta| : z \in K, \zeta \in F \cup \Delta_2\}$ y $M_1 = \max\{M(K, F \cup \Delta_2), 1\}$. Por otro lado, si ζ es un cero de $Q_{n,2}/Q_{n,R}$, como ζ es un factor de B_n, usando la desigualdad triangular tenemos que

$$\left|\frac{\zeta}{z-\zeta}\right| = \frac{1}{|1 - \frac{z}{\zeta}|} \leq \frac{1}{1 - |\frac{z}{\zeta}|} \leq 2 \leq R.$$

El resto de los factores de B_n tienen módulo menor que R. Por lo tanto,

$$\left\|\frac{B_n Q_{n,R}}{Q_{n,2}}\right\|_K \leq R^{cm|n|^\kappa}$$

En resumen

$$\left\|\frac{B_n \widetilde{W}_n Q_{n,R}}{g_n Q_{n,2}}\right\|_K \leq \left(\frac{RM_1}{d_1}\right)^{4cm|n|^\kappa}. \tag{3.39}$$

Sea $\delta > 0$ arbitrario tal que $\delta_K + \delta < 1$. Usando (3.37), (3.38) y (3.39) obtenemos que

$$|(\widehat{s}_i - R_{n,i})(z)| \leq \frac{(\delta_K + \delta)^{2|n|}}{|Q_{n,R}(z)|}\left(\frac{RM_1}{d_1}\right)^{4cm|n|^\kappa}, \qquad z \in K. \tag{3.40}$$

En caso de que exista una subsucesión infinita de multi-índices $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que $Q_{n,R} \equiv 1, n \in \Lambda'$, de la desigualdad anterior se obtiene que

$$\limsup_{n\in\Lambda'} \|\widehat{s}_i - R_{n,i}\|_K^{1/2|n|} \leq \delta_K + \delta\,.$$

Haciendo $\delta \to 0$ se sigue que

$$\limsup_{n\in\Lambda'} \|\widehat{s}_i - R_{n,i}\|_K^{1/2|n|} \leq \delta_K\,.$$

Este es el caso para toda la sucesión Λ si los multi–ídices son fuertemente normales como se pide en el Teorema 3.3. Por lo tanto, el Teorema 3.3 ya queda demostrado. En el caso general, si una tal subsucesión existe, para ella obtenemos convergencia uniforme que es más fuerte que la convergencia en contenido de Hausdorff. Luego, sin perdida de generalidad podemos suponer que $\deg Q_{n,R} \geq 1, n \in \Lambda$.

Fijemos $\varepsilon > 0$. De la desigualdad anterior resulta obvio que

$$\{z \in K : |(\widehat{s}_i - R_{n,i})(z)| > \epsilon\} \subset$$

$$\left\{z \in K : \frac{(\delta_K + \delta)^{2|n|}}{|Q_{n,R}(z)|}\left(\frac{RM_1}{d_1}\right)^{4cm|n|^\kappa} > \varepsilon\right\} =$$

$$\left\{z \in K : |Q_{n,R}(z)| < \frac{(\delta_K + \delta)^{2|n|}}{\varepsilon}\left(\frac{RM_1}{d_1}\right)^{4cm|n|^\kappa}\right\} \subset$$

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |Q_{n,R}(z)| < \frac{(\delta_K + \delta)^{2|n|}}{\varepsilon}\left(\frac{RM_1}{d_1}\right)^{4cm|n|^\kappa}\right\}.$$

De la monotonía del contenido de Hausdorff y (3.1) se deduce que

$$m_1(\{z \in K : |(\widehat{s}_i - R_{n,i})(z)| > \epsilon\}) \leq \left(\frac{(\delta_K + \delta)^{2|n|}}{\varepsilon}\left(\frac{RM_1}{d_1}\right)^{4cm|n|^\kappa}\right)^{1/\deg Q_{n,R}}$$

Como $1 \leq \deg Q_{n,2} \leq cm|n|^\kappa$ de esta desigualdad se obtiene que

$$\limsup_{n\in\Lambda} (m_1(\{z \in K : |(\widehat{s}_i - R_{n,i})(z)| > \varepsilon\}))^{1/2|n|} \leq \delta_K + \delta\,.$$

Haciendo $\delta \to 0$ se obtiene (3.32) como queríamos probar. □

Nota 3.1 Tomando $\kappa = 0$ en el Teorema 3.2, se obtiene el resultado principal de [9] (reducido al caso de medidas con soporte compacto). Así mismo, el Teorema 3.3 extiende el Corolario 1 del mismo trabajo. La condición (3.31) puede sustituirse por

$$n_i \geq \frac{|n|}{m} - o(|n|)\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,,$$

donde $o(|n|) \to 0$ cuando $|n| \to \infty$ y siguen siendo válidos el Teorema 3.2 y 3.3. Por último, queremos señalar que para el caso de medidas con soporte no acotado es posible obtener los mismos resultados con tal que $\mathrm{sop}(\sigma_1)$ sea compacto. Si $\mathrm{sop}(\sigma_1)$ es no acotado, también se pueden demostrar resultados análogos a los dados imponiendo cierta restricción tipo Carleman (ver (1.10)) sobre el crecimiento de los momentos de la medida σ_1.

Capítulo 4

Velocidad de convergencia.

4.1. Aproximación generalizada Hermite-Padé

Los aproximantes generalizados Hermite-Padé (AGHP), como se da a entender en el nombre, son una generalización de los AMHP. Sea $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = \mathcal{N}(\Sigma)$ un sistema de medidas de Nikishin y $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots \widehat{s}_m)$ el sistema de funciones de Nikishin asociado. Fijamos un multi-índice $n = (n_1 \cdots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, y un entero par κ. Denotamos $|n| = \sum_{i=1}^m n_i$. Sean α y β dos polinomios mónicos con coeficientes reales tales que $\deg \beta = \kappa$ y $\deg \alpha \leq |n| + \kappa + \text{mín}\{n_i\}$. Los ceros de α pertenecen a D y los ceros de β tienen multiplicidad par y se encuentran en $\Delta_1 = \text{Co}(\text{sop}(s_1))$. Existe al menos un vector de funciones $R = (P_1/\beta Q, \cdots, P_m/\beta Q)$, tal que para cada $i = 1, \ldots, m$ se tiene

$$
\begin{aligned}
&i) \quad \deg Q \leq |n|, \quad Q \not\equiv 0, \quad \deg P_i \leq |n| + \kappa - 1, \\
&ii) \quad \left[\frac{\beta Q \widehat{s}_i - P_i}{\alpha}\right](z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_i+1}}\right) \in H(D), \quad z \to \infty.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Razonando como en la Sección 3.2 es fácil ver que se cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\int x^\nu Q(x) \frac{\beta(x) ds_i(x)}{\alpha(x)} = 0, \quad \nu = 0, \ldots, n_i - 1, \tag{4.2}$$

y las fórmulas para el resto

$$\left[\widehat{s}_i - \frac{P_i}{\beta Q}\right](z) = \frac{\alpha(z)}{\beta(z) Q(z)} \int \frac{Q(x)\beta(x)}{\alpha(x)} \frac{ds_i(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1. \tag{4.3}$$

Encontrar un vector R es equivalente a resolver un sistema de $(m+1)|n| + m\kappa$ ecuaciones lineales homogéneas con $(m+1)|n| + m\kappa + 1$ incógnitas, lo cual siempre tiene solución no trivial. Llamamos al vector de funciones racionales R **aproximante generalizado Hermite-Padé** (AGHP) de $\widehat{S}$ relativo a (n, α, β). Obviamente cuando $\beta \equiv 1$ el aproximante generalizado se reduce a un aproximante multipuntal Hermite-Padé.

El objetivo de este capítulo es obtener estimaciones exactas de la velocidad de convergencia de los AGHP al sistema de funciones de Nikishin correspondiente, según n recorre un sistema de multi-índice Λ adecuado. Para ello seguimos el siguiente plan descrito en orden inverso a su presentación. En la Sección 4.5 se dan los resultados sobre orden de convergencia (ver Teorema 4.10 y Corolario 4.2). Para ello es importante estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión $\{Q_n\}$, $n \in \Lambda$, de los denominadores comunes. Esto se hace en la Sección 4.4 (ver Teorema 4.8). La técnica empleada es la teoría del potencial ajustada al problema tratado, que en este caso se traduce en el estudio de un problema de equilibrio vectorial en presencia de campo externo. Esta teoría se desarrolla en la Sección 4.3 (ver Teorema 4.7). También se emplean relaciones de ortogonalidad satisfechas por funciones de segundo tipo asociadas a sistemas de Nikishin que se obtienen en la Sección 4.2. En todo esto la normalidad de los multi-índices juega un papel crucial. La clase de los multi-índices de la cual extraemos la sucesión Λ vuelve a ser $\mathbb{Z}_+^m(*)$ para la cual los multi-índices siguen siendo fuertemente normales. De hecho en la Sección 4.2 damos una demostración alternativa de normalidad fuerte de los multiíndices en $\mathbb{Z}_+^m(*)$ en el contexto más general de los AGHP (aunque la demostración dada en la Sección 2.2 es fácil de adaptar).

4.2. Funciones de segundo tipo y ortogonalidad

Para los AGHP definimos unas funciones llamadas de segundo tipo: Ψ_i, $i = 1, \ldots, m$. $\Psi_0 = Q\beta/\alpha$ donde Q es el denominador común del AGHP. Sea $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$ y $S = \mathcal{N}(\Sigma)$ un sistema de Nikishin. Denotemos $n = n^0$ y $\Sigma = \Sigma^0$. De modo inductivo, construimos multi-índices $n^j \in \mathbb{Z}_+^{m-j}(*)$, vectores de medidas $\Sigma^j = (\sigma^j_{j+1}, \ldots, \sigma^j_m)$, y funciones de segundo tipo Ψ_j, $j = 1, \ldots, m-1$, como se describe a continuación.

Supongamos que $n^j = (n^j_{j+1}, \ldots, n^j_m), \Sigma^j = (\sigma^j_{j+1}, \ldots, \sigma^j_m)$, y Ψ_j ya han sido definidos, donde $0 \leq j \leq m-2$. Entonces,

$$n^{j+1} = (n^{j+1}_{j+2}, \ldots, n^{j+1}_m) \in \mathbb{Z}_+^{m-j-1}(*)$$

es el multi-índice que se obtiene al extraer la primera componente $n^j_{r_j}$ de n^j, que satisface

$$n^j_{r_j} = \max\{n^j_k : j+1 \leq k \leq m\}. \tag{4.4}$$

Por tanto,

$$n_{j+1}^j = n_{j+2}^{j+1}, \ldots, n_{r_j-1}^j = n_{r_j}^{j+1}, n_{r_j+1}^j = n_{r_j+1}^{j+1}, \ldots, n_m^j = n_m^{j+1}.$$

Cuando $r_j \geq j+2$, se tiene que

$$n_{r_j}^j > \text{máx}\{n_{j+1}^j, \ldots, n_{r_j-1}^j\}\,.$$

Como $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$ entonces

$$n_{j+2}^{j+1} \geq \cdots \geq n_{r_j}^{j+1},$$

de lo contrario $n^j \notin \mathbb{Z}_+^{m-j}(*)$. Escribimos

$$\Psi_{j+1}(z) = \int_{\Delta_{j+1}} \frac{\Psi_j(x)}{z-x} ds_{r_j}^j(x), \tag{4.5}$$

donde $s_{r_j}^j = \langle \sigma_{j+1}^j, \ldots, \sigma_{r_j}^j \rangle$ es la componente de $\mathcal{N}(\Sigma^j) = (s_{j+1}^j, \ldots, s_m^j) = S^j$ correspondiente al subíndice r_j. (Queremos señalar que en este capítulo, S^j no denota lo mismo que en el Capítulo 2.)

Antes de definir Σ^{j+1}, necesitamos introducir cierta notación. Para el sistema $\Sigma^j = (\sigma_{j+1}^j, \ldots, \sigma_m^j)$ definimos

$$s_{k,i}^j = \langle \sigma_k^j, \ldots, \sigma_i^j \rangle\,, \quad j+1 \leq k \leq i \leq m\,.$$

En particular, las medidas en $\mathcal{N}(\Sigma^j)$ son $s_i^j = s_{j+1,i}^j, j+1 \leq i \leq m$. Como se vio en (2.7) dada cualquier medida $s_{k,i}^j$ existe un polinomio de grado uno $\ell_{k,i}^j$ y una medida con signo constante $\tau_{k,i}^j$ tal que

$$\frac{1}{\widehat{s}_{k,i}^j(z)} = \ell_{k,i}^j(z) + \widehat{\tau}_{k,i}^j(z).$$

Supongamos que $r_j = j+1$, entonces

$$\Sigma^{j+1} = (\sigma_{j+2}^j, \ldots, \sigma_m^j) = (\sigma_{j+2}^{j+1}, \ldots, \sigma_m^{j+1})$$

es el vector de las $m-j-1$ medida que se obtienen quitándole a Σ^j su primera componente. Si $j+2 \leq r_j \leq m$, entonces

$$\Sigma^{j+1} = (\tau_{j+2,r_j}^j, \widehat{s}_{j+2,r_j}^j d\tau_{j+3,r_j}^j, \ldots, \widehat{s}_{r_j-1,r_j}^j d\tau_{r_j,r_j}^j, \widehat{s}_{r_j,r_j}^j d\sigma_{r_j+1}^j, \sigma_{r_j+2}^j, \ldots, \sigma_m^j).$$

Los dos resultados siguientes son análogos a las proposiciones 1-3 en [29]; pero sus demostraciones son técnicamente más complicadas.

Teorema 4.1 *Supongamos que* $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$. *Para cada* $j = 0, \ldots, m-1$, *tenemos que* Ψ_j *satisface las relaciones de ortogonalidad*

$$\int_{\Delta_{j+1}} x^\nu \Psi_j(x) ds_i^j(x) = 0, \qquad \nu = 0, \ldots, n_i^j - 1, \qquad i = j+1, \ldots, m. \quad (4.6)$$

Por tanto, podemos escribir,

$$\frac{\Psi_j(x)}{q_{j+1}(x)} = \psi_j(x) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j), \quad j = 1, \ldots m-1, \qquad (4.7)$$

donde q_{j+1} *es un polinomio mónico cuyos ceros son simples, están en el interior de* Δ_{j+1}, $\deg q_{j+1} \geq |n^j|$ *y* ψ_j *conserva el mismo signo en* Δ_{j+1} .

Demostración. Vamos a probar (4.6) por inducción en j. Para $j = 0$ las relaciones (4.6) coinciden con (4.2). Luego, para $j = 0$ se cumple el enunciado y si $m = 1$ hemos concluido la demostración. Supongamos que dichas relaciones son ciertas para algún valor fijo de $j, 0 \leq j \leq m-2, m \geq 2$, y probemos que

$$\int_{\Delta_{j+2}} x^\nu \Psi_{j+1}(x) ds_i^{j+1}(x) = 0, \qquad \nu = 0, \ldots, n_i^{j+1} - 1, \qquad i = j+2, \ldots, m. \quad (4.8)$$

Tomamos $i \in \{j+2, \ldots, m\}$ y $0 \leq \nu \leq n_i^{j+1} - 1$. Sustituyendo Ψ_{j+1} definido por (4.5) en el miembro izquierdo de (4.8), tenemos

$$\int_{\Delta_{j+2}} x^\nu \Psi_{j+1}(x) ds_i^{j+1}(x) = \int_{\Delta_{j+2}} x^\nu \int_{\Delta_{j+1}} \frac{\Psi_j(t)}{x-t} ds_{r_j}^j(t) ds_i^{j+1}(x) =$$

$$\int_{\Delta_{j+1}} \Psi_j(t) \int_{\Delta_{j+2}} \frac{x^\nu - t^\nu + t^\nu}{x-t} ds_i^{j+1}(x) ds_{r_j}^j(t) =$$

$$\int_{\Delta_{j+1}} p_\nu(t) \Psi_j(t) ds_{r_j}^j(t) - \int_{\Delta_{j+1}} t^\nu \Psi_j(t) \widehat{s}_i^{j+1}(t) ds_{r_j}^j(t) \,,$$

donde $\deg p_\nu \leq n_i^{j+1} - 2$. Teniendo en cuenta que $n_i^{j+1} - 2 \leq n_{r_j}^j - 1$ (véase la definición (4.4) de r_j) y la hipótesis de inducción, la primera de las dos últimas integrales es igual a cero. Por tanto,

$$\int_{\Delta_{j+2}} x^\nu \Psi_{j+1}(x) ds_i^{j+1}(x) = -\int_{\Delta_{j+1}} t^\nu \Psi_j(t) \widehat{s}_i^{j+1}(t) ds_{r_j}^j(t) \,. \qquad (4.9)$$

Si $r_j = j+1$ entonces $\Sigma^{j+1} = (\sigma_{j+2}^{j+1}, \ldots, \sigma_m^{j+1}) = (\sigma_{j+2}^j, \ldots, \sigma_m^j)$ y $n^{j+1} = (n_{j+2}^{j+1}, \ldots, n_m^{j+1}) = (n_{j+2}^j, \ldots, n_m^j)$. Entonces,

$$\widehat{s}_i^{j+1}(t) ds_{r_j}^j(t) = \langle \sigma_{j+1}^j, \langle \sigma_{j+2}^j, \ldots, \sigma_i^j \rangle \rangle = s_i^j \,.$$

Como en este caso $n_i^{j+1} = n_i^j$, el miembro derecho de (4.9) es igual a cero por hipótesis de inducción; con lo cual hemos probado lo que necesitabamos.

Supongamos que $r_j \geq j+2$. Reescribamos las relaciones del Lema 2.4 con la notación introducida en esta sección. Así tenemos

$$\frac{\widehat{s}^j_{j+2,i-1}}{\widehat{s}^j_{j+2,r_j}} = a_{i,j} + \widehat{s}^{j+1}_i + c_{i,j}\widehat{s}^{j+1}_{i-1}\,, \qquad j+3 \leq i \leq r_j\,, \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{\widehat{s}^j_{j+2,r_j}} = \ell_j + \widehat{s}^{j+1}_{j+2}\,, \tag{4.11}$$

y

$$\frac{\widehat{s}^j_{j+2,i}}{\widehat{s}^j_{j+2,r_j}} = a_{i,j} + \widehat{s}^{j+1}_i\,, \qquad r_j+1 \leq i \leq m\,, \tag{4.12}$$

donde $a_{i,j}, c_{i,j}$ son constantes y ℓ_j es un polinomio de grado uno.

Primero consideramos que $r_j + 1 \leq i \leq m$. Si $r_j = m$ este conjunto es vacío y no tenemos nada que demostrar. Supongamos que $j+2 \leq r_j \leq m-1$. Sustituyendo (4.12) en el miembro derecho de (4.9), obtenemos

$$\int_{\Delta_{j+2}} x^\nu \Psi_{j+1}(x) ds_i^{j+1}(x) = -\int_{\Delta_{j+1}} t^\nu \Psi_j(t) \left(\frac{\widehat{s}^j_{j+2,i}(t)}{\widehat{s}^j_{j+2,r_j}(t)} - a_{i,j}\right) ds^j_{r_j}(t) =$$

$$a_{i,j}\int_{\Delta_{j+1}} t^\nu \Psi_j(t) ds^j_{r_j}(t) - \int_{\Delta_{j+1}} t^\nu \Psi_j(t)\widehat{s}^j_{j+2,i}(t) d\sigma^j_{j+1}(t)\,.$$

Como $\widehat{s}^j_{j+2,i}(t)d\sigma^j_{j+1}(t) = ds^j_i(t)$ y $0 \leq \nu \leq n_i^{j+1} - 1 = n_i^j - 1 \leq n^j_{r_j} - 1$, por hipótesis de inducción las dos última integrales se hacen cero y obtenemos (4.8) para estos índices i.

Ahora, sea $j+2 \leq i \leq r_j$. Usando la notación introducida en esta sección la identidad (3.16) adopta la forma

$$\widehat{s}^{j+1}_i = \mathcal{L}_{i,j} + \frac{1}{\widehat{s}^j_{j+2,r_j}} \sum_{k=j+1}^{i-1} c_k \widehat{s}^j_{j+2,k}\,, \tag{4.13}$$

donde $\mathcal{L}_{i,j}$ denota un polinomio de grado uno, $\widehat{s}^j_{j+2,j+1} \equiv 1$, y $c_k, k = j+1, \ldots, i-1$, son constantes. Nótese que

$$\frac{\widehat{s}^j_{j+2,k} ds^j_{r_j}}{\widehat{s}^j_{j+2,r_j}} = \widehat{s}^j_{j+2,k} d\sigma^j_{j+1} = ds^j_k\,, \qquad k = j+1, \ldots, i-1\,. \tag{4.14}$$

Sustituyendo (4.13) en el miembro derecho de (4.9) y usando (5.14), tenemos

$$\int_{\Delta_{j+2}} x^\nu \Psi_{j+1}(x) ds_i^{j+1}(x) = -\int_{\Delta_{j+1}} t^\nu \mathcal{L}_{i,j}(t)\Psi_j(t) ds_{r_j}^j(t)$$

$$-\sum_{k=j+1}^{i-1}\int_{\Delta_{j+1}} t^\nu \Psi_j(t) ds_k^j(t)\,.$$

Como $\nu+1 \le n_i^{j+1} = n_{i-1}^j \le n_{i-1}^{j+1} = n_{i-2}^j \le \cdots \le n_{j+2}^{j+1} = n_{j+1}^j < n_{r_j}^j$ todas las integrales en el miembro derecho de esta igualdad son iguales a cero y llegamos a (4.8). Luego hemos terminado la inducción y se concluye que (4.6) tiene lugar.

Teniendo en cuenta (4.6)

$$\int_{\Delta_{j+1}} \Psi_j(x) \sum_{i=j+1}^{m} h_i(x)\widehat{s}_{j+2,i}^j(x) d\sigma_{j+1}^j(x) = 0\,, \tag{4.15}$$

donde $\widehat{s}_{j+2,j+1}^j(x) \equiv 1$ y $h_i, i = j+1,\ldots,m$, denotan polinomios tales que $\deg h_i \le n_i^j - 1$. Debido a que $n^j \in \mathbb{Z}_+^{m-j}(*)$, por el Teorema 2.1 el sistema de funciones $(\widehat{s}_{j+2,j+1}^j, \widehat{s}_{j+2,j+2}^j, \ldots, \widehat{s}_{j+2,m}^j)$ es un AT sistema en Δ_{j+1} con respecto a n^j y, por consecuencia, de (4.15) se sigue que Ψ_j tiene que tener en el interior de Δ_{j+1} (interior según la topología de $\mathbb{R}$) al menos $|n^j|$ cambios de signo. Como Ψ_j no es identicamente nula, tiene que tener un número finito de cambios de signo en el interior de Δ_{j+1}. Sea q_{j+1} el polinomio mónico cuyos ceros son los distintos puntos en el interior de Δ_{j+1} donde Ψ_j cambia de signo. Inmediatamente obtenemos de (4.7), que $\deg q_{j+1} \ge |n^j|$ y que ψ_j conserva el signo. □

Para completar la notación, escribimos

$$\Psi_m(z) = \int_{\Delta_m} \frac{\Psi_{m-1}(x)}{z-x} ds_m^{m-1}(x)\,.$$

Observemos que de acuerdo con (4.4), $r_{m-1} = m$. De (4.6) tenemos que

$$\int_{\Delta_{j+1}} \frac{h(z)-h(x)}{z-x}\Psi_j(x) ds_{r_j}^j(x) = 0,$$

donde h es un polinomio arbitrario tal que $\deg h \le n_{r_j}^j$, $j = 0,\ldots,m-1$. Usando (4.5) y la definición de Ψ_m escrita antes, esta última relación la podemos reescribir para cada $j = 0,\ldots,m-1$ del siguiente modo

$$\Psi_{j+1}(z) = \frac{1}{h(z)}\int_{\Delta_{j+1}} \Psi_j(x)\frac{h(x) ds_{r_j}^j(x)}{z-x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_{r_j}^j+1}}\right) \in H(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_{j+1}). \tag{4.16}$$

Teorema 4.2 *Supongamos que* $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$. *Para cada* $j = 0, \dots, m-1$

$$\int_{\Delta_{j+1}} x^\nu \Psi_j(x) \frac{ds_{r_j}^j(x)}{q_{j+2}(x)} = 0, \quad \nu = 0, \dots |n^j| - 1\,, \tag{4.17}$$

donde q_{j+2} *viene dado en (4.7),* $(q_{m+1} \equiv 1)$. *Por tanto,* $\deg q_{j+1} = |n^j|$, $j = 0, \dots, m-1$, $(q_1 = Q)$.

Demostración. De (4.6) y (4.16), se sigue que

$$\frac{\Psi_{j+1}}{q_{j+2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_{r_j}^j + \deg q_{j+2} + 1}}\right) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_{j+1}), \qquad j = 0, \dots m-1\,,$$

Luego, para cada $j = 0, \dots, m-1$, tenemos

$$z^\nu \frac{\Psi_{j+1}(z)}{q_{j+2}(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_{j+1}), \qquad \nu = 0, \dots, n_{r_j}^j + \deg q_{j+2} - 1\,.$$

Integrando a lo largo de un contorno cerrado Γ con índice 1 respecto a sus puntos interiores y que encierra a Δ_{j+1} tal que Δ_{j+2} queda en el exterior de Γ, usando el Teorema de Cauchy, la definición de Ψ_{j+1}, el Teorema de Fubini, y la fórmula integral de Cauchy, encontramos que para cada $\nu = 0, \dots, n_{r_j}^j + \deg q_{j+2} - 1$, con $j = 0, \dots, m-1$, tenemos

$$0 = \int_\Gamma z^\nu \frac{\Psi_{j+1}(z)}{q_{j+2}(z)} dz = \int_\Gamma \frac{z^\nu}{q_{j+2}(z)} \int_{\Delta_{j+1}} \frac{\Psi_j(x)}{z - x} ds_{r_j}^j(x) dz =$$

$$\int_{\Delta_{j+1}} \Psi_j(x) \int_\Gamma \frac{z^\nu}{q_{j+2}(z)} \frac{dz}{z-x} ds_{r_j}^j(x) = 2\pi i \int_{\Delta_{j+1}} x^\nu \Psi_j(x) \frac{ds_{r_j}^j(x)}{q_{j+2}(x)}\,. \tag{4.18}$$

Como $n_{r_j}^j + \deg q_{j+2} \geq n_{r_j}^j + |n^{j+1}| = |n^j|$, obtenemos (4.17).

Para probar la última afirmación del teorema, supongamos que para algún $j \in \{0, \dots, m-1\}$, tenemos que $\deg q_{j+2} > |n^{j+1}|$. De (4.18) se sigue que Ψ_j tiene al menos $|n^j| + 1$ cambios de signo en Δ_{j+1}. Esto significa que $\deg q_{j+1} > |n^j|$. Repitiendo el razonamiento para índices j cada vez más pequeños obtenemos que Ψ_0 tiene al menos $|n^0| + 1$ cambios de signo en Δ_1. Pero esto es imposible debido a que Ψ_0 puede cambiar de signo en Δ_1 solamente en los ceros de Q que son a lo sumo $|n^0|$ ya que $\deg Q \leq |n^0|$. Luego, para todo $j = 0, \dots, m-1$, se tiene que $\deg q_{j+1} = |n^j|$. En particular, $\deg Q = |n|$. Con esto concluimos la demostración. □

Nota 4.1 Obsérvese que $\mathbb{Z}_+^1 = \mathbb{Z}_+^1(*)$ y $\mathbb{Z}_+^2 = \mathbb{Z}_+^2(*)$. Para $m = 3$ los únicos índices que no están en $\mathbb{Z}_+^3(*)$ son los que son estríctamente crecientes ($n_1 < n_2 < n_3$). Para dichos índices es también posible probar teoremas análogos a los Teorema 2 y 3 usando el tipo de tranformaciónes empleadas en la sección 2.3 en la demostración de la normalidad fuerte de dichos multi–índices.

4.3. Problema vectorial de equilibrio en presencia de campo externo.

En esta sección estudiaremos la solución de un problema vectorial de equilibrio del potencial logarítmico en presencia de campo externo. El campo externo estará formado por un vector de funciones semicontinuas inferiores.

Definición 4.3.1 Una aplicación $u : \mathbb{E} \to (-\infty, +\infty]$ es semicontinua inferiormente en x_0, elemento de un espacio topológico $\mathbb{E}$, si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad $\mathcal{V}(x_0)$ de x_0 tal que

$$u(x) > u(x_0) - \epsilon, \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{V}(x_0).$$

Abreviadamente escribimos

$$\liminf_{x \to x_0} u(x) \geq u(x_0).$$

Decimos que u es semicontinua inferiormente en $\mathbb{E}$ si lo es para cada punto de $\mathbb{E}$.

A una aplicación u se le dice semicontinua superiormente si $-u$ es semicontinua inferiormente. Obviamente, u es continua si es a la vez semicontinua inferiormente y superiormente. La siguiente proposición, que escribimos sin demostración, nos será útil más adelante. Una prueba de la misma puede deducirse fácilmente siguiendo el esquema de demostración del Teorema 2.1.3 del epígrafe 2.1 del Capítulo 2 en [45], hecha para funciones semicontinuas superiormente.

Proposición 4.1 *Sea u una aplicación semicontinua inferiormente en un espacio métrio $(\mathbb{E}, d)$. Supongamos que u está acotada inferiormente en $\mathbb{E}$. Entonces existen aplicaciones continuas $u_n : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ uniformemente acotadas inferiormente, tales que $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u$ y en cada punto $x_0 \in \mathbb{E}$ se tiene la convergencia*

$$u(x_0) = \lim_{n \to \infty} u_n(x_0).$$

Otro concepto que usaremos en esta sección es el de función subarmónica, el cual podemos encontrar en la Definición 2.2.1 de [45]. Por comodidad en la lectura la reproduciremos aquí. También enunciaremos sin demostración el principio del máximo. Una demostración del mismo puede encontrarse en el epígrafe 2.3 de [45].

Definición 4.3.2 Sea U un abierto de $\mathbb{C}$. Una función $u : U \to [-\infty, \infty)$ es subarmónica si es semicontinua superiormente y dado $w \in U$, existe un $\rho > 0$ tal que

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u[w + r\exp(it)]dt \quad 0 \leq r \leq \rho.$$

Se dice que una función $v : U \to (-\infty, \infty]$ es suprarmónica, si $-v$ es subarmónica.

Teorema 4.3 (Principio del Máximo) *Sea u una función subarmónica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$.*

a Si u alcanza el máximo global en D, entonces u es constante.

b Si $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq 0$ para toda $\zeta \in \partial D$, entonces $u \leq 0$ en D.

Un resumen de las propiedades y resultados sobre teoría de potencial que usaremos en este capítulo pueden encontrarlo en el Apéndice de [51]. Aquí aparecen sin demostración. Un libro, relativamente reciente, que desarrolla de una manera muy comprensible y rigurosa la teoría del potencial logarítmico, y cubre toda la teoría básica que emplearemos, es el [45]. Para no extendernos excesivamente en el material básico del cual haremos uso, a lo largo de las demostraciones citaremos alguna de las posibles fuentes donde pueden consultar la demostración del resultado auxiliar del cual se hace uso. Como siempre pueden recurrir a [45]. Nosotros intentaremos muchas veces referir otras fuentes alternativas.

Definición 4.3.3 Llamamos datos iniciales a (Δ, θ, A, f) si se cumple:

1. $\Delta = (\Delta_1, \cdots, \Delta_m)$ es una familia de m intervalos cerrados de la recta real (ninguno de los cuales se reduce a un punto) donde $m \in \mathbb{N}$;

2. $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}_+^m$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, y denotamos $|\theta| = \sum_{i=1}^m \theta_i$;

3. $A = ||a_{i,j}||$, es una matriz $(m \times m)$ simétrica, definida positiva, cuyos elementos son números reales, tales que si $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$, entonces $a_{i,j} \geq 0$;

4. $f = (f_1, \cdots, f_m)$, donde cada $f_i, i = 1, \cdots m$, es una función real, semicontinua inferiormente en Δ_i.

Sea σ una medida positiva finita y de Borel, de soporte $(\text{sop}(\sigma))$ compacto contenido en $\mathbb{R}$; denotamos por $|\sigma|$ a su variación total. Para cada $i = 1, \cdots m$, $\mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)$ es el conjunto de todas las medidas positivas de Borel

σ tales que $\mathrm{sop}(\sigma) \subset \Delta_i$ y $|\sigma| = \theta_i$. Por $\mathcal{M}_\theta(\Delta)$ denotamos al espacio producto

$$\mathcal{M}_\theta(\Delta) = \prod_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)\,.$$

Definición 4.3.4 Sea $\epsilon > 0$, llamamos ϵ-vecindad de cero de $\mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)$, en el sentido estrella débil al conjunto

$$\left\{\sigma \in \mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i) : \left|\int_\Delta g d\sigma\right| < \epsilon, \quad \forall g \in \mathcal{C}(\Delta_i)\right\},$$

donde $\mathcal{C}(\Delta_i)$ representa el conjunto de todas las funciones continuas en Δ_i. Los abiertos generados por dicho sistema de ϵ-vecindades conforman la topología débil estrella. En $\mathcal{M}_\theta(\Delta)$ consideramos la topología producto inducida, tomando en cada $\mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)$ la topología estrella débil correspondiente.

La convergencia relacionada con la topología estrella débil la llamamos convergencia estrella débil. Sea una sucesión $\{\mu^n = (\mu_1^n, \ldots, \mu_m^n) : \mu^n \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ que converge en el sentido estrella débil a una medida vectorial $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$, denotamos entonces

$$* \lim_{n\to\infty} \mu^n = \mu.$$

Obviamente, esto tiene lugar si y sólo si

$$* \lim_{n\to\infty} \mu_i^n = \mu_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

En el Teorema 0.6 de [35], se asevera que el conjunto $\mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)$ es compacto estrella débil; es decir, que cualquier subconjunto infinito de $\mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)$ contiene una subsucesión que converge en el sentido estrella débil a una medida de $\mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)$. Como hemos tomado en $\mathcal{M}_\theta(\Delta)$ la topología producto estrella débil, lo mismo se puede decir de $\mathcal{M}_\theta(\Delta)$.

Dado $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$ definimos la función vectorial

$$W^\mu(z) = (V^{A\mu} + f)(z) = \int \ln \frac{1}{|z-x|} dA\mu(x) + f(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

La i-ésima componente de W^μ viene dada por

$$W_i^\mu = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} V^{\mu_j} + f_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

donde V^{μ_j} es el potencial logarítmico de la medida μ_j

$$V^{\mu_j}(z) = \int \ln \frac{1}{|z-x|} d\mu_j(x), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Cualquiera sea una medida σ finita y de Borel, V^σ es una función suprarmónica en $\mathbb{C}$ y armónica en $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sop}(\sigma)$. Una prueba de esta afirmación puede encontrarse en el Teorema 3.1.2 de [45]. También se cumplen los siguientes principios que aparecen enunciados en el apéndice de [51].

Teorema 4.4 (Principio de continuidad de los potenciales) *Sea V^σ continua en $z_0 \in \mathrm{sop}(\sigma)$ como función de $\mathrm{sop}(\sigma)$. Entonces es continua en z_0 como función de $\mathbb{C}$*

Teorema 4.5 (Principio del máximo para potenciales) *Supongamos que*

$$\sup_{z\in \mathrm{sop}(\sigma)} V^\sigma(z) \leq M \quad \textit{entonces} \quad \sup_{z\in\mathbb{C}} V^\sigma(z) \leq M$$

Teorema 4.6 (Principio del descenso) *Supongamos una medida σ y una sucesión de medidas $\{\sigma_k\}_{k=1}^\infty$ todas con soporte compacto en $\mathbb{C}$, tales que se cumple*

$$* \lim_{k\to\infty} \sigma_k = \sigma.$$

Entonces

$$V^\sigma(z) \leq \liminf_{k\to\infty} V^{\sigma_k}(z)$$

localmente uniforme en $\mathbb{C}$.

Para probar estos principios se pueden seguir los esquemas de demostración de los Teoremas 1.7, 1.6 y 1.3, respectivamanete, correspondientes al epígrafe 3 del Capítulo I en [35].

Volviendo a las medidas vectoriales, definimos ahora la energía mutua de dos medidas vectoriales $\mu^1, \mu^2 \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$ en presencia de f mediante

$$J(\mu^1,\mu^2) = \sum_{i,j=1}^m \int\int \left[a_{i,j} \ln \frac{1}{|z-x|} + \frac{f_i(z)+f_j(x)}{|\theta|} \right] d\mu_i^1(z) d\mu_j^2(x). \quad (4.19)$$

La energía de la medida vectorial $\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$ se escribe del siguiente modo:

$$J(\mu) = (A\mu,\mu) + 2\int f d\mu = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j} I(\mu_i,\mu_j) + 2\sum_{i=1}^m \int f_i(x) d\mu_i(x), \quad (4.20)$$

donde

$$I(\mu_i, \mu_j) = \int\int \ln \frac{1}{|z-x|} d\mu_i(z) d\mu_j(x). \tag{4.21}$$

Observemos que si $\mu_i \equiv \mu_j$ entonces (4.21) coincide con el conceto de energía para una medida escalar introducido en la Sección 3.1.

Podemos reescribir las fórmulas (4.19) y (4.20) como sigue:

$$J(\mu^1, \mu^2) = \int W^{\mu^2}(z) d\mu^1(z) + \int f(x) d\mu^2(x). \tag{4.22}$$

y

$$J(\mu) = \int (W^{\mu} + f)(z) d\mu(z), \tag{4.23}$$

donde

$$\int W^{\mu^2}(z) d\mu^1(z) = \sum_{i=1}^{m} \int W_i^{\mu^2}(z) d\mu_i^1(z)\,,$$

y

$$\int f(x) d\mu^2(x) = \sum_{j=1}^{m} \int f_j(x) d\mu_j^2(x)\,.$$

Estos conceptos pueden ser interpretados en términos electrostáticos. Δ es un sistema de conductores donde sobre cada conductor Δ_i actúa un campo externo f_i, $i = 1, \cdots m$. El vector θ caracteriza cuánta carga hay en cada conductor. La medida $\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$ describe la distribución de tales cargas. El elemento $a_{i,j}$ de la matriz A representa la ley de interacción entre los conductores Δ_i, Δ_j, $i, j = 1, \ldots, m$.

Para cada $\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$, definimos

$$w_i^{\mu} = \min_{x \in \Delta_i} W_i^{\mu}(x), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

En lo que sigue supondremos que f es tal que existe $\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$ con $I(\mu_i, \mu_i) < +\infty\,, i = 1, \ldots, m$, y

$$\int f(x) d\mu(x) < +\infty\,. \tag{4.24}$$

Teorema 4.7 *Cada uno de los siguientes problemas* $(1) - (3)$ *tienen una solución única* $\overline{\mu} \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$*, y es la misma para todos.*

1. $J(\overline{\mu}) = \min_{\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)} J(\mu)\,,$

2. $W_i^{\overline{\mu}}(x) = w_i^{\overline{\mu}}, \qquad x \in \operatorname{sop}(\overline{\mu}_i), \qquad i = 1, \ldots, m\,,$

3. $\max_{\mu \in \mathcal{M}^i(\overline{\mu})} w_i^{\mu} = w_i^{\overline{\mu}}, \qquad i = 1, \ldots, m\,,$

donde

$$\mathcal{M}^i(\overline{\mu}) = \{\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta) : \mu_j = \overline{\mu}_j,\, j = 1, \ldots, m,\, j \neq i\}\,.$$

La medida $\overline{\mu} = \overline{\mu}(\Delta, \theta, A, f)$ se conoce como medida extremal ó de equilibrio respecto a los datos iniciales (Δ, θ, A, f). En las aplicaciones la segunda afirmación es la más importante. Esta parte puede ser escrita como sigue: existe una única medida $\overline{\mu} \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$ y ciertas constantes w_i tales que $W_i^{\overline{\mu}}(x) = w_i$ en $\operatorname{sop}(\overline{\mu}_i)$ y $W_i^{\overline{\mu}}(x) \geq w_i$ en Δ_i, $i = 1, \ldots, m$. El Teorema 4.7 es una extensión al caso vectorial de un resultado conocido que consiste en la existencia de una medida de equilibrio en presencia de campo externo. El caso vectorial sin campo externo ha sido tratado en [26] y [44]. Nuestra demostración para el caso general sigue el esquema propuesto en [44], y puede ser extendida al caso de compactos regulares del plano complejo (no necesariamente intervalos del eje real).

Tiene interés particular el caso escalar $(m = 1)$ el cual exponemos en forma de corolario, ya que formalmente es consecuencia del Teorema 4.7; aunque lo usaremos en su demostración. Aquí $\Delta = \Delta_1, \theta > 0, A = a > 0, f$ es una función semicontinua inferiormente en Δ, $W^\mu = aV^\mu + f$, y $w^\mu = \min_{x \in \Delta} W^\mu(x)$.

Corolario 4.1 *Cada uno de los siguientes problemas* $(1') - (3')$ *tiene una única solución* $\overline{\mu} \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$*; además, es la misma para todos ellos.*

(1') $J(\overline{\mu}) = \min_{\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)} J(\mu)\,,$

(2') $aV^{\overline{\mu}} + f = w^{\overline{\mu}}, \qquad x \in \operatorname{sop}(\overline{\mu})\,,$

(3') $\max_{\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)} w^\mu = w^{\overline{\mu}}\,.$

Antes de probar el Teorema 4.7 necesitamos algunos resultados auxiliares.

Lema 4.1 *Los funcionales (4.19) y (4.20) son semicontinuos inferiormente en la topología débil estrella de* $\mathcal{M}_\theta(\Delta)$.

Demostración. Es suficiente probar que la energía mutua es semicontinua inferiormente, ya que $J(\mu) = J(\mu, \mu)$.

Las componentes de f son funciones semicontinuas inferiormente. Probemos que cada f_i define un funcional semicontinuo inferiormente en $\mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)$ respectivamente. Fijamos $i \in \{1, \ldots m\}$. Debido a la Proposición 4.1, existe una sucesión $\{g_{i,n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, de funciones continuas en Δ_i tales que $g_{i,n}(x) \leq g_{i,n+1}(x) \leq f_i(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n \to \infty} g_{i,n}(x) = f_i(x). \tag{4.25}$$

La acotación inferior de f_i está garantizada pues toda función semicontinua inferiormente en un compacto, como lo es Δ_i, alcanza su valor mínimo en dicho compacto (ver Teorema 2.1.2 de [45]).

Sea $\{\mu_{i,k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, una sucesión de medidas en $\mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)$ tal que

$$* \lim_{k\to\infty} \mu_{i,k} = \mu_i \in \mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i).$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo

$$\int g_{i,n}(x)d\mu_i(x) = \lim_{k\to\infty} \int g_{i,n}(x)d\mu_{i,k}(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_i(x)d\mu_{i,k}(x).$$

Por el Teorema de Lebesgue de la convergencia monótona y (4.25) concluimos que

$$\int f_i(x)d\mu_i(x) = \lim_{n\to\infty} \int g_{i,n}d\mu_i(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_i(x)d\mu_{i,k}(x)$$

con lo cual queda probado que f_i define un funcional semicontinuo inferirormente en $\mathcal{M}_{\theta_i}(\Delta_i)$. Luego la aplicación que a cada $\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$ le hace corresponder $\int f(x)d\mu(x)$ define un funcional semicontinuo inferiormente en $\mathcal{M}_\theta(\Delta)$.

Probemos ahora la semicontinuidad inferior de la suma $\sum_{i,j=1}^m a_{i,j} I(\mu_i^1, \mu_j^2)$. Separemos la suma en dos. $\sum_1$ contiene todos los términos para los cuales $a_{i,j} \geq 0$, y $\sum_2$ el resto, donde se tiene $a_{i,j} < 0$. Por el Teorema 2.1 página 168 en [44] cada término de la primera suma es semicontinuo inferiormente y, por tanto, lo es $\sum_1$. En la segunda suma todos los términos son continuos porque la matriz A la hemos escogido de tal modo que si $a_{i,j} < 0$ entonces $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, y por tanto el núcleo logarítmico es continuo en el conjunto compacto $\Delta_i \times \Delta_j$. □

Consideremos el siguiente problema. Encontrar

$$J(\overline{\mu}) = w = \inf\{J(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)\}$$

y la medida extremal $\overline{\mu}$ para la cual el ínfimo se alcanza.

En el epígrafe 4 del capítulo II de [35] se expone una lista de compactos del plano complejo con los correspondientes valores de capacidad logarítmica (ver Definición 3.1.3). En dicha lista se puede ver que la capacidad logarítmica de un intervalo de longitud a es $a/4$. Por tanto si los intervalos $\Delta_i, i = 1, \ldots, m$, no se reducen a puntos la capacidad logarítmica de ellos es mayor que cero. Luego, existen medidas vectoriales $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m,)$ cuyas componentes tienen energía finita

$$I(\mu_i) = I(\mu_i, \mu_i) = \int\int \ln \frac{1}{|z-x|} d\mu_i(z)d\mu_i(x) < +\infty\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,.$$

Hemos supuesto que la función vectorial f, es tal que para alguna de estas medidas con energía finita, se cumple que $\int f d\mu < +\infty$. Por tanto,

$$w = \text{ínf}\{J(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)\} = \text{ínf}\{J(\mu) : \mu \in \mathcal{M}^*_\theta(\Delta)\} < +\infty\,,$$

donde

$$\mathcal{M}^*_\theta(\Delta) = \{\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta) : I(\mu_i) < \infty, i = 1, \ldots, m\}\,.$$

Sea

$$\mathcal{M}^*(\Delta) = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}^m_+} \mathcal{M}^*_\theta(\Delta)$$

Lema 4.2 *La medida extremal $\overline{\mu}$ en $\mathcal{M}^*_\theta(\Delta)$ existe y es única. Además, es la única medida vectorial que satisface la desigualdad*

$$\int W^{\overline{\mu}} d(\mu - \overline{\mu}) \geq 0\,, \qquad \mu \in \mathcal{M}^*_\theta(\Delta)\,. \tag{4.26}$$

Demostración. La existencia de $\overline{\mu}$ es una consecuencia inmediata de la compacidad débil estrella de $\mathcal{M}_\theta(\Delta)$ y la semicontinuidad inferior del funcional (4.20).

Denotemos

$$I(\mu^1, \mu^2) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j} I(\mu^1_i, \mu^2_j)\,. \tag{4.27}$$

Dicha igualdad representa la energía mutua de los vectores de medida μ^1, μ^2 en ausencia de campo externo. Sea $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ una carga vectorial; o sea, cada componente de μ designa una medida real (carga). Es bien conocido que cada μ_i admite una única descomposición

$$\mu_i = \mu_{i,+} - \mu_{i,-}\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,.$$

en dos medidas (positivas) $\mu_{i,+}, \mu_{i,-}$. Supongamos que $\mu_{i,+}, \mu_{i,-}$, tienen energía finita, entonces no hay ningún problema en definir $I(\mu_i, \mu_j)$ de acuerdo con (4.19). De hecho,

$$I(\mu_i, \mu_j) = I(\mu_{i,+}, \mu_{j,+}) + I(\mu_{i,-}, \mu_{j,-}) - I(\mu_{i,+}, \mu_{j,-}) - I(\mu_{i,-}, \mu_{j,+})\,.$$

Por tanto, si μ^1, μ^2 son dos cargas vectoriales cuyos elementos se descomponen en medidas positivas con energía finita, podemos definir para ellas la energía mutua mediante la fórmula (4.27). Denotemos

$$\widetilde{\mathcal{M}}^*(\Delta) = \{\mu = \mu^1 - \mu^2 : \mu^1, \mu^2 \in \mathcal{M}^*(\Delta)\}$$

Obviamente, $\widetilde{\mathcal{M}}^*(\Delta)$ es el espacio vectorial de todas las cargas vectoriales cuyos elementos se descomponen en medidas con energía finita.

Sea $0 \leq \epsilon \leq 1$. Si $\mu \in \mathcal{M}_\theta^*(\Delta)$ entonces $\widetilde{\mu} = \epsilon\mu + (1-\epsilon)\overline{\mu} \in \mathcal{M}_\theta^*(\Delta)$. Luego,

$$J(\widetilde{\mu}) - J(\overline{\mu}) \geq 0$$

ó, equivalentemente (véase (4.20)),

$$I(\widetilde{\mu}) + 2\int f d\widetilde{\mu} - I(\overline{\mu}) - 2\int f d\overline{\mu} \geq 0.$$

Sustituyendo $\widetilde{\mu}$ por su expresión en términos de μ y $\overline{\mu}$, tenemos

$$\epsilon^2 I(\mu - \overline{\mu}) + 2\epsilon I(\mu - \overline{\mu}, \overline{\mu}) + 2\epsilon \int f d(\mu - \overline{\mu}) \geq 0,$$

por tanto,

$$J(\widetilde{\mu}) - J(\overline{\mu}) = \epsilon^2 I(\mu - \overline{\mu}) + 2\epsilon \int W^{\overline{\mu}} d(\mu - \overline{\mu}) \geq 0. \tag{4.28}$$

Dividiendo por ϵ y haciendo tender ϵ a cero, se sigue que

$$\int W^{\overline{\mu}} d(\mu - \overline{\mu}) \geq 0.$$

lo cual es (4.26).

Haciendo un cambio de variables apropiado, es fácil verificar que no hay perdida de generalidad en la demostración si nos restringimos al caso cuando

$$\max\{|z| : z \in \Delta_i,\ i = 1, \ldots, m\} < 1 \tag{4.29}$$

En la proposición 4.2, página 178, de [44] (aquí, son usadas las suposiciones respecto de A) se prueba que si se cumple (4.29), entonces

$$I(\mu) = I(\mu, \mu) \geq 0\,, \qquad \mu \in \widetilde{\mathcal{M}}^*(\Delta)$$

y

$$I(\mu) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu \equiv 0\,.$$

Supongamos que μ es otra medida vectorial extremal. Tomemos $\epsilon = 1$. Tenemos que $J(\widetilde{\mu}) = J(\mu) = J(\overline{\mu})$. De (4.28) se deduce que

$$0 = I(\mu - \overline{\mu}) + 2\int W^{\overline{\mu}} d(\mu - \overline{\mu}),$$

que de acuerdo con (4.26), implica que $I(\mu-\overline{\mu})\leq 0$. Luego $I(\mu-\overline{\mu})=0$ y, consecuentemente, $\mu\equiv\overline{\mu}$, que era lo que necesitabamos probar.

Ahora, supongamos que una cierta medida vectorial $\overline{\lambda}\in\mathcal{M}^*_\theta(\Delta)$ satisface

$$\int W^{\overline{\lambda}}d(\lambda-\overline{\lambda})\geq 0\,,\qquad \lambda\in\mathcal{M}^*_\theta(\Delta).$$

Razonando como antes, obtenemos que

$$J(\lambda)-J(\overline{\lambda})=I(\lambda-\overline{\lambda})+2\int W^{\overline{\lambda}}d(\lambda-\overline{\lambda})\geq 0\,,$$

ya que ambos términos del miembro derecho son no negativos. Esto a su vez hace necesario que $\overline{\lambda}$ sea la medida extremal. Así concluimos la demostración. $\square$

Decimos que una propiedad se cumple en casi todo punto (ctp) si es cierta excepto en un conjunto de capacidad logarítmica cero. Para $\mu\in\mathcal{M}^*_\theta(\Delta)$, denotamos

$$J_i(\mu)=\int(W^\mu_i+f_i)d\mu_i$$

y

$$w_i:=\theta_i^{-1}[J_i(\overline{\mu})-\int f_i d\overline{\mu}_i]=\theta_i^{-1}\int W^{\overline{\mu}}_i d\overline{\mu}_i\,.$$

Lema 4.3 *Para cada* $j=1,\cdots m$,

$$W^{\overline{\mu}}_j(x)\geq w_j,\quad ctp\qquad x\in\Delta_j\,. \tag{4.30}$$

Demostración. Supongamos lo contrario, que para alguna i hay un subconjunto compacto $K\subset\Delta_i$ con capacidad logarítmica positiva tal que

$$W^{\overline{\mu}}_i(x)<w_i,\qquad x\in K.$$

Tomemos una medida arbitraria $\mu_i\in\mathcal{M}^*_{\theta_i}(K)$. La existencia de tal medida está garantizada porque la capacidad logarítmica de K es positiva. Consideremos la medida vectorial $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)$, donde $\mu_j=\overline{\mu}_j$, $j\neq i$. Entonces

$$\int W^{\overline{\mu}}d(\mu-\overline{\mu})=\int W^{\overline{\mu}}_i d(\mu_i-\overline{\mu}_i)<w_i\theta_i-w_i\theta_i=0$$

lo cual contradice (4.26). $\square$

Lema 4.4 *Para cada* $j=1,\dots m$,

$$W^{\overline{\mu}}_j(x)\leq w_j,\qquad x\in \mathrm{sop}(\overline{\mu}_j). \tag{4.31}$$

Demostración. Supongamos que para alguna j existe $x_0 \in \text{sop}(\overline{\mu}_j)$ tal que $W_j^{\overline{\mu}}(x_0) > w_j$. Como $W_j^{\overline{\mu}}$ es semicontinua inferiormente se sigue que existe una vecindad $\mathcal{V}(x_0)$ de x_0 tal que para toda $x \in \mathcal{V}(x_0)$ tenemos que $W_j^{\overline{\mu}}(x) > w_j$. Por otra parte, $x_0 \in \text{sop}(\overline{\mu}_j)$, luego $\overline{\mu}_j(\mathcal{V}(x_0)) > 0$.

Usando el Lema 4.3 y el hecho de que una medida de energía finita tiene medida cero sobre cualquier conjunto de capacidad logarítmica cero (ver explicación en la Sección 3.1), se obtiene que

$$\theta_j w_j = \int_{\Delta_j} W_j^{\overline{\mu}}(x) d\overline{\mu}_j(x) = \int_{\mathcal{V}} W_j^{\overline{\mu}} d\overline{\mu}_j + \int_{\Delta_j \setminus \mathcal{V}} W_j^{\overline{\mu}} d\overline{\mu}_j >$$

$$w_j \overline{\mu}_j(\mathcal{V}) + w_j \overline{\mu}_j(\Delta_j \setminus \mathcal{V}) = \theta_j w_j \, ,$$

lo cual es absurdo. □

Demostración del Teorema 4.7. Por el Lema 4.2 sabemos que el problema 1 tiene solución única. Debemos probar entonces que dicha solución resuelve el problema 2.

Un intervalo es un conjunto regular en el sentido de la solución del problema de Dirichlet (ver, por ejemplo, página 182 de [44], en particular el Teorema 4.1), por tanto de (4.30) se sigue que

$$W_j^{\overline{\mu}}(x) \geq w_j \, , \qquad x \in \Delta_j \, , \qquad j = 1, \ldots, m \, .$$

Consecuentemente, usando (4.31), obtenemos que

$$W_j^{\overline{\mu}}(x) = w_j, \qquad x \in \text{sop}(\overline{\mu}_j) \, , \qquad j = 1, \ldots, m \, .$$

Entonces $w_j = w_j^{\overline{\mu}}$, y $\overline{\mu}$ resuelve el segundo problema en el Teorema 4.7.

Probemos que cualquier solución $\overline{\lambda}$ del problema 2 también es solución del problema 1. Observemos que

$$\int W^{\overline{\lambda}} d\overline{\lambda} = \sum_{j=1}^{m} w_j^{\overline{\lambda}} \theta_j \, .$$

Por otra parte, si $\lambda \in \mathcal{M}_\theta^*(\Delta)$, como $W_j^{\overline{\lambda}} \geq w_j^{\overline{\lambda}}, x \in \Delta_j, j = 1, \ldots, m$, se sigue que

$$\int W^{\overline{\lambda}} d\lambda \geq \sum_{j=1}^{m} w_j^{\overline{\lambda}} \theta_j \, .$$

Luego, se cumple (4.26) y por el Lema 4.2, $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$ como necesitabamos probar.

Ahora resolvemos el problema 3. Comencemos por el caso escalar. Por supuesto, de lo anterior ha quedado probado que los problemas 1' y 2' del corolario son equivalentes y tienen la misma solución. Demostremos que el problema 3' tiene como solución única la medida de equilibrio $\overline{\mu} \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$ en presencia del campo externo f.

Como $\overline{\mu} \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$, obviamente $\sup_{\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)} w^\mu \geq w^{\overline{\mu}}$. Supongamos que existe $\mu \in \mathcal{M}_\theta(\Delta)$ tal que

$$w^\mu \geq w^{\overline{\mu}}$$

y probemos entonces que $\mu = \overline{\mu}$. Esto demostraría que el supremo en 3' se alcanza únicamente en la medida de equilibrio.

Sabemos que

$$(aV^{\overline{\mu}} + f)(x) = w^{\overline{\mu}}, \quad x \in \operatorname{sop}(\overline{\mu}) \subset \Delta;$$

luego

$$a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)(x) = (aV^{\overline{\mu}} + f)(x) - (aV^\mu + f)(x) \leq 0, \quad x \in \operatorname{sop}(\overline{\mu}). \quad (4.32)$$

La función $a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)$ es subarmónica en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{sop}(\overline{\mu})$. Recordemos que $a > 0$ y que los potenciales son suprarmónicos en $\mathbb{C}$ y armónicos en el complemento de su soporte.

En $\operatorname{sop}(\overline{\mu})$ la función $(aV^{\overline{\mu}} + f)$ es continua ya que toma un valor constante en dicho conjunto y f es semicontinua inferiormente. Entonces en $\operatorname{sop} \overline{\mu}$, aV^μ es semicontinua superiormente, pero al ser un potencial es también semicontinua inferiormente; luego es continua en $\operatorname{sop} \overline{\mu}$ y por el principio de continuidad para potenciales (ver Teorema 1.4, pag. 168 en [44], también enunciado aquí como Teorema 4.4) es continua en todo $\mathbb{C}$. Por lo cual se llega a que $a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)(x)$ es semicontinua superiormente en todo $\mathbb{C}$. En particular, para $x \in \operatorname{sop}(\overline{\mu})$, de (4.32) obtenemos que

$$\limsup_{z \to x} a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)(z) \leq a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)(x) \leq 0\,.$$

Por el principio del máximo, enunciado aquí como Teorema 4.3, se tiene que

$$a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)(x) \leq 0\,, \qquad x \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Además, $a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)(\infty) = 0$; consecuentemente,

$$a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)(x) \equiv 0\,, \qquad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{sop}(\overline{\mu})\,. \quad (4.33)$$

Tomando límite cuando $z \to x \in \operatorname{sop}(\overline{\mu}), z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sop} \overline{\mu}$, obtenemos

$$a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)(x) \geq \limsup_{z \to x} a(V^{\overline{\mu}} - V^\mu)(z) \geq 0\,, \qquad x \in \operatorname{sop}(\overline{\mu})\,.$$

De todas estas relaciones tenemos que

$$a(V^{\overline{\mu}} - V^{\mu})(z) \equiv 0\,, \qquad z \in \overline{\mathbb{C}}\,,$$

de lo cual se sigue que $\mu = \overline{\mu}$ (ver Corollary 2.2, pag. 103 de [46]). Con esto concluimos la demostración del corolario.

Empleando los mismos argumentos usados en la demostración del caso escalar, es fácil verificar que la medida vectorial de equilibrio $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_m)$ es solución del problema 3. Sea $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_m)$ cualquier otra solución de dicho problema. Fijemos $i \in \{1, \ldots, m\}$ y sea $\lambda \in \mathcal{M}^i(\overline{\lambda})$. Tenemos que

$$W_i^{\lambda} = a_{i,i}V^{\lambda_i} + \sum_{j \neq i} a_{i,j}V^{\lambda_j} + f_i = a_{i,i}V^{\lambda_i} + F_i$$

y F_i es semicontinua inferiormente en Δ_i ; por tanto, $\overline{\lambda}_i$ es la solución del problema escalar de equilibrio en presencia del campo externo F_i. Como en el caso escalar el problema 3' es equivalente al 2', esto significa que

$$W_i^{\overline{\lambda}}(x) = w_i^{\overline{\lambda}} = \min_{t \in \Delta_i} W_i^{\overline{\lambda}}(t)\,, \qquad x \in \operatorname{sop}(\overline{\lambda}_i)\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,.$$

Entonces, $\overline{\lambda}$ resuelve el problema 2 y como la solución de dicho problema es única, concluimos que $\overline{\lambda}$ es la solución del problema vectorial de equilibrio que era lo que queríamos probar. $\square$

4.4. Asintótica de funciones de segundo tipo

En esta sección estudiaremos el comportamiento asintótico logarítmico de las funciones de segundo tipo $\{\Psi_{n,j}\}$, sobre ciertas sucesiones de multi-índices $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$, tales que se cumple que $|n| \to +\infty$. Para ello debemos considerar el comportamiento asintótico logarítmico de la sucesión de polinomios mónicos $\{q_{n,j}\}, n \in \Lambda$, que se definieron en el Teorema 4.1. Como hicimos en la sección 3.3, haremos explícita la dependencia de todas las cantidades que varían con el multi-índice n, escribiéndolo como subíndice.

Fijemos una distribución de probabilidad $p = (p_1, \cdots, p_m)$ en la cual no existen $1 \leq k < j < i \leq m$ tales que $p_k < p_j < p_i$. Denotemos $p^0 = p$. Supongamos que $p^j = (p^j_{j+1}, \ldots, p^j_m)$ ha sido definido, donde $j = 0, \ldots, m-2$. Entonces,

$$p^{j+1} = (p^{j+1}_{j+2}, \ldots, p^{j+1}_m)$$

es el vector que se obtiene al extraer de p^j la primera componente $p^j_{r_j}$ que satisface

$$p^j_{r_j} \geq \max\{p^j_k : j+1 \leq k \leq m\}\,.$$

Consideremos el problema vectorial de equilibrio con los siguiente datos iniciales (Δ, θ, A, f):

1. $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ es un conjunto de m intervalos cerrados contenidos en la recta real que no se reducen a puntos, tales que $\Delta_j \cap \Delta_{j+1} = \emptyset, j = 1, \ldots, m-1$.

2. $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, donde
$$\theta_j = |p^{j-1}|\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,.$$

3. $A = ||a_{j,k}||$ es la matriz de interacción para la cual $a_{k,k} = 2$, $a_{j,k} = -1$, si $|j-k| = 1$, y $a_{j,k} = 0$ en el resto de los casos.

4. $f = (f_1, \ldots, f_m)$, donde f_1 es una función real semicontinua inferiormente en Δ_1 tal que existe $\mu_1 \in \mathcal{M}_{\theta_1}(\Delta_1)$ con $I(\mu_1, \mu_1) < +\infty$ para la cual $\int f_1(x) d\mu_1(x) < +\infty$ y $f_i = 0, i = 2, \ldots, m$, en Δ_i.

En lo sucesivo, $\overline{\mu}$ denota la medida extremal relativa al problema de equilibrio enunciado en el Teorema 4.7 tomando estos datos iniciales.

Sea $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$ una sucesión de multi-índices $n = (n_1, \ldots, n_m)$ tales que $|n| \to \infty$ y
$$\lim_{n\in\Lambda} \frac{n_k}{|n|} = p_k > 0, \qquad k = 1, \ldots m. \tag{4.34}$$
Sean $q_{n,j} = q_j, j = 1, \ldots, m+1$, los polinomios definidos en (4.7). Recordemos que $q_{n,1} = Q_n$ y $q_{n,m+1} \equiv 1$. Por tanto, $q_{n,j}$ tiene todos sus ceros en el interior del intervalo Δ_j, además son simples, y
$$\deg q_{n,j} = |n^{j-1}|\,, \qquad j = 1, \ldots, m+1$$
($|n^m| = 0$). Notemos que de (4.34) se tiene
$$\lim_{n\in\Lambda} \frac{|n^{j-1}|}{|n|} = \theta_j\,, \qquad j = 1, \ldots m\,.$$

Sea $\chi(q)$ la medida contadora de los ceros del polinomio q. Es decir, $\chi(q)$ asigna medida 1 a cada punto que es cero de q (contando multiplicidades) y medida cero al resto de los puntos.

Escojamos dos sucesiones de polinomios mónicos $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, n \in \Lambda$, con coeficientes reales tales que $\deg \beta_n = \kappa_n, \deg \alpha_n \leq |n| + \kappa_n + \min\{n_1, \ldots, n_m\}$. Los ceros de β_n tienen multiplicidad par y están en Δ_1 y los ceros de α_n pertenecen a un subconjunto compacto F de $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1$ (tal como habíamos exigido para definir los AGHP, en la Sección 4.1). Supongamos que existen dos medidas α, β con soporte contenido en F y Δ_1, respectivamente, tales que

$$*\lim_{n\in\Lambda} \frac{1}{|n|}\chi(\alpha_n) = \alpha\,, \qquad *\lim_{n\in\Lambda} \frac{1}{|n|}\chi(\beta_n) = \beta\,. \tag{4.35}$$

Denotamos

$$f_{n,1}(x) = \frac{1}{|n|}(V^{\chi(\beta_n)}(x) - V^{\chi(\alpha_n)}(x))\,.$$

Por (4.35), teniendo en cuenta las propiedades de los potenciales (véase [27] y [35]), se sigue que:

- $f_1(x) = \lim_{n\in\Lambda} f_{n,1}(x) = V^{\beta}(x) - V^{\alpha}(x)\,,\ x \in \Delta_1\,$, donde la convergencia es en medida en Δ_1.
- Cada $f_{n,1}$ y f_1 es semicontinua inferiormente en Δ_1.
- Cada $f_{n,1}$ y f_1 es débilmente aproximativamente continua en Δ_1. Una función g es débilmente aproximativamente continua en $x_0 \in \Delta_1$, si existe un conjunto $e(x_0) \subset \Delta_1$ de medida positiva tal que

$$\liminf_{x\to x_0, x\in\Delta_1} g(x) = \lim_{x\to x_0, x\in e(x_0)} g(x) = g(x_0)\,.$$

- $\lim_{n\to\infty} \min_{\Delta_1} f_{n,1}(x) = \min_{\Delta_1} f_1(x)\,.$

Denotaremos este tipo de convergencia de la siguiente manera

$$\mathcal{F}\lim_{n\to\infty} f_{n,1} = f_1\,.$$

La función f_1 la escogeremos como la primera componente de la función vectorial f. Tenemos que comprobar que se cumple (4.24). En efecto, tomemos cualquier $\mu \in \mathcal{M}_{\theta}^{*}(\Delta)$ tal que μ_1 es la medida de equilibrio en Δ_1 en ausencia de campo externo. Entonces

$$\int f(x)d\mu(x) = \int_{\Delta_1} \left(V^{\beta} - V^{\alpha}\right)(x)d\mu_1(x)$$

$$= \int_{\Delta_1} V^{\mu_1}(x)d\beta(x) - \int_{\Delta_1} V^{\alpha}(x)d\mu_1(x) < \infty,$$

ya que V^{μ_1} y V^{α} son continuas en Δ_1.

Sea σ una medida finita positiva y de Borel, soportada en un compacto del eje real. Decimos que σ es regular y lo denotamos $\sigma \in \mathbf{Reg}$ si

$$\lim_{l} \kappa_l^{1/l} = \mathrm{cap}(\mathrm{sop}(\sigma));$$

donde κ_l es el coeficiente conductor del polinomio ortonormal de grado l respecto a σ. Más detalles sobre esta definición y las propiedades de las medidas regulares, pueden verse en el Capítulo 3 de [51]. En particular, es bien conocido que si $\sigma' > 0$ en casi todo punto de su soporte, entonces $\sigma \in \mathbf{Reg}$. La clase de las medidas regulares es mucho mayor que la de las medidas para las cuales se tiene $\sigma' > 0$ en casi todo punto del soporte de σ.

El siguiente resultado es una generalización de los Teoremas 3, 4, y 5 de [29] cuando nos restringimos a considerar sistemas de medidas de Nikishin. La demostración sigue el mismo esquema pero tomando en consideración la solución del problema vectorial de equilibrio en presencia de un campo externo vectorial.

Teorema 4.8 *Supongamos que $\sigma_1' > 0$ en casi todo punto de Δ_1, y $\sigma_j \in \mathbf{Reg}$ para $j = 2, \ldots, m$. También suponemos que se cumplen (4.34) y (4.35). Para cada $j = 1, \ldots, m$, tenemos*

$$* \lim_{n \in \Lambda} \frac{1}{|n|} \chi(q_{n,j}) = \overline{\mu}_j \,. \tag{4.36}$$

Por tanto,

$$\lim_{n \in \Lambda} |q_{n,j}(z)|^{\frac{1}{|n|}} = e^{-V^{\overline{\mu}_j}(z)}, \qquad j = 1, \ldots, m \,, \tag{4.37}$$

uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \Delta_j$. Más aún,

$$\lim_{n \in \Lambda} \left(\int q_{n,j}^2 \frac{|\Psi_{n,j-1}| ds_{r_j}^{j-1}}{|q_{n,j+1}|} \right)^{\frac{1}{|n|}} = e^{-v_j}, \qquad j = 1, \ldots, m \,. \tag{4.38}$$

donde $v_j = w_1^{\overline{\mu}} + \cdots + w_j^{\overline{\mu}}$, y

$$\lim_{n \in \Lambda} |\Psi_{n,j}|^{\frac{1}{|n|}} = e^{(V_j^{\overline{\mu}} - V_{j+1}^{\overline{\mu}} - v_j)} \,. \tag{4.39}$$

uniformemente sobre cada subconjunto compacto del complemento de $\Delta_j \cup \Delta_{j+1}$ ($\Delta_{m+1} = \emptyset, V_{m+1}^{\overline{\mu}} \equiv 0$).

Demostración. Multi-índices distintos pertenecientes a $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$ podrían tener asociado diferentes Σ^j y r_j, $j = 0, \ldots, m-1$. (Véase la definición de Σ^j y r_j al comienzo de la Sección 4.2.) En particular, las medidas $s_{r_j}^j$, $j = 0, \ldots, m-1$, podrían depender de n. Para simplificar la notación no hemos indicado esta dependencia en todo el capítulo. Hasta ahora esto no importaba porque los resultados anteriores, en lo referente a los polinomios $q_{n,j}$, fueron demostrados para cada n fijo. Sin embargo, ahora vamos a tratar el límite en $n \in \Lambda$. No obstante, con las suposiciones del Teorema 4.8, este hecho no influye. Veamos por qué esto es así.

Obsérvese que de acuerdo con la construcción, hay sólo un número finito de posibles sistemas Σ^j, $j = 0, \ldots, m-1$, y de medidas $s^j_{r_j}$, $j = 0, \ldots, m-1$, asociadas a los diferentes multi-índices. Supongamos que hemos tomado una sucesión de multi-índices $\Lambda' \subset \Lambda$, con un número infinito de elementos, tal que para todo $n \in \Lambda'$ tenemos las mismas medidas $s^j_{r_j}$, $j = 0, \ldots, m-1$, y logramos probar que se cumplen las relaciones (4.36)-(4.39). Como los miembros derechos de (4.36)-(4.39) sólo dependen de los datos iniciales del problema de equlibrio, los cuales son independientes de la construcción de los sistemas auxiliares Σ^j, $j = 0, \ldots, m-1$ y, además, Λ puede particionarse en un número finito de sucesiones de multi-índices como Λ' (en cada una de las cuales se obtienen las mismas medidas $s^j_{r_j}, j = 0, \ldots, m-1$,) más otra cantidad finita de multi-índices, entonces habríamos probado el resultado tal como se enuncia. En lo que sigue, sin perdida de generalidad, supondremos que todos los $n \in \Lambda$ tienen asociado el mismo sistema auxiliar Σ^j, $j = 0, \ldots, m-1$ y, consecuentemente, el mismo sistema de medidas $s^j_{r_j}, j = 0, \ldots, m-1$.

Usando (4.7) y (4.17) se sigue que para cada $j = 0, \ldots m-1$

$$\int_{\Delta_{j+1}} x^\nu q_{n,j+1}(x)\psi_{n,j}(x)\frac{ds^j_{r_j}(x)}{q_{n,j+2}(x)} = 0, \qquad \nu = 0, \ldots, |n^j| - 1.$$

O sea, para cada $j = 0, \ldots m-1$

$$\int_{\Delta_{j+1}} x^\nu q_{n,j+1}(x)h_{n,j}(x)ds^j_{r_j}(x) = 0, \qquad \nu = 0, \ldots, |n^j| - 1, \tag{4.40}$$

donde

$$h_{n,j} = \frac{|\psi_{n,j}|}{|q_{n,j+2}|}, \qquad j = 0, \ldots, m-1\,.$$

(Recordemos que $\psi_{n,j}$ y $q_{n,j+2}$ tienen signo constante en Δ_{j+1}.)

El polinomio $q_{n,j+1}$ es ortogonal con respecto a la medida variante

$$d\sigma_{n,j+1} = h_{n,j}ds^j_{r_j}\,, \qquad j = 0, \ldots, m-1\,.$$

Definamos

$$\mu_{n,j} = \frac{1}{|n|}\chi(q_{n,j})\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,,$$

y denotemos $\mu_n = (\mu_{n,1}, \ldots, \mu_{n,m})$.

Como la sucesión $\{\mu_n\}, n \in \Lambda$, es compacta en la topología débil estrella, para probar (4.36) es suficiente demostrar que cualquier subsucesión convergente $\{\mu_n\}, n \in \Lambda', \Lambda' \subset \Lambda$, satisface

$$*\lim_{n \in \Lambda'} \mu_n = \overline{\mu}\,.$$

Por tanto, sin perdida de generalidad, podemos suponer que existe

$$*\lim_{n\in\Lambda}\mu_n = \mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m)\,. \tag{4.41}$$

y debemos demostrar que $\mu = \overline{\mu}$.

Con este propósito hacemos uso del Teorema 1 de [27] y el Teorema 3.3.3 de [51], relacionados con el comportamiento asintótico de la raíz n-ésima de polinomios ortogonales respecto a medidas variantes. Por comodidad en la lectura, enunciamos estos resultados en el teorema siguiente. El resultado con condiciones más débiles sobre la sucesión $\{g_l\}_{l\in\Lambda}$ corresponden al Teorema 1 de [27]; por otra parte, las suposiciones más débiles sobre σ corresponden al Teorema 3.3.3 de [51].

Teorema 4.9 *Sea $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Supongamos que una sucesión de polinomios mónicos $\{q_l\}_{l\in\Lambda}$ satisface las relaciones de ortogonalidad*

$$\int x^k q_l(x)d\sigma_l(x) = 0, \qquad k = 0,\ldots,\deg q_l - 1, \quad l\in\Lambda\,, \tag{4.42}$$

donde

$$d\sigma_l = \exp(-g_l)d\sigma\,.$$

y

$$\lim_{l\in\Lambda}\frac{\deg q_l}{l} = \theta\in\mathbb{R}.$$

Supongamos que tenemos una de dos situaciones:

- *$\sigma' > 0$ en casi todo punto de su soporte, dado por un intervalo Δ, las funciones de la sucesión $\{g_l\}_{l\in\Lambda}$ al igual que g son semicontinuas inferiormente en Δ y satisfacen*

  $$\mathcal{F}\lim_{l\in\Lambda}\frac{1}{l}g_l(x) = g(x), \qquad x\in\Delta,$$

- *$\sigma\in$ **Reg**, las funciones de la sucesión $\{g_l\}_{l\in\Lambda}$ al igual que g son continuas en Δ y satisfacen*

  $$\lim_{l\in\Lambda}\frac{1}{l}g_l(x) = g(x), \quad x\in\Delta,$$

  uniformemente en Δ.

Entonces

$$\lim_{l \in \Lambda} \frac{1}{l} \chi(q_l) = \overline{\mu}\,, \tag{4.43}$$

y

$$\lim_{l \in \Lambda} \left(\int q_l^2 d\sigma_l(x) \right)^{\frac{1}{l}} = e^{-w}, \tag{4.44}$$

donde $\overline{\mu} = \overline{\mu}(\Delta, \theta, 2, g)$ *es la solución del problema escalar de equilibrio que aparece en el Corolario 4.1 con* $a = 2$*, campo externo dado por* g*, y donde* $w = w^{\overline{\mu}}$ *es la constante de equilibrio asociada.*

De (4.41) se sigue que

$$\lim_{n \in \Lambda} \frac{1}{|n|} \log |q_{n,j}| = \lim_{n \in \Lambda} V^{\mu_{n,j}} = -V^{\mu_j}\,,$$

uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \Delta_j$. Como $\psi_{n,0} = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$, de (4.35) tenemos

$$\mathcal{F} \lim_{n \in \Lambda} \frac{1}{|n|} \log |\psi_{n,0}|^{-1} = f_1$$

en Δ_1. Denotamos

$$2V^{\mu_1} - V^{\mu_2} + f_1 = W_1^{\mu}\,.$$

Usando (4.40) con $j = 0$ y el Teorema 4.9 (véase (4.41), (4.43) y (4.44)), obtenemos que μ_1 satisface las condiciones de equilibrio

$$W_1^{\mu}(x) = \min_{\Delta_1} W_1^{\mu} = w_1^{\mu}, \qquad x \in \operatorname{sop}(\mu_1) \tag{4.45}$$

y

$$-\lim_{n \in \Lambda} \frac{1}{|n|} \log\left(\int q_{n,1}^2 d\sigma_{n,1}\right) = w_1^{\mu}.$$

De (4.40) se sigue que

$$Q(z) \int \frac{q_{n,j+1}(x)}{z - x} \frac{\psi_{n,j}(x)}{q_{n,j+2}(x)} ds_{r_j}^j(x) = \int \frac{Q(x) q_{n,j+1}(x)}{z - x} \frac{\psi_{n,j}(x)}{q_{n,j+2}(x)} ds_{r_j}^j(x)$$

donde Q es cualquier polinomio de grado $\leq |n^j|$. Si usamos dicha fórmula con $Q = q_{n,j+1}$ y $Q = q_{n,j+2}$, respectivamente, obtenemos

$$\int \frac{q_{n,j+1}(x)}{z - x} \frac{\psi_{n,j}(x)}{q_{n,j+2}(x)} ds_{r_j}^j(x) = \frac{1}{q_{n,j+1}(z)} \int \frac{q_{n,j+1}^2(x)}{z - x} \frac{\psi_{n,j}(x)}{q_{n,j+2}(x)} ds_{r_j}^j(x)$$

y (véase también (4.5))

$$\int \frac{q_{n,j+1}(x)}{z-x}\frac{\psi_{n,j}(x)}{q_{n,j+2}(x)}ds^j_{r_j}(x) = \frac{1}{q_{n,j+2}(z)}\int \frac{q_{n,j+2}(x)q_{n,j+1}(x)}{z-x}\frac{\psi_{n,j}(x)}{q_{n,j+2}(x)}ds^j_{r_j}(x)$$

$$= \frac{\Psi_{n,j+1}(z)}{q_{n,j+2}(z)}\,.$$

Por tanto,

$$\psi_{n,j}(z) = \frac{1}{q_{n,j}(z)}\int \frac{q^2_{n,j}(t)}{z-t}d\sigma_{n,j}(t), \qquad z\in\mathbb{C}\backslash\Delta_j\,, \qquad j=1\ldots,m\,. \quad (4.46)$$

Probemos que para cada $j=1,\ldots,m$ existe el límite

$$v_j = -\lim_{n\in\Lambda}\frac{1}{|n|}\log(\int q^2_{n,j}d\sigma_{n,j})\,.$$

Procederemos por inducción. Sabemos que $v_1 = w^\mu_1$ para $j=1$. Supongamos que el límite existe para algún $j, 1\le j\le m-1$ y demostremos que la afirmación es cierta también para $j+1$.

Es conocido y fácil de verificar (véase, por ejemplo, la página 158 de [51]) que para cada subconjunto compacto K de $\mathbb{C}\backslash\Delta_j$ existen constantes positivas $C_1(K)$ y $C_2(K)$ tales que cualquiera sea $z\in K$ se cumple

$$C_1(K)|\int q^2_{n,j}(x)d\sigma_{n,j}(x)| \le \left|\int \frac{q^2_{n,j}(x)}{z-x}d\sigma_{n,j}(x)\right| \le C_2(K)|\int q^2_{n,j}(x)d\sigma_{n,j}(x)|\,.$$

De tales desigualdades y de (4.46) se sigue que

$$-\lim_{n\in\Lambda}\frac{1}{|n|}\log|\psi_{n,j}(z)| = -V^{\mu_j}(z)+v_j\,, \qquad (4.47)$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}\setminus\Delta_j$; en particular, en Δ_{j+1}. Por tanto,

$$-\lim_{n\in\Lambda}\frac{1}{|n|}\log h_{n,j+1} = v_j - V^{\mu_{j+2}} - V^{\mu_j}\,.$$

uniformemente en Δ_{j+1}. Usando (4.40) y el Teorema 4.9 para $j+1$ (obsérvese que ahora sólo se requiere que $\sigma_{j+1}\in\textbf{Reg}$), se sigue que μ_{j+1} satisface el problema escalar de equilibrio

$$W^\mu_{j+1}(x)+v_j = 2V^{\mu_{j+1}}(x) - V^{\mu_{j+1}}(x) - V^{\mu_j}(x) + v_j \qquad (4.48)$$

$$= \min_{\Delta_{j+1}} W^{\mu}_{j+1}(x) + v_j = w^{\mu}_{j+1} + v_j \,,$$

para $x \in \operatorname{sop} \mu_{j+1}$, y

$$v_{j+1} = -\lim_{n\in\Lambda} \frac{1}{|n|} \log\left(\int q^2_{n,j+1}(x) d\sigma_{n,j+1}(x)\right) = w^{\mu}_{j+1} + v_j \,.$$

De (4.45) y (4.48) tenemos que la medida vectorial μ satisface las condiciones de equilibrio para todo $j = 1, \ldots, m$. Por tanto, debido al Teorema 4.7 tenemos que $\mu = \overline{\mu}$, y sus consecuencias (4.36), (4.37), y (4.38). Con las fórmulas (4.37) y (4.47) se llega a (4.39). Así se concluye la demostración del Teorema 4.8. $\square$

Nota 4.2 Si $\beta_n \equiv 1, n \in \Lambda$ (o sea, cuando los AGHP se reducen a AMHP puesto que no se fijan polos), entonces $\lim_{n\in\Lambda} f_{n,1} = f_1$ uniformemente en Δ_1 y f_1 es continua en Δ_1. En tal situaciones también podemos hacer uso del Teorema 3.3.3 de [51] en el paso inicial de la demostración del Teorema 4.9, y sustituir la condición $\sigma'_1 > 0$ en casi todo punto de Δ_1 por la condición más débil, $\sigma_1 \in \mathbf{Reg}$. Luego, si este es el caso, en el Teorema 4.8 es suficiente suponer que $\sigma_j \in \mathbf{Reg}, j = 1, \ldots, m$.

4.5. Velocidad de convergencia de los AGHP

Sea $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de medidas de Nikishin y $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$ su correspondiente sistema de funciones de Nikishin. Supongamos que $\sigma'_1 > 0$ en casi todo punto de Δ_1, y $\sigma_j \in \text{Reg}$, $j = 2, \ldots, m$. Escojamos una sucesión de multi-índices $\Lambda \subset \mathbb{Z}^m_+(*)$ tal que se cumpla (4.34). Para cada $n \in \Lambda$, sea $R_n = (R_{n,1}, \ldots, R_{n,m})$ el AGHP asociado a $\widehat{S}$ con respecto a los polinomios mónicos α_n, β_n como se indicó en la Sección 4.1, donde las sucesiones $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $n \in \Lambda$, satisfacen (4.35). El objetivo de esta sección es el estudio de la velocidad de convergencia de la sucesión $\{R_{n,j}\}$, $n \in \Lambda$, a $\widehat{s}_j$, $j = 1, \ldots, m$. Con este fin, usamos la fórmula integral del resto y las fórmulas asintóticas obtenidas en el Teorema 4.8.

De acuerdo con la condición *ii*) del comienzo la Sección 4.1, la función de la izquierda tiene un cero de orden a lo menos uno en el infinito y es holomorfa en el complemento de Δ_1. Integrando alrededor de una curva cerrada Γ de índice uno respecto a sus puntos interiores, tal que los ceros de α_n y z queden en el exterior de Γ, y Δ_1 esté rodeado por Γ, obtenemos

$$\left(\frac{\beta_n Q_n \widehat{s}_j - P_{n,j}}{\alpha_n}\right)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \left(\frac{\beta_n Q_n \widehat{s}_j - P_{n,j}}{\alpha_n}\right)(\zeta)\frac{d\zeta}{z-\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{\beta_n Q_n \widehat{s}_j}{\alpha_n}\right)(\zeta)\frac{d\zeta}{z-\zeta}\,.$$

Sustituyendo $\widehat{s}_j$ por su expresión integral y usando el Teorema de Fubini, para cada $j = 1,\ldots,m$, obtenemos

$$\delta_{n,j}(z) = (\widehat{s}_j - R_{n,j})(z) = \frac{(\alpha_n \Phi_{n,j})(z)}{(\beta_n Q_n)(z)}\,, \quad z \in D = \mathbb{C}\setminus \Delta_1\,, \quad j = 1,\ldots,m\,, \tag{4.49}$$

donde

$$\Phi_{n,j}(z) = \int_{\Delta_1} \frac{(\beta_n Q_n)(x)}{\alpha_n(x)}\frac{ds_j(x)}{z-x}\,.$$

Por el Teorema 4.8 (recordamos que $q_{n,1} = Q_n$) y (4.35) sabemos que

$$\lim_{n\in\Lambda}\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n Q_n}\right|^{\frac{1}{|n|}} = \exp(V^{\bar{\mu}_1} + f_1)\,, \tag{4.50}$$

uniformemente en cada compacto de la región $D\setminus F = \mathbb{C}\setminus(F\cup\Delta_1)$. En los subconjuntos compactos de D lo mismo se cumple tomando límite superior en el lado izquierdo de (4.50). Por tanto, el problema se reduce a encontrar el límite de $\{\Phi_{n,j}\}, n \in \Lambda, j = 1,\ldots,m$. Luego, debemos establecer una conexión entre las funciones $\Phi_{n,j}$ y $\Psi_{n,j}$.

Vamos a hacer esto en dos pasos. Primero, veremos la relación entre $\Psi_{n,j}$ y los restos de un sistema auxiliar de funciones de Nikishin que introduciremos. Después, compararemos las funciones restos de ambos sistemas de Nikishin. Introduzcamos el sistema de Nikishin auxiliar.

Para cada $n \in \mathbb{Z}_+^m$ asociamos una permutación $\tau = \tau_n$ de $\{1,\ldots,m\}$ como sigue. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$,

$$\tau(i) = j \quad \text{si} \quad \left\{\begin{array}{ll} n_j \geq n_k & \text{para } k > j \\ n_j > n_k & \text{para } k < j \end{array}\right\}, \tag{4.51}$$

para todo $k \in \{1,\ldots,m\}\setminus\{\tau(1),\ldots,\tau(i-1)\}$. Cuando $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$, no existen $1 \leq i < j < k \leq m$ tales que $n_i < n_j < n_k$. En términos de τ esto significa que no existen $1 \leq i < j < k \leq m$ tales que $\tau(i) > \tau(j) > \tau(k)$. Dicho de otro modo, $\{1,\ldots,m\}$ puede particionarse en dos subconjuntos en los cuales τ es creciente. Decimos que $\tau \in S_m(*)$ si tal propiedad es cierta. Obviamente, cada $\tau \in S_m(*)$ está asociada a infinitos multi–índices en $\mathbb{Z}_+^m(*)$.

Sea $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$. A cada $n \in \Lambda$ le asociamos el multi–índice

$$\widetilde{n} = (n_{r_0}^0, \ldots, n_{r_{m-1}}^{m-1}).$$

Es fácil de verificar que $\widetilde{n} = (n_{\tau(1)},\ldots,n_{\tau(m)})$. Más aún, $\tau(j) = r_{j-1} - d(j)$ donde $d(j)$ es igual al número de $i, 0 \leq i < j-1$, tal que $r_i > \tau(j)$. En principio, la permutación τ depende de $n \in \Lambda$, pero para simplificar no lo indicaremos. Denotemos $\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{n} : n \in \Lambda\}$.

El sistema de Nikishin auxiliar es $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ donde $\vartheta_j = s^{j-1}_{r_{j-1}}, j = 1, \ldots, m$. Las medidas $s^{j-1}_{r_{j-1}}$ son las definidas en la relación (4.5) de la Sección 4.2. Denotemos $(\vartheta_{1,1}, \ldots, \vartheta_{1,m}) = \mathcal{N}(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$. Sea $\widetilde{R}_{\widetilde{n}} = (\frac{\widetilde{P}_{\widetilde{n},1}}{\widetilde{Q}_{\widetilde{n}}}, \ldots, \frac{\widetilde{P}_{\widetilde{n},m}}{\widetilde{Q}_{\widetilde{n}}})$ la sucesión de AGHP correspondiente al sistema de funciones $(\widehat{\vartheta}_{1,1}, \ldots \widehat{\vartheta}_{1,m})$, la sucesión de multi–índices $\widetilde{\Lambda}$, y la sucesión de polinomios α_n y β_n (los mismos polinomios que para el sistema inicial, teniendo en cuenta la correspondencia $n \leftrightarrow \widetilde{n}$).

En el Teorema 1 de [8] se demostró que el denominador común $\widetilde{Q}_{\widetilde{n}}$ de $\widetilde{R}_{\widetilde{n}}$ satisface las mismas relaciones de ortogonalidad que el denominador común Q_n de R_n. Por ello, $\widetilde{Q}_{\widetilde{n}} = Q_n$. Más aún, las funciones $\Psi_{n,j}$ definidas para el sistema inicial de Nikishin son iguales a las correspondientes del sistema auxiliar introducido; por eso, ambas generan los mismos polinomios $q_{n,j}, j = 1, \ldots, m$.

De (4.49) aplicado al sistema auxiliar de Nikishin, tenemos que

$$\widetilde{\delta}_{n,j}(z) = (\widehat{\vartheta}_{1,j} - \widetilde{R}_{\widetilde{n},j})(z) = \frac{(\alpha_n \widetilde{\Phi}_{\widetilde{n},j})(z)}{(\beta_n Q_n)(z)}, \quad z \in D = \mathbb{C} \setminus \Delta_1, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4.52}$$

donde

$$\widetilde{\Phi}_{\widetilde{n},j}(z) = \int_{\Delta_1} \frac{(\beta_n Q_n)(x)}{\alpha_n(x)} \frac{d\vartheta_{1,j}(x)}{z-x}$$

$$= \int_{\Delta_1} \cdots \int_{\Delta_j} \frac{(\beta_n Q_n)(x_1)}{\alpha_n(x_1)} \frac{d\vartheta_1(x_1) d\vartheta_2(x_2) \cdots d\vartheta_j(x_j)}{(z-x_1)(x_1-x_2)\cdots(x_{j-1}-x_j)}.$$

Lema 4.5 *Supongamos que la misma permutación τ está asociada a todos los $n \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^m_+(*)$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, tenemos*

$$\widetilde{\Phi}_{\widetilde{n},j}(z) = (-1)^{j-1}\Psi_{n,j}(z) + \sum_{k=1}^{j-1} u_{j,k}(z)\Psi_{n,k}(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{k=1}^{j} \Delta_k), \tag{4.53}$$

donde las funciones $u_{j,k}$ son analíticas en $\mathbb{C} \setminus (\bigcup_{k=1}^{j} \Delta_k)$ y no dependen de $n \in \Lambda$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\Phi_{n,\tau(j)}(z) = \widetilde{\Phi}_{\widetilde{n},j}(z) + \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}(z)\widetilde{\Phi}_{\widetilde{n},k}(z) + \ell_{j,0}(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_k, \tag{4.54}$$

donde $\ell_{j,k}, k = 0, \ldots, j-1$, denotan polinomios que no dependen de $n \in \Lambda$ de grado $\leq m-1$. Si $\min\limits_{1 \leq i \leq m} n_i \geq m-1, n \in \Lambda$, entonces $\ell_{j,0} \equiv 0$.

Demostración. Comenzamos probando (4.53). De la definición

$$\Psi_{n,j}(z) = \int_{\Delta_1} \cdots \int_{\Delta_j} \frac{(\beta_n Q_n)(x_1)}{\alpha_n(x_1)} \frac{d\vartheta_1(x_1) d\vartheta_2(x_2) \cdots d\vartheta_j(x_j)}{(x_2 - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(z - x_j)} .$$

Para $j = 1$, $\widetilde{\Phi}_{\tilde{n},j}(z) = \Psi_{n,j}(z)$ $(= \Phi_{n,r_0})$. Cuando $2 \leq j \leq m$, tenemos que

$$\widetilde{\Phi}_{\tilde{n},j}(z) + (-1)^j \Psi_{n,j}(z) =$$

$$= \int_{\Delta_1} \cdots \int_{\Delta_j} \frac{(\beta_n Q_n)(x_1)}{\alpha_n(x_1)} \frac{(x_1 - x_j) d\vartheta_1(x_1) d\vartheta_2(x_2) \cdots d\vartheta_j(x_j)}{(z - x_1)(x_1 - x_2) \cdots (x_{j-1} - x_j)(z - x_j)} .$$

Tomando $(x_1 - x_j) = (x_1 - x_2) + \cdots + (x_{j-1} - x_j)$, obtenemos

$$\Psi_{n,j}(z) = (-1)^{j-1} \widetilde{\Phi}_{\tilde{n},j}(z) + \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k-1} \widehat{\vartheta}_{j,k}(z) \widetilde{\Phi}_{\tilde{n},k}(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{k=1}^{j} \Delta_k) ,$$

donde $\vartheta_{j,k} = \langle \vartheta_j, \ldots, \vartheta_{k+1} \rangle, 1 \leq k \leq j-1$. Sustituyamos j por i en esta relación. Usando esta fórmula para $i = 1, \ldots, j$, obtenemos un sistema triangular de ecuaciones lineales, mediante el cual podemos despejar $\widetilde{\Phi}_{\tilde{n},j}$ en términos de $\Psi_{n,k}$, $k = 1, \ldots, j$, como se indica en (4.53).

En la demostración de (4.54), la idea fundamental es desenmarañar las transformaciones que hemos introducido al definir el sistema auxiliar de Nikishin. Esto se hace usando las fórmulas (4.10)-(4.12) al revés. Es suficiente probar que para cada $\widetilde{n}$ se tiene

$$\widetilde{\Phi}_{\tilde{n},j}(z) = \Phi_{n,\tau(j)}(z) + \sum_{k=1}^{j-1} \widetilde{\ell}_{j,k}(z) \Phi_{n,\tau(k)}(z) + \widetilde{\ell}_{j,0}(z) , \qquad (4.55)$$

donde los $\widetilde{\ell}_{j,k}, k = 0, \ldots, j-1$, denotan polinomios que no dependen de $n \in \Lambda$ de grado $\leq m-1$. En efecto, de la estructura triangular de dicha relación respecto a j, se sigue inmediatamente la fórmula (4.54).

Primero obtengamos una fórmula similar para las funciones $\widehat{\vartheta}_{1,j}, j = 1, \ldots, m$. Probaremos que para todo $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\widehat{\vartheta}_{1,j} = \widehat{s}_{\tau(j)} + \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k} \widehat{s}_{\tau(k)} + \ell_{j,0} , \qquad (4.56)$$

donde los $\ell_{j,k}, k = 0, \ldots, j-1$, denotan polinomios de grado $\leq m-1$, que no dependen de $n \in \Lambda$. La demostración de (4.56) se lleva a cabo por inducción en el número de medidas generadoras del sistema inicial de Nikishin.

Supongamos que $\Sigma^0 = (\sigma_1^0)$; esto es $m = 1$. Entonces para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+^1(*) = \mathbb{Z}_+$ la permutación asociada es $\tau(1) = 1$ y $\vartheta_1 = \sigma_1^0$. Luego, la fórmula es trivial. Supongamos que la fórmula es válida para todo $j = 1, 2, \ldots, m-1$ de cualquier sistema de Nikishin $m-1$ elementos $(m \geq 2)$ y $n \in \Lambda \subset \mathbb{Z}_+^{m-1}(*)$, donde Λ es tal que todos sus multi-índices tienen asociada la misma permutación. Demostremos que la afirmación correspondiente es cierta para los sistemas de Nikishin de m elementos.

Sea $\Sigma^0 = (\sigma_1^0, \ldots, \sigma_m^0)$ un sistema de Nikishin arbitrario de $m \geq 2$ elementos y $n^0 \in \Lambda^0 \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$. Sea $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ el sistema auxiliar de Nikishin y τ^0 la permutación correspondiente. Para $j = 1$

$$\widehat{\vartheta}_{1,1}(z) = \int_{\Delta_1} \frac{ds_{r_0}^0(x)}{z-x} = \widehat{s}_{\tau(1)}^0(z)\,,$$

y la fórmula es cierta.

Sea $j \in \{2, \ldots, m\}$. Observemos que

$$\widehat{\vartheta}_{1,j}(z) = \int_{\Delta_1} \frac{\widehat{\vartheta}_{2,j}(x) d\vartheta_1(x)}{z-x}\,, \tag{4.57}$$

donde $\widehat{\vartheta}_{2,j}$ es la $(j-1)$-ésima función correspondiente al sistema auxiliar de Nikishin $(\vartheta_2, \ldots, \vartheta_m)$ asociada al sistema de Nikishin de $m-1$ elementos $\Sigma^1 = (\sigma_2^1, \ldots, \sigma_m^1)$ y los multi–índices $n^1 \in \Lambda^1 \subset \mathbb{Z}_+^{m-1}(*)$ que son obtenidos extrayendo de cada n^0 su $n_{r_0}^0$-ésima componente (véase la Section (4.2)). La permutación τ^1 de $\{2, \ldots, m\}$ asociada a $n^1 \in \Lambda^1$ es

$$\tau^1(j) = \begin{cases} \tau^0(j) + 1 & \text{si} \quad \tau^0(j) < r_0\,, \\ \tau^0(j) & \text{si} \quad \tau^0(j) > r_0\,. \end{cases} \tag{4.58}$$

Usando la hipótesis de inducción, se tiene que

$$\widehat{\vartheta}_{2,j}(x) = \sum_{k=2}^{j} \ell_{j,k}(x) \widehat{s}_{\tau^1(k)}^1(x) + \ell_{j,1}(x)\,, \quad ,$$

donde $\deg \ell_{j,k} \leq m-2, k = 1, \ldots, j-1$, y $\ell_{j,j} \equiv 1$. Sustituyendo en (4.57) llegamos a que

$$\widehat{\vartheta}_{1,j}(z) = \sum_{k=2}^{j} \int_{\Delta_1} \frac{\ell_{j,k}(x) \widehat{s}_{\tau^1(k)}^1(x) ds_{r_0}^0(x)}{z-x} + \int_{\Delta_1} \frac{\ell_{j,1}(x) ds_{r_0}^0(x)}{z-x}\,. \tag{4.59}$$

Si $r_0 = 1$, entonces $s_{r_0}^0 = \sigma_1^0$ y $\Sigma^1 = (\sigma_2^0, \ldots, \sigma_m^0)$. Consecuentemente, $\tau^1(k) = \tau^0(k), k = 2, \ldots, j, \tau^0(1) = 1 = r_0$, y $s_{\tau^0(k)}^1 = s_{2,\tau^0(k)}^0$. Sumando y restando en cada una de las integrales anteriores, los polinomios $\ell_{j,k}(z), k = 1, \ldots, j$, respectivamente, se sigue que

$$\widehat{\vartheta}_{1,j}(z) = \sum_{k=1}^{j} \int_{\Delta_1} \frac{(\ell_{j,k}(x) \mp \ell_{j,k}(z))\widehat{s}^1_{\tau^1(k)}(x) ds^0_{r_0}(x)}{z-x} +$$

$$+ \int_{\Delta_1} \frac{(\ell_{j,1}(x) \mp \ell_{j,1}(z)) ds^0_{r_0}}{z-x} = \sum_{k=1}^{j} \ell_{j,k}(z) \widehat{s}^0_{\tau^0(k)}(z) + \ell_{j,0}(z)$$

que es (4.56) para este caso. En efecto, $\ell_{j,j} \equiv 1, \deg \ell_{j,k} \leq m-2, k = 2, \ldots, j-1$, y $\deg \ell_{j,0} \leq m-3$.

Supongamos que $r_0 > 1$, entonces $s^0_{r_0} = \langle \sigma^0_1, \ldots, \sigma^0_{r_0} \rangle, \Sigma^1 = (\sigma^1_2, \ldots, \sigma^1_m)$ y $S^1 = \mathcal{N}(\Sigma^1) = (s^1_2, \ldots, s^1_m)$ (véase la Sección 4.2). La fórmula (4.59) puede ser escrita del siguiente modo

$$\widehat{\vartheta}_{1,j}(z) = \sum_{k=2}^{j} \int_{\Delta_1} \frac{\ell_{j,k}(x) \widehat{s}^1_{\tau^1(k)}(x) \widehat{s}^0_{2,r_0}(x) d\sigma^0_1(x)}{z-x} + \int_{\Delta_1} \frac{\ell_{j,0}(x) ds^0_{r_0}(x)}{z-x} . \quad (4.60)$$

Ahora necesitamos distinguir entre los índices $k \in \{2, \ldots, j\}$ tales que $\tau^0(k) > r_0$ de los que satisfacen $\tau^0(k) < r_0$.

Sea $k \in \{2, \ldots, j\}$ tal que $\tau^0(k) > r_0$, entonces $\tau^1(k) = \tau^0(k)$ y $s^1_{\tau^1(k)} = s^1_{\tau^0(k)}$. Usando (4.12) con $j = 0$, se sigue que

$$\widehat{s}^1_{\tau^1(k)} \widehat{s}^0_{2,r_0} = \widehat{s}^0_{2,\tau^0(k)} - a_k \widehat{s}^0_{2,r_0} ,$$

donde a_k es una constante, y

$$\int_{\Delta_1} \frac{\ell_{j,k}(x) \widehat{s}^1_{\tau^1(k)}(x) \widehat{s}^0_{2,r_0}(x) d\sigma^0_1(x)}{z-x} = \ell_{j,k}(z) \widehat{s}^0_{\tau^0(k)} - a_k \ell_{j,k}(z) \widehat{s}^0_{\tau^0(1)} + \widetilde{\ell}_{j,k}(z) , \quad (4.61)$$

donde $\deg \ell_{j,k} \leq m-2$ y $\deg \widetilde{\ell}_{j,k} \leq m-3$ si $k \in \{2, \ldots, j-1\}$ y si $\tau^0(j) > r_0$ entonces $\ell_{j,j} \equiv 1, \widetilde{\ell}_{j,j} \equiv 0$.

Supongamos que $k \in \{2, \ldots, j\}$ es tal que $\tau^0(k) < r_0$, entonces $\tau^1(k) = \tau^0(k) + 1$ y $s^1_{\tau^1(k)} = s^1_{\tau^0(k)+1}$. Usando (4.13) con $j = 0$ tenemos que

$$\widehat{s}^1_{\tau^1(k)} \widehat{s}^0_{2,r_0} = \mathcal{L}_k \widehat{s}^0_{2,r_0} + \sum_{\nu=1}^{\tau^0(k)} c_{k,\nu} \widehat{s}^0_{2,\nu} , \quad \widehat{s}^0_{2,1} \equiv 1 ,$$

donde las $c_{k,\nu}$ son constantes, $c_{k,\tau^0(k)} = 1$, y $\mathcal{L}_k$ es un polinomio de grado uno. Observemos que si $\tau^0(k) < r_0$ entonces para todo $\nu = 1, \ldots, \tau^0(k)$, $\nu = \tau^0(\nu')$

donde $\nu' \in \{2,\ldots,k\}$, de lo contrario $n \notin \mathbb{Z}_+^m(*)$. Procediendo como antes, encontramos que

$$\int_{\Delta_1} \frac{\ell_{j,k}(x)\widehat{s}^1_{\tau^1(k)}(x)\widehat{s}^0_{2,r_0}(x)d\sigma^0_1(x)}{z-x} = (\ell_{j,k}\mathcal{L}_k)(z)\widehat{s}^0_{\tau^0(1)}(z)+ \tag{4.62}$$

$$+\ell_{j,k}(z)\sum_{\nu=1}^{\tau^0(k)} c_{k,\nu}\widehat{s}^0_{\tau^0(\nu')}(z) + \widetilde{\ell}_{j,k}(z)\,,$$

donde $\deg \ell_{j,k}\mathcal{L}_k \leq m-1, \deg \widetilde{\ell}_{j,k} \leq m-2$. Si $k = j$ y $\tau^0(j) < r_0$ entonces $c_{k,\tau^0(k)}\ell_{j,j} \equiv 1$. Juntando las relaciones (4.60)-(4.62) y reagrupando los términos, obtenemos (4.56).

La fórmula (4.55) para $j = 1$ es trivial, ya que $\widetilde{\Phi}_{\widetilde{n},1} = \Phi_{n,\tau(1)}$. Para $j = 2,\ldots,m$, usando (4.56) tenemos que

$$\widetilde{\Phi}_{\widetilde{n},j}(z) = \int_{\Delta_1} \frac{(\beta_n Q_n)(x)}{\alpha_n(x)}\frac{\widehat{\vartheta}_{2,j}(x)d\vartheta_1(x)}{z-x} =$$

$$= \int_{\Delta_1} \frac{(\beta_n Q_n)(x)}{\alpha_n(x)}\frac{(\sum_{k=2}^{j}\ell_{j,k}\widehat{s}^1_{\tau^1(k)} + \ell_{j,0})(x)d\vartheta_1(x)}{z-x}\,,$$

donde $\ell_{j,j} \equiv 1$ y τ^1 está definido en términos de $\tau = \tau^0$ como se indicó en (4.58). Para completar la demostración de (4.55) se repiten los argumentos usados en la última parte de la demostración de (4.56), considerando separadamente los casos $j = 1$ y $j = 2,\ldots,m$. Que $\ell_{j,0} \equiv 0$ si $\min\limits_{1\leq i\leq m} n_i \geq m-1, n \in \Lambda$, es consecuencia inmediata de la ortogonalidad. Así concluimos la demostración. □

Tomemos una subsucesión infinita cualquiera $\Lambda' \subset \Lambda$, tal que la misma permutación τ esté asociada a todos los $n \in \Lambda'$. Supongamos que las sucesiones $\{\beta_n\}, \{\alpha_n\}, n \in \Lambda$, cumplen (4.35). Sea $(\overline{\mu}_1,\ldots,\overline{\mu}_m)$ la solución del problema de equilibrio con los datos iniciales (1)-(4) dados en la Sección 4.4. Para cada $j = 1,\ldots,m$, denotemos

$$U_j^{\bar{\mu}} = V^{\bar{\mu}_j} - V^{\bar{\mu}_{j+1}} - v_j\,,$$

$(V^{\widehat{\mu}_{m+1}} \equiv 0)$. Obsérvese que en una vecindad de $z = \infty$ tenemos que

$$U_j^{\bar{\mu}}(z) = \mathcal{O}\left(p_{\tau(j)}\log\frac{1}{|z|}\right) \to -\infty \text{ cuando } z \to \infty\,.$$

Fijemos $j \in \{1,\ldots m\}$. Para $k = 1,\ldots,j$ definimos las regiones

$$D_k^j = \{z \in D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1 : U_k^{\bar{\mu}}(z) > U_i^{\bar{\mu}}(z), i = 1,\ldots,j\}.$$

Algunas D_k^j podrían ser el vacío. Por (4.39) y (4.53) tenemos que la siguiente fórmula asintótica se cumple en D_k^j, excepto en a lo sumo un conjunto discreto de puntos (aquellos donde $u_{j,k} = 0$),

$$\lim_{n \in \Lambda'} |\widetilde{\Phi}_{\tilde{n},j}|^{\frac{1}{|n|}} = \exp U_k^{\bar{\mu}}.$$

Denotemos

$$\xi_j(z) = \max\{U_k^{\bar{\mu}}(z) : k = 1, \dots j\}; \tag{4.63}$$

entonces

$$\lim_{n \in \Lambda'} |\widetilde{\Phi}_{\tilde{n},j}(z)|^{1/|n|} = \exp \xi_j(z), \quad z \in \cup_{k=1}^{j} D_k^j,$$

salvo a lo sumo un conjunto discreto de puntos, y

$$\limsup_{n \in \Lambda'} |\widetilde{\Phi}_{\tilde{n},j}(z)|^{\frac{1}{|n|}} \leq \exp \xi_j(z), \quad z \in D. \tag{4.64}$$

Usando (4.50), (4.52), y (4.64) se deduce que

$$\lim_{n \in \Lambda'} |\widetilde{\delta}_{n,j}(z)|^{1/|n|} = \exp\left(V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + \xi_j\right)(z), \quad z \in \cup_{k=1}^{j} D_k^j \setminus F,$$

salvo a lo sumo en un conjunto discreto de puntos, y

$$\limsup_{n \in \Lambda'} |\widetilde{\delta}_{n,j}(z)|^{1/|n|} \leq \exp(V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + \xi_j)(z), \quad z \in D. \tag{4.65}$$

Las fórmulas (4.64) y (4.65) se cumplen uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

El conjunto

$$\Omega_j^c = \{z \in D : (V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + \xi_j)(z) < 0\}$$

es el dominio de convergencia a $\widehat{\vartheta}_{1,j}$ de los aproximantes $\widetilde{R}_{\tilde{n},j}$. Dicho conjunto contiene una vecindad del infinito, siempre que $|\alpha| < 1 + |\beta| + p_{\tau(j)}$, porque cuando $z \to \infty$,

$$(V^{\widehat{\mu}_1} + f_1 + \xi_j)(z) = \mathcal{O}\left((1 + |\beta| + p_{\tau(j)} - |\alpha|) \log \frac{1}{|z|}\right) \to -\infty.$$

Por suposición se tiene que $|\alpha| \leq 1 + |\beta| + p_{\tau(m)}$ ya que para todo $n \in \Lambda, \deg \alpha_n \leq |n| + \deg \beta_n + \min\{n_i : i = 1, \dots, m\}$. Ahora, para tener convergencia en una vecindad de infinito es suficiente que $p_{\tau(j)} > p_{\tau(m)}$ ó $|\alpha| \leq 1 + |\beta| + p_{\tau(m)}$. Entonces la convergencia es uniforme en compactos de Ω_j^c y la velocidad es geométrica. Puede haber también un dominio no vacío de divergencia dado por

$$\Omega_j^d = \{z \in D : (V^{\widehat{\mu}_1} + f_1 + \xi_j)(z) > 0\}.$$

Teorema 4.10 *Supongamos que $\sigma_1' > 0$ en casi todo punto de Δ_1, y $\sigma_j \in$* **Reg** *para $j = 2, \ldots, m$. También suponemos que se cumplen (4.34) y (4.35). Tomemos cualquier subsucesión infinita $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que la misma permutación τ esté asociada a todos los $n \in \Lambda'$. Entonces, para cada $j = 1, \ldots, m$, tenemos*

$$\lim_{n\in\Lambda'} |\Phi_{n,\tau(j)}(z)|^{1/|n|} = \exp \xi_j(z), \quad z \in \cup_{k=1}^{j} D_k^j \,,$$

salvo a lo sumo en un conjunto discreto de puntos, y

$$\limsup_{n\in\Lambda'} |\Phi_{n,\tau(j)}(z)|^{\frac{1}{|n|}} \le \exp \xi_j(z), \quad z \in D. \tag{4.66}$$

Para los restos tenemos que

$$\lim_{n\in\Lambda'} |(\widehat{s}_{\tau(j)} - R_{n,\tau(j)})(z)|^{1/|n|} = \exp(V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + \xi_j)(z), \quad z \in \cup_{k=1}^{j} D_k^j \setminus F,$$

salvo a lo sumo un conjunto discreto de puntos, y

$$\lim_{n\in\Lambda'} |(\widehat{s}_{\tau(j)} - R_{n,\tau(j)})(z)|^{1/|n|} \le \exp(V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + \xi_j)(z), \quad z \in D. \tag{4.67}$$

En cada caso la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de las regiones indicadas. Las regiones de convergencia y divergencia vienen dadas por Ω_j^c y Ω_j^d respectivamente.

Demostración. La fórmula (4.66) y la inmediata anterior se deducen de (4.54) y (4.64). Notemos que (4.34) implica que $\ell_{j,0} \equiv 0$ para todo $n \in \Lambda$. La fórmula (4.67) y la previa son consecuencia directa de (4.49), (4.50) y (4.66). □

Para garantizar un dominio de convergencia lo más amplio posible, introducimos una restricción adicional sobre la sucesión de polinomios $\{\beta_n\}, n \in \Lambda$, los cuales cargan los polos fijos. Algún tipo de restricción es necesaria, porque una selección arbitraria de los polos fijos puede impedir la convergencia.

Supongamos que

$$\beta \le (\overline{\mu}_2 + \alpha)' + (2\theta_1 + |\beta| - \theta_2 - |\alpha|)\omega_{\Delta_1} \,, \tag{4.68}$$

donde $(\overline{\mu}_2 + \alpha)'$ denota el barrido de $\overline{\mu}_2 + \alpha$ sobre Δ_1 y ω_{Δ_1} denota la medida de equilibrio en Δ_1. El miembro derecho de (4.68) es una medida positiva, ya que

$$\theta_2 + |\alpha| \le \theta_2 + 1 + |\beta| + p_{\tau(m)} = 2 + |\beta| + p_{\tau(m)} - p_{\tau(1)} \le 2\theta_1 + |\beta|,$$

puesto que $\theta_1 = 1$ y $p_{\tau(m)} - p_{\tau(1)} \le 0$. La desigualdad en (4.68) significa que la medida en el miembro derecho domina a la del miembro izquierdo en cualquier conjunto de Borel. Esta condición podría parecer un poco extraña, puesto que $\overline{\mu}_2$, que está en el miembro derecho de (4.68), depende de β. En cualquier caso, la condición podría ser examinada después de haber resuelto el problema de equilibrio. Por otra parte, es suficiente tomar

$$\beta \leq \alpha' + (2\theta_1 + |\beta| - \theta_2 - |\alpha|)\omega_{\Delta_1}$$

para que se cumpla (4.68). Aquí, antes de examinar la condición sobre β sólo tenemos que determinar cuánta masa queremos que tenga y luego seleccionar cualquier medida con esa cantidad de masa dominada por el miembro derecho de esta desigualdad. Por supuesto, si $\beta = 0$ entonces (4.68) se satisface. Este es el caso cuando no hay polos fijos (AMHP).

Lema 4.6 *Sea* $(\overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_m)$ *la solución del problema de equilibrio con los datos iniciales* (1) – (4) *dados en la Sección 4.4. Supongamos que se cumple (4.68). Entonces*

$$2\overline{\mu}_1 + \beta = (\overline{\mu}_2 + \alpha)' + (2\theta_1 + |\beta| - \theta_2 - |\alpha|)\omega_{\Delta_1}\,.$$

En particular,

$$(W_1^{\overline{\mu}} + f_1)(x) = w_1^{\overline{\mu}}\,, \quad x \in \Delta_1\,.$$

Demostración. De acuerdo con el Teorema 4.7 tenemos que

$$(W_1^{\overline{\mu}} + f_1)(x) = (2V^{\overline{\mu}_1} + V^{\beta} - V^{\overline{\mu}_2+\alpha})(x) = w^{\overline{\mu}_1}\,, \quad x \in \mathrm{sop}(\overline{\mu}_1)\,.$$

Por otra parte, del Corolario 4.1 se tiene que

$$\lambda = (\overline{\mu}_2 + \alpha)' + (2\theta_1 + |\beta| - \theta_2 - |\alpha|)\omega_{\Delta_1}$$

es la única medida en $\mathcal{M}_{2\theta_1+|\beta|}(\Delta_1)$ tal que

$$(V^{\lambda} - V^{\overline{\mu}_2+\alpha})(x) = w^{\lambda}\,, \quad x \in \mathrm{sop}(\lambda) = \Delta_1\,.$$

Debido a (4.68) podemos escribir $\lambda = 2\frac{\lambda-\beta}{2} + \beta$ con $\frac{\lambda-\beta}{2} \in \mathcal{M}_{\theta_1}(\Delta_1)$ y de la última relación obtenemos que

$$(2V^{(\lambda-\beta)/2} + V^{\beta} - V^{\overline{\mu}_2+\alpha})(x) = w^{\lambda}\,, \quad x \in \mathrm{sop}(\lambda) = \Delta_1\,.$$

Usando de nuevo el Corolario 4.1 con campo externo igual a $(V^{\beta} - V^{\overline{\mu}_2+\alpha})(x)$, de la unicidad de la solución, obtenemos que $\overline{\mu}_1 = \frac{\lambda-\beta}{2}$ lo cual es la primera afirmación de este Lema, y la segunda se deduce inmediatamente de esta relación. $\square$

Bajo restricciones adicionales, en el siguiente corolario obtenemos convergencia en la mayor región posible.

Corolario 4.2 *Supongamos que $\sigma_1' > 0$ en casi todo punto de Δ_1 y $\sigma_j \in$* **Reg**, *para $j = 2, \ldots, m$. Supongamos que se cumplen (4.34), (4.35), (4.68) y que $|\alpha| < 1 + |\beta| + p_{\tau(m)}$. Tomemos cualquier sucesión infinita $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que la misma permutación τ está asociada a todo $n \in \Lambda'$. Entonces $\Omega_j^c = D$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Para cada j, el número de regiones no vacías D_k^j, $k = 1, \ldots, j$, en las cuales tenemos diferentes fórmulas asintóticas para las sucesiones $\{|\delta_{n,\tau(j)}|^{1/|n|}\}$ y $\{|\Phi_{n,\tau(j)}|^{1/|n|}\}$, $n \in \Lambda'$, según se describe en el Teorema 4.10 es a lo sumo una más que el número de desigualdades estrictas en la cadena $p_{\tau(1)} \geq \ldots \geq p_{\tau(j)}$.*

Demostración Para la prueba, vamos a seguir un proceso de inducción en j. Si $j = 1$ tenemos que (véase 4.67)

$$\limsup_{n\in\Lambda'} |\delta_{n,\tau(1)}(z)|^{1/|n|} \leq \exp(W_1^{\overline{\mu}}(z) - w_1^{\overline{\mu}}), \quad z \in D.$$

Del Lema 4.6 tenemos que $W_1^{\overline{\mu}}(z) - w_1^{\overline{\mu}} = 0$ en Δ_1. Por otra parte, $W_1^{\overline{\mu}}$ es subarmónica en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1$ y

$$W_1^{\overline{\mu}}(z) = \mathcal{O}\left((1 + |\beta| + p_{\tau(1)} - |\alpha|)\log\frac{1}{|z|}\right) \to -\infty, \quad \text{cuando } z \to \infty.$$

Por tanto, $W_1^{\overline{\mu}}(z) - w_1^{\overline{\mu}} < 0$ en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1$, que es lo que necesitabamos probar.

Supongamos que el Corolario es válido para $j-1$ donde $j \in \{2, \ldots, m\}$ y probemos que también es cierto para j. Del Teorema 4.10 sabemos que

$$\limsup_{n\in\Lambda'} |\delta_{n,\tau(1)}(z)|^{1/|n|} \leq \exp(V_1^{\overline{\mu}} + f_1 + \xi_j)(z), \quad z \in D\,.$$

Obviamente, $\xi_j(z) = \max\{\xi_{j-1}(z), U_j(z)\}$. Consideremos la diferencia

$$U_j(z) - U_{j-1}(z) = W_j^{\overline{\mu}}(z) - w_j^{\overline{\mu}} = \mathcal{O}\left((p_{\tau(j)} - p_{\tau(j-1)})\log\frac{1}{|z|}\right)$$

que tiende a $-\infty$ cuando $z \to \infty$.

Si $p_{\tau(j)} = p_{\tau(j-1)}$ entonces $W_j^{\overline{\mu}}(z) - w_j^{\overline{\mu}}$ es subarmónica en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{sop}(\overline{\mu_j})$ y es igual a cero en $\mathrm{sop}(\overline{\mu}_j)$. Luego, $U_j(z) \leq U_{j-1}(z) \leq \xi_{j-1}(z)$ en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{sop}(\overline{\mu}_j)$. Por tanto, usando la condición de equilibrio, $U_j(z) = U_{j-1}(z)$ en Δ_j y $U_j(z) < U_{j-1}(z)$ en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j$. En este caso, $\xi_j(z) = \xi_{j-1}(z)$, $z \in D$, y la conclusión se obtiene de la hipótesis de inducción.

Si $p_{\tau(j)} < p_{\tau(j-1)}$, entonces en una vecindad de ∞ tenemos que $U_j(z) > U_{j-1}(z)$ ya que $(p_{\tau(j)} - p_{\tau(j-1)})\log\frac{1}{|z|} \to +\infty$ cuando $z \to \infty$. Sea $\Gamma = \{z \in D : U_j(z) = U_{j-1}(z)\}$. Este conjunto contiene a $\mathrm{sop}(\overline{\mu})$ y parte a D en dos regiones: $\Omega_1 = \{z \in D : U_j(z) > U_{j-1}(z)\}$, que contiene a $z = \infty$; y $\Omega_2 = \{z \in D : U_j(z) < U_{j-1}(z)\}$.

Como $U_{j-1}(z) \leq \xi_{j-1}(z)$, en $\Omega_2 \cup \Gamma$ se tiene que $\xi_{j-1}(z) = \xi_j(z)$ y, por tanto,

$$\left(V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + \xi_j\right)(z) < 0$$

en $\Omega_2 \cup \Gamma$. En Ω_1 la función $V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + U_j$ es subarmónica y en su frontera Γ es igual a $V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + U_{j-1}$. Como

$$\left(V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + U_j\right)(z) \to -\infty \quad \text{cuando } z \to \infty,$$

se sigue que en Ω_1 tenemos que

$$\left(V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + U_j\right)(z) < 0.$$

Luego, en Ω_1 también se tiene que $V^{\overline{\mu}_1} + f_1 + \xi_j < 0$. Con esto concluimos la demostración. $\square$

Capítulo 5

Cuadraturas simultáneas

5.1. Fórmulas de cuadraturas

Sea $S = (s_1, \ldots, s_m)$ un sistema de m medidas finitas de Borel. Según el artículo [6], el problema de calcular la intensidad correspondiente a cada color de una luz policromática que incide sobre un cuerpo, conduce a evaluar varias integrales de la forma $\int f(x) ds_k(x), k = 1, \ldots, m$. Con este fin los autores de [6] implementaron un esquema de cálculo con m fórmulas de cuadraturas cuyos $N \in \mathbb{N}$ nodos son los mismos en todas y el integrando es común. De esta forma se evalúan las integrales simultáneamente. Es cierto que podríamos usar para cada integral la fórmula de cuadratura de Gauss-Jacobi. En tal caso, supongamos que queremos cuadraturas que sean exactas para polinomios de grado $N-1$. Para cada una de las m medidas debemos evaluar el polinomio en N nodos distintos, lo que significa evaluar en mN nodos. Sin embargo, con el esquema introducido en [6] sólo habría que evaluar el polinomio N veces, y así se disminuye el error de redondeo que se debe a la introducción de datos.

Definición 5.1.1 Sean $x_1, \ldots, x_N$, N puntos distintos que se encuentran en $\mathrm{Co}(\cup_{k=1}^{m}(\mathrm{sop}(s_k)))$ y α es un polinomio mónico con coeficientes reales que no se anula en $\mathrm{Co}(\cup_{k=1}^{m}(\mathrm{sop}(s_k)))$ de grado $\leq N-1$. Decimos que tenemos un esquema interpolatorio de **cuadraturas racionales simultáneas** para S de orden N si para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$ podemos encontrar coeficientes $\lambda_{k,j}$, $j = 1, \ldots, N$ tales que

$$\int \frac{p(x)}{\alpha(x)} ds_k(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{k,j} \frac{p(x_j)}{\alpha(x_j)}, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{5.1}$$

para todo p perteneciente al espacio vectorial $\mathcal{P}_{N-1}$ de los polinomios de grado a lo sumo $N-1$.

Lema 5.1 *Sea $S = (s_1, \dots s_m)$ un sistema de m medidas finitas de Borel cuyos soportes están contenidos en el eje real. Para cualquier sistema de puntos distintos, $x_1, \dots, x_N$, contenidos en $\mathbb{R}$ siempre se puede encontrar un esquema interpolatorio de cuadraturas racionales simultáneas donde para cada $k = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, N$*

$$\lambda_{k,j} = \int \frac{\alpha(x_j)}{\alpha(x)} \frac{Q(x)ds_k(x)}{Q'(x_j)(x - x_j)},$$

donde $Q(x) = \prod_{j=1}^{N}(x - x_j)$.

Demostración. De la fórmula de interpolación de Lagrange tenemos que para todo $p \in \mathcal{P}_{N-1}$

$$\frac{p(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{\alpha(x)} \sum_{j=1}^{N} \frac{Q(x)p(x_j)}{Q'(x_j)(x - x_j)}.$$

Integrando con respecto a s_k, $k = 1, \dots, m$, llegamos a

$$\int \frac{p(x)}{\alpha(x)} ds_k(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{p(x_j)}{\alpha(x_j)} \int \frac{\alpha(x_j)}{\alpha(x)} \frac{Q(x)ds_k(x)}{Q'(x_j)(x - x_j)} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{k,j} \frac{p(x_j)}{\alpha(x_j)}$$

que es lo que debíamos probar. □

En este capítulo buscaremos esquemas de cuadraturas racionales simultáneas para una clase de funciones f que intentaremos sea lo más amplia posible; por ejemplo, las funciones continuas en $\mathrm{Co}(\cup_{k=1}^{m}(\mathrm{sop}(s_k)))$ ó analíticas en una vecindad de este conjunto. Estudiaremos las propiedades de convergencia de tales esquemas de cuadraturas para distintas clases de funciones. Más precisamente, dados una sucesión de polinomios $\{\alpha_N\}, \deg \alpha_N \leq N - 1$, y una colección triangular de nodos $\{x_{N,j}\}, N \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, N$, contenidos en $\mathrm{Co}(\cup_{k=1}^{m}(\mathrm{sop}(s_k)))$, nuestro objetivo es demostrar que

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{N,k,j} f(x_{N,j}) = \int f(x) ds_k(x), \quad k = 1, \dots, m,$$

donde

$$\lambda_{N,k,j} = \int \frac{\alpha_N(x_j)}{\alpha_N(x)} \frac{Q_N(x)ds_k(x)}{Q'_N(x_j)(x - x_j)},$$

y f es una función perteneciente a una clase lo más amplia posible.

Otra cuestión de importancia es lo relacionado con la estabilidad del método numérico. Para esto es conveniente tener que

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{N} |\lambda_{N,k,j}| < \infty, \quad k = 1, \dots, m.$$

Mejor aún, es que para cada k y N fijos los coeficientes $\lambda_{N,k,j}, j = 1, \ldots, N$, conserven el mismo signo. En este caso, usando (5.1) con $p \equiv \alpha$ se tiene que

$$|s_k| = |\int ds_k(x)| = |\sum_{N,k,j} \lambda_{N,k,j}| = \sum_{N,k,j} |\lambda_{N,k,j}|\,,$$

obteniéndose la acotación uniforme de los coeficientes $\lambda_{N,k,j}$ requerida en el párrafo anterior.

Como en el caso de la cuadratura de Gauss-Jacobi, nos podemos preguntar cómo hay que seleccionar los nodos $x_1, \ldots, x_N$ para que las fórmulas de cuadraturas sean exactas en una clase de polinomios lo más amplia posible. A diferencia del caso $m = 1$ veremos que, en general, para cuadraturas simultáneas este problema no está bien planteado. Con esto queremos decir que tal problema podría no tener solución ó tener infinitas soluciones. La existencia de solución puede requerir nodos de multiplicidad mayor que 1 ó que algunos estén fuera de $\mathrm{Co}(\cup_{k=1}^m(\mathrm{sop}(s_k)))$. Por otro lado, aún cuando el problema tiene solución única, no siempre podemos afirmar que los coeficientes de la cuadratura tengan igual signo.

En este Capítulo enunciaremos algunos resultados generales sobre ciertos esquemas de cuadraturas simultáneas de tipo Gauss–Jacobi, sus conexiones con la aproximación multipuntual Hermite-Padé, ó Hermite-Padé, sus propiedades de convergencia, y velocidad de convergencia. Sobre esto versará la Sección 5.2. En la Sección 5.3 haremos énfasis en el caso en que el sistema de medidas S sea un sistema de Nikishin.

5.2. Coeficientes de Nikishin-Christoffel.

En las Secciones 3.2 y 4.1 se introdujeron los conceptos de aproximación multipuntual Hermite-Padé y aproximación generalizada Hermite-Padé, respectivamente, ambos referidos a sistemas de Nikishin; sin embargo se pueden generalizar tales conceptos para sistemas de funciones $\widehat{S} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_m)$ arbitrario (véanse (3.2) y (4.1)) donde $S = (s_1, \ldots, s_m)$ es un sistema general de medidas finitas de Borel en el eje real. Como dijimos en la Sección 4.1, la aproximación generalizada Hermite-Padé es una extensión de la multipuntual, donde en (4.1) se toma $\beta \equiv 1$. A su vez, la aproximación multipuntual Hermite-Padé generaliza la aproximación Hermite-Padé, tomando en (3.2) $\alpha \equiv 1$.

Sea $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$. Sea α_n un polinomio mónico de coeficientes reales que no se anula en $\mathrm{Co}(\cup_{i=1}^m(\mathrm{sop}(s_i))$, tal que $\deg \alpha_n < |n| +$

$\min\{n_1, \ldots, n_m\}$. $R_n = (P_{n,1}/Q_n, \ldots, P_{n,m}/Q_n)$ es el AMHP (según la definición en la Sección 3.2) de $\widehat{S}$ relativo al par (n, α_n). Para Q_n tenemos las relaciones de ortogonalidad (3.5)

$$0 = \int x^\nu Q_n(x) \frac{ds_k(x)}{\alpha_n(x)}, \quad k = 0, \ldots, n_k - 1, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{5.2}$$

Según la Sección 2.1, Q_n es un polinomio ortogonal múltiple relativo al multiíndice n y a $\widetilde{S} = (\widetilde{s}_1, \ldots, \widetilde{s}_m)$, donde

$$d\widetilde{s}_k = \frac{ds_k}{\alpha_n}, \, .$$

En lo que sigue tomaremos a Q_n mónico.

Como vimos en la Sección 3.2, el vector R_n está univocamente determinado por el polinomio Q_n. Luego, si n es débilmente normal con respecto al sistema de medidas $\widehat{S}$, entonces el vector R_n es único. Si, además, n es fuertemente normal, se puede escribir

$$\frac{P_{n,k}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{j=1}^{|n|} \frac{\lambda_{n,k,j}}{z - x_{n,j}}, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{5.3}$$

donde $Q_n(z) = \prod_{j=1}^{|n|}(z - x_{n,j})$ y

$$\begin{aligned} \lambda_{n,k,j} &= \lim_{z \to x_{n,j}} \frac{z - x_{n,j}}{Q_n(z)} \int \frac{\alpha_n(x_j)}{\alpha_n(x)} \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} ds_k(x) \\ &= \int \frac{Q_n(x)\alpha_n(x_j) ds_k(x)}{Q_n'(x_{n,j})\alpha_n(x)(x - x_{n,j})} \, . \end{aligned} \tag{5.4}$$

En el siguiente lema ampliamos el espacio para los cuales se obtienen fórmulas de cuadratrura racionales e interpolatorias exactas.

Definición 5.2.1 Los números definidos por (5.4) los llamamos **coeficientes de Nikishin–Christoffel**.

Lema 5.2 *Sea n fuertemente normal para el sistema $\widetilde{S} = (\widetilde{s}_1, \ldots, \widetilde{s}_m)$. Entonces, para cada $k = 1, \ldots, m$ tenemos que*

$$\int \frac{p(x)}{\alpha_n(x)} ds_k(x) = \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} \frac{p(x_j)}{\alpha_n(x_j)}, \quad p \in \mathcal{P}_{|n|+n_k-1} \, .$$

Demostración. Fijemos $k \in \{1, \ldots, m\}$ y supongamos que $p \in \mathcal{P}_{|n|+n_k-1}$. Sea

$$\ell(x) = \sum_{j=1}^{|n|} \frac{Q_n(x)p(x_j)}{Q'_n(x_{n,j})(x - x_{n,j})}$$

el polinomio de Lagrange de grado $|n| - 1$ que interpola a p en los ceros de Q_n. Por la definición de ℓ se sigue que

$$p(x) - \ell(x) = Q_n(x)q(x)$$

donde $q \in \mathcal{P}_{n_k-1}$. Por tanto, de (5.2) y (5.4) tenemos que

$$0 = \int \frac{(p-\ell)(x)}{\alpha_n(x)} ds_k(x)$$

$$= \int \frac{p(x)}{\alpha_n(x)} ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \frac{p(x_j)}{\alpha_n(x_{n,j})} \int \frac{\alpha_n(x_{n,j})}{\alpha_n(x)} \frac{Q_n(x) ds_k(x)}{Q'_n(x_{n,j})(x - x_{n,j})}$$

$$= \int \frac{p(x)}{\alpha_n(x)} ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} \frac{p(x_{n,j})}{\alpha_n(x_{n,j})},$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Nota 5.1 Para el caso de multi-índices normales (con ceros no necesariamente distintos) se pueden obtener fórmulas de cuadratura simultáneas similares, exactas para todo $p \in \mathcal{P}_{|n|+n_k-1}$. Ahora bien, en el miembro derecho aparecerán todas las derivadas del polinomio hasta la multiplicidad correspondiente a cada cero de Q_n menos uno.

En el Lema 5.2 tenemos exactitud con respecto a cada medida para todo polinomio de grado $\leq |n| - 1$. Esto significa que las cuadraturas dadas en este lema son de tipo interpolatorio.

En términos de los coeficientes de Nikishin–Christoffel, distinguimos varios casos. Sea $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ una sucesión de multi-índices cada uno fuertemente normal y $\{\alpha_n : n \in \Lambda\}$ una sucesión de polinomios mónicos, tales que $\deg \alpha_n < |n| + \min\{n_1, \ldots, n_m\}$. Fijemos $k \in \{1, \ldots, m\}$.

A) Para cada $n \in \Lambda$ todos los $\lambda_{n,k,j}, j = 1, \ldots, |n|$, tienen el mismo signo.

B)
$$\sup_{n \in \Lambda} \sum_{j=1}^{|n|} |\lambda_{n,k,j}| \leq C < \infty.$$

C)

$$\sum_{j=1}^{|n|} |\lambda_{n,k,j}| \leq C|n|^{\eta} < \infty\,, \quad \eta \in (0,+\infty)\,, \quad n \in \Lambda\,.$$

D)

$$\sum_{j=1}^{|n|} |\lambda_{n,k,j}| \leq C|n|^{\eta(n)} < \infty\,, \quad \lim_{n\in\Lambda} \eta(n) \log|n|/(|n|) = 0\,.$$

Es evidente que $A) \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D)$. Dependiendo de qué condiciones impongamos A), B), C) ó D) se puede probar que

$$\lim_{n\in\Lambda} \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j}) = \int f(x)ds_k(x)\,, \tag{5.5}$$

para f perteneciente a clases de funciones de distinto grado de generalidad.

Para las condiciones A), B) y C) vamos a restringir el estudio al caso en que $\alpha_n \equiv 1, n \in \Lambda$. O sea, en estos casos sólo vamos a considerar cuadraturas simultáneas interpolarias polinomiales.

El próximo lema (referido al caso $\alpha_n \equiv 1$) es un compendio de resultados conocidos que nos serán necesarios para deducir ciertas propiedades de convergencia en los esquemas de cuadraturas simultáneas. Antes de enunciarlo necesitamos recordar la siguiente clase de funciones.

Denotamos por $\mathrm{Lip}_\kappa([a,b]), 0 \leq \kappa \leq 1$, a la clase de todas funciones complejas f definidas en el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\kappa}\,, \quad x, y \in [a,b]\,.$$

Decimos que $f \in \mathrm{Lip}_\kappa([a,b]), 1 < \kappa < \infty$, si la $[\kappa]$-ésima derivada de f existe y está en $\mathrm{Lip}_{\kappa-[\kappa]}([a,b])$, donde $[\kappa]$ denota la parte entera de κ.

Lema 5.3 *Sea S un sistema de medidas y $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ una sucesión de multiíndices fuertemente normales distintos entre si. Denotamos por Δ al menor intervalo que contiene a $\cup_{i=1}^m \mathrm{sop}(s_i)$.*

- A) *implica (5.5) para toda función Riemann integrable f en Δ.*
- B) *implica (5.5) para toda función continua f en Δ.*
- C) *implica (5.5) para toda $f \in Lip_\kappa(\Delta), \kappa > \eta$. Más aún,*

$$\left| \int f(x)ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j}) \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|n|^{\kappa-\eta}}\right)\,. \tag{5.6}$$

Demostración. Las primeras dos afirmaciones pueden encontrarse en los Teoremas 15.2.2 y 15.2.1, respectivamente, de [50]. La tercera también es conocida. Obsérvese que para cada $p \in \mathcal{P}_{|n|-1}$, usando la fórmula de cuadratura, obtenemos

$$\left| \int f(x) ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j}) \right| \leq \int |f(x) - p(x)||ds_k(x)|$$

$$+ \sum_{j=1}^{|n|} |\lambda_{n,k,j}||f(x_{n,j}) - p(x_{n,j})| \, .$$

Por tanto,

$$\left| \int f(x) ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j}) \right| \leq (|s_k| + C|n|^{\eta}) \, E_{|n|-1}(f) \, ,$$

donde $E_{|n|-1}(f)$ denota la mejor aproximación de f en Δ mediante polinomios de grado $|n|-1$ en la norma del supremo. Del Teorema de Jackson (ver página 147 en [17]), tenemos que si $f \in \mathrm{Lip}_{\kappa}(\Delta)$ entonces $E_{|n|-1}(f) \leq C_1/|n|^{\kappa}$ donde C_1 no depende de $n \in \Lambda$. De aquí se sigue (5.5) para esta clase de funciones cuando $\kappa > \eta$, y obtenemos el estimado del error dado en (5.6). $\square$

Nota 5.2 En las tres afirmaciones del Lema 5.3 la condición sobre f, podía haberse dado en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))$, en vez de en todo Δ. Esto se debe a que cualquier función Riemann integrable, continua, ó Lip_{κ} definida únicamente en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))$, puede ser extendida a otra función de la misma clase a todo Δ. Como la integral sólo depende de los valores de la función en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))$ esto significa que los nodos que están en $\Delta \setminus \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))$ no contribuyen a la evaluación aproximada de la integral. Desde el punto de vista práctico es mejor pensar que la función se extiende dándole el valor cero fuera de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))$. Ahora bien, debemos aclarar que tal extensión no siempre preserva la clase en los casos segundo y tercero.

Hagamos ahora una incursión en el caso en que α_n es de la forma general indicada anteriormente. Para cada $t \in D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, la función φ_t denota la representación conforme de D en $\{w : |w| < 1\}$ tal que $\varphi_t(t) = 0$ y $\varphi_t'(t) > 0$.

Lema 5.4 *Sea S un sistema de medidas finitas de Borel y $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ una sucesión de multi-índices fuertemente normales distintos entre si. Denotamos por Δ al menor intervalo que contiene a $\cup_{i=1}^m \mathrm{sop}(s_i)$. Para cada n sea $\{y_{n,1}, \ldots y_{n,\deg \alpha_n}\}$ el conjunto de los ceros del polinomio con coeficientes reales*

$\alpha_n, \deg \alpha_n < |n| + \text{mín}\{n_1, \ldots, n_m\}$. *Supongamos que los ceros de todos los polinomios* α_n *están contenidos en un subconjunto compacto* F *de* $D = \overline{\mathbb{C}} \backslash \Delta$. *Entonces,*

• D) *implica que*

$$\limsup_{n\in\Lambda} \left\| \widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n} \right\|_K^{1/(|n|+\text{mín}\, n_i)} \leq \delta_K < 1\,, \quad K \subset D\,, \tag{5.7}$$

donde $\|\cdot\|_K$ *denota la norma del supremo en* K *y*

$$\delta_K = \sup\{\|\varphi_t\|_K : t \in F \cup \{\infty\}\}\,.$$

Si f *es analítica en una vecindad* $\mathcal{V}$ *de* Δ $(f \in H(\mathcal{V}))$, *entonces*

$$\lim_{n\in\Lambda} \left| \int f(x) ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j}) \right|^{1/(|n|+\text{mín}\, n_i)} \leq \delta(\mathcal{V}) < 1\,, \tag{5.8}$$

donde $\delta(\mathcal{V}) = \text{ínf}\{\delta_{\gamma_\rho} : \gamma_\rho \subset \mathcal{V}\}$ *y* $\gamma_\rho = \{z : |\varphi_\infty(z)| = \rho\}$, $0 < \rho < 1$.

Demostración. Probemos (5.7). Para un compacto $K \subset D$, denotemos por $d(K, \Delta) = \text{ínf}\{|z - x| : z \in K, x \in \Delta\}$ la distancia euclídea en $\mathbb{C}$ entre los dos conjuntos.

Como n es fuertemente normal, usando (5.3) y D), para cada compacto $K \subset D$ tenemos que

$$\left\| \frac{P_{n,k}(z)}{Q_n(z)} \right\|_K \leq \frac{C|n|^{\eta(n)}}{d(K, \Delta)}\,.$$

Por otro lado, $\|\widehat{s}_k\|_K \leq |s_k|/d(K, \Delta)$. Por lo tanto, existe una constante positiva C_1 tal que

$$\left\| \widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}(z)}{Q_n(z)} \right\|_K \leq \frac{C_1|n|^{\eta(n)}}{d(K, \Delta)}\,.$$

A partir de este momento, la demostración de (5.7) se asemeja a la del Teorema 3.32.

Denotemos $\omega_n = |n| + \text{mín}\, n_i$ y $v_n = \deg \alpha_n$. Como n es fuertemente normal, de *ii*) en (3.2) podemos asegurar que

$$\frac{\widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n}}{\varphi_\infty^{\omega_n - v_n} \prod_{j=1}^{v_n} \varphi_{y_{n,j}}} \in H(D)\,.$$

Sea $\gamma_\rho = \{z : |\varphi_\infty(z)| = \rho\}, 0 < \rho < 1$. Tomemos ρ lo suficientemente próximo a 1 de modo que $F \subset \text{Ext}(\gamma_\rho)$. Entonces

$$\left\| \frac{\widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n}}{\varphi_\infty^{\omega_n - v_n} \prod_{j=1}^{v_n} \varphi_{y_{n,j}}} \right\|_{\gamma_\rho} \leq \frac{C_1|n|^{\eta(n)}}{d(\gamma_\rho, \Delta)\kappa(\gamma_\rho)^{\omega_n}}\,, \tag{5.9}$$

donde
$$\kappa(\gamma_\rho) = \text{ínf}\{|\varphi_t(z)| : z \in \gamma_\rho,\, t \in F \cup \{\infty\}\} > 0\,.$$
Si consideramos $|\varphi_t(z)|$ como una función de las dos variables z y t, es fácil verificar su continuidad en $\overline{\mathbb{C}}^{\,2}$. Luego $\kappa(\gamma_\rho) > 0$ ya que $\gamma_\rho \cap (F \cup \infty) = \emptyset$ y dicha función sólo se anula cuando $z = t$.

Fijemos un compacto $K \in D$ y tomemos ρ lo suficiente cerca de 1 como para que $(K \cup F) \subset \text{Ext}(\gamma_\rho)$. Como la función que está dentro del signo de la norma en (5.9) es analítica en D, por el principio del máximo, de esa desigualdad se obiene que
$$\left\|\widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n}\right\|_K \leq \frac{C_1|n|^{\eta(n)}}{d(\gamma_\rho,\Delta)\kappa(\gamma_\rho)^{\omega_n}}\left\|\varphi_\infty^{\omega_n - v_n}\prod_{j=1}^{v_n}\varphi_{y_{n,j}}\right\|_K .$$
Luego,
$$\left\|\widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n}\right\|_K \leq \frac{C_1|n|^{\eta(n)}}{d(\gamma_\rho,\Delta)\kappa(\gamma_\rho)^{\omega_n}}\delta_K^{\omega_n} .$$
De aqui se deduce que
$$\limsup_{n\in\Lambda}\left\|\widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n}\right\|_K^{1/\omega_n} \leq \frac{1}{\kappa(\gamma_\rho)}\delta_K\,.$$
Haciendo $\rho \to 1$, obtenemos que
$$\limsup_{n\in\Lambda}\left\|\widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n}\right\|_K^{1/\omega_n} \leq \delta_K$$
como queríamos probar. Que $\kappa(\gamma_\rho) \to 1$ cuando $\rho \to 1$ y que $\delta_K < 1$ también son consecuencia de la continuidad de la función $|\varphi_t(z)|$ como función de dos las variables t y z puesto que dicha función vale 1 si y solo si $z, t \in \Delta$.

Para concluir demostraremos que (5.7) implica (5.8). Usando (5.3), la fórmula integral de Cauchy, y el Teorema de Fubini, se tiene
$$\int f(x)ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|}\lambda_{n,k,j}f(x_{n,j}) = \frac{1}{2\pi i}\int\int_{\gamma_\rho} f(z)\frac{dz}{z-x}ds_k(x)$$
$$-\sum_{j=1}^{|n|}\lambda_{n,k,j}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(z)\frac{dz}{z-x_{n,j}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(z)\left(\widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n}\right)(z)dz\,.$$
Por tanto,
$$|\int f(x)ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|}\lambda_{n,k,j}f(x_{n,j})| \leq C_2\|f\|_{\gamma_\rho}\|\widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n}\|_{\gamma_\rho}\,,$$

donde C_2 denota la longitud de γ_ρ dividida por 2π. Usando (5.7) de esta desigualdad se obtiene (5.8) de manera inmediata. □

Como hemos visto, es difícil encontrar multi–índices fuertemente normales y más complicado aún demostrar que se verifica alguna de las condiciones A)-D). Por el momento, centraremos nuestra atención en sistemas de medidas generales, pero restringiremos el tipo de multi–índices para garantizar la normalidad fuerte y que se cumpla alguna de las condiciones A)-D). En el próximo teorema nos restringiremos nuevamente al caso en que para todo $n \in \Lambda, \alpha_n \equiv 1$.

Sea σ una medida positiva finita de Borel soportada en un compacto de $\mathbb{R}$ y $S = (s_1, \ldots, s_m)$ tal que $ds_k(x) = w_k(x)d\sigma(x), w_k \in L_1(\sigma), k \in \{1, \ldots, m\}$, donde cada w_k preserva el signo en sop(σ). Sea $\Lambda_k \subset \mathbb{Z}_+^m$ la sucesión de multi–índices de la forma $\widetilde{N} = (0, \ldots, 0, N, 0, \ldots, 0), N \in \mathbb{Z}_+$. El número N siempre está situado en la misma componente k del multi–índice $\widetilde{N}$.

Teorema 5.1 *Sean S y Λ_k como se indica anteriormente. Todos los multi–índices en Λ_k son fuertemente normales. Para la componente k se cumple* A). *En consecuencia,* (*5.5*) *se satisface para toda función f acotada y Riemann integrable en* $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))$ *y si $f \in Lip_\kappa(\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))), \kappa > 0$, entonces*

$$\left| \int f(x)ds_k(x) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_{\widetilde{N},k,j} f(x_{\widetilde{N},j}) \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^\kappa}\right). \tag{5.10}$$

Si para algún $k' \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que

$$C_{k,k'} := \left(\int \frac{|w_{k'}(x)|^2}{|w_k(x)|} d\sigma(x) \right)^{1/2} < \infty \,, \tag{5.11}$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{N} |\lambda_{\widetilde{N},k',j}| \leq C_{k,k'} \sqrt{|s_k|} \,, \quad \widetilde{N} \in \Lambda_k \,, \tag{5.12}$$

y para toda $f \in Lip_\kappa(\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_{k'}))), \kappa > 0$,

$$\left| \int f(x)ds_{k'}(x) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_{\widetilde{N},k',j} f(x_{\widetilde{N},j}) \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^\kappa}\right). \tag{5.13}$$

También tenemos

$$\limsup_{N\to\infty} \left\| \widehat{s}_k - \frac{P_{\widetilde{N},k}}{Q_{\widetilde{N}}} \right\|_K^{1/2N} \leq \|\varphi_\infty\|_K \,, \quad K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k)) \,, \tag{5.14}$$

y

$$\limsup_{N\to\infty} \left\| \widehat{s}_{k'} - \frac{P_{\widetilde{N},k'}}{Q_{\widetilde{N}}} \right\|_K^{1/N} \leq \|\varphi_\infty\|_K \,, \quad K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))\,, \tag{5.15}$$

donde φ_∞ *denota la representación conforme de* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ *en* $\{w : |w| < 1\}$ *tal que* $\varphi_\infty(\infty) = 0$ *y* $\varphi'_\infty(\infty) > 0$*. Si* f *es analítica en una vecindad* $\mathcal{V}$ *de* $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma))$ $(f \in H(\mathcal{V}))$*, entonces*

$$\lim_{N\to\infty} |\int f(x)ds_k(x) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_{\widetilde{N},k,j} f(x_{\widetilde{N},j})|^{1/2N} \leq \rho_{\mathcal{V}}\,, \tag{5.16}$$

y

$$\lim_{N\to\infty} |\int f(x)ds_{k'}(x) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_{\widetilde{N},k',j} f(x_{\widetilde{N},j})|^{1/N} \leq \rho_{\mathcal{V}}\,, \tag{5.17}$$

donde $\rho_{\mathcal{V}} = \inf\{\rho : \gamma_\rho \subset \mathcal{V}\}$ *y* $\gamma_\rho = \{z : |\varphi_\infty(z)| = \rho\}, 0 < \rho < 1$.

Demostración. Vamos a demostrar que para la componente k se cumple la propiedad A), y que para una componente k' tal que (5.11) tiene lugar se satisface (5.12). Luego, haremos uso de los Lemas 5.3 y 5.4 para completar la demostración.

Fijemos $\widetilde{N} \in \Lambda_k$. De la forma en que hemos seleccionado los multi-índices y (5.2) tenemos que $Q_{\widetilde{N}}$ es el N-ésimo polinomio ortogonal con respecto a la medida s_k. Luego, $Q_{\widetilde{N}}$ tiene exactamente $|\widetilde{N}| = N$ ceros simples en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))$ que es lo que se necesita para afirmar que n es fuertemente normal.

Fijemos $j \in \{1, \ldots, N\}$. Tomando $p(x) = (Q_{\widetilde{N}}(x)/Q'_{\widetilde{N}}(x_{\widetilde{N},j})(x - x_{\widetilde{N},j}))^2$ en el Lema 5.2 se ve que

$$\lambda_{\widetilde{N},k,j} = \int \left(\frac{Q_{\widetilde{N}}(x)}{Q'_{\widetilde{N}}(x_{\widetilde{N},j})(x - x_{\widetilde{N},j})} \right)^2 ds_k(x)\,.$$

Por tanto, todos los $\lambda_{\widetilde{N},k,j}, j = 1, \ldots, N$, tienen el mismo signo que la medida s_k. La convergencia de la correspondiente cuadratura para todas las funciones Riemann integrables se sigue de la primera aseveración del Lema 5.3, y (5.10) es una consecuencia de la tercera afirmación del Lema 5.3.

Que (5.11) implica (5.12) es una generalización de un resultado de los autores Sloan y Smith publicado en [46], Teorema 1, (ellos sólo consideran pesos).

Tomemos $k' \in \{1, \dots, m\}$ tal que se cumpla (5.11). Usando (5.4), se sigue que

$$\lambda_{\widetilde{N},k',j} = \int \frac{Q_{\widetilde{N}}(x)}{Q'_{\widetilde{N}}(x_{\widetilde{N},j})(x - x_{\widetilde{N},j})} \frac{w_{k'}(x)}{w_k(x)} w_k(x) d\sigma(x) .$$

Escribamos $w_{k'}/w_k = S_{N-1} + R_{N-1}$ donde S_{N-1} denota la N-ésima suma parcial de la serie de Fourier de $w_{k'}/w_k$ en el sistema ortogonal dado por $\{Q_{\widetilde{N}}\}, N \in \mathbb{Z}_+$. De (5.11) tenemos que la función $w_{k'}/w_k$ es de cuadrado integrable con respecto a la medida $w_k d\sigma$; por tanto, su serie de Fourier converge a la función en $L_2(w_k d\sigma)$. Usando esto y la fórmula anterior se sigue que

$$\lambda_{\widetilde{N},k',j} = \int \frac{Q_{\widetilde{N}}(x)}{Q'_{\widetilde{N}}(x_{\widetilde{N},j})(x - x_{\widetilde{N},j})} S_{N-1}(x) w_k(x) d\sigma(x) , \tag{5.18}$$

ya que la función

$$\frac{Q_{\widetilde{N}}(x)}{x - x_{\widetilde{N},j}} = \frac{Q_{\widetilde{N}}(x) - Q_{\widetilde{N}}(x_{\widetilde{N},j})}{x - x_{\widetilde{N},j}}$$

es un polinomio en x de grado $\leq \widetilde{N} - 1$, menor que el grado de todos los polinomios que conforman los términos de R_{N-1}.

Como

$$\frac{S_{N-1}(x) - S_{N-1}(x_{\widetilde{N},j})}{x - x_{\widetilde{N},j}}$$

es un polinomio en x de grado $\leq N - 2$, de las propiedades de ortogonalidad de $Q_{\widetilde{N}}$ y (5.18) se obtiene que

$$\lambda_{\widetilde{N},k',j} = S_{N-1}(x_{\widetilde{N},j}) \int \frac{Q_{\widetilde{N}}(x)}{Q'_{\widetilde{N}}(x_{\widetilde{N},j})(x - x_{\widetilde{N},j})} w_k(x) d\sigma(x) = \lambda_{\widetilde{N},k,j} S_{N-1}(x_{\widetilde{N},j}) . \tag{5.19}$$

Por lo tanto, de las desigualdades de Cauchy-Schwartz y de Bessel y la fórmula de cuadratura se llega a que

$$\sum_{j=1}^{N} |\lambda_{\widetilde{N},k',j}| = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{\widetilde{N},k,j} |S_{N-1}(x_{\widetilde{N},j})|$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_{\widetilde{N},k,j} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_{\widetilde{N},k,j} S^2_{N-1}(x_{\widetilde{N},j}) \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{|s_k|} \left(\int S^2_{N-1}(x) w_k(x) d\sigma(x) \right)^{1/2} \leq C_{k,k'} \sqrt{|s_k|}$$

que era lo que necesitabamos probar.

Ahora, (5.13), (5.15), y (5.17) son consecuencia directa de (5.6), (5.7), y (5.8), respectivamente, teniendo en cuenta que todos los ceros de $Q_{\widetilde{N}}$ están en $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_k))$ y que de (5.11) $\mathrm{sop}(s_{k'}) \subset \mathrm{sop}(s_k)$. Para demostrar (5.14) y (5.16) se sigue el mismo esquema de la demostración del Lema 5.4, teniendo en cuenta que para el índice k se tiene

$$\widehat{s}_k - \frac{P_{\widetilde{N},k}}{Q_{\widetilde{N}}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{2N+1}}\right), \quad z \to \infty .$$

Con lo cual concluimos la prueba de este Teorema. □

Deseamos señalar que la condición (5.11), usada aquí para deducir (5.12), fue también empleada en [30] y [31] en el estudio de la convergencia de reglas de cuadraturas interpolatorias para pesos complejos y reglas de cuadraturas exactas para funciones racionales con polos fijos.

5.3. Cuadraturas para sistemas de Nikishin

Aprovechando lo que hemos probado en el Capítulo 2 relativo a la normalidad fuerte de multi-índices para sistemas de Nikishin, en esta sección estudiaremos la convergencia de los esquemas de cuadraturas simultáneas para el caso en que el sistema de medidas forma un sistema de Nikishin $(s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. En toda esta sección, para cada multi-índice $n = (n_1, \ldots, n_m), \alpha_n$ denota un polinomio con coeficientes reales y $\deg \alpha_n < |n| + \min\{n_1, \ldots, n_m\}$ cuyos ceros se encuentran en el complemento de la envoltura convexa de $\mathrm{sop}\,\sigma_1$. A su vez, los ceros de todos lo polinomios α_n están contenidos en un subconjunto compacto F de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$.

Teorema 5.2 *Sea $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de Nikishin de m medidas y $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m(*)$. Tomamos $k = 1$ si $n_1 - 1 = M = \max\{n_1 - 1, n_2 - 2, \ldots, n_m - 2\}$ ó $k \in \{2, \ldots, m\}$ es la primera componente de n tal que $n_k - 2 = M$. Existe un polinomio mónico $W_{n,k}$ de grado $|n| - n_k$ cuyos ceros son simples y están en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_2))$ tal que*

$$\int \frac{p(x)}{(\alpha_n W_{n,k})(x)} ds_k(x) = \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} \frac{p(x_{n,j})}{(\alpha_n W_{n,k})(x_{n,j})}, \quad p \in \mathcal{P}_{2|n|-1} . \qquad (5.20)$$

Para cada $j = 1, \ldots, |n|$, se tiene que

$$\lambda_{n,k,j} = (\alpha_n W_{n,k})(x_{n,j}) \int \left(\frac{Q_n(x)}{Q_n'(x_{n,j})(x - x_{n,j})}\right)^2 \frac{ds_k(x)}{(\alpha_n W_{n,k})(x)} . \qquad (5.21)$$

Todos los coeficientes de Nikishin–Christoffel $\lambda_{n,k,j}$ *asociados a* $P_{n,k}/Q_n$ *tienen el mismo signo que la medida* s_k *y*

$$\sum_{j=1}^{|n|} |\lambda_{n,k,j}| = |s_k| \, . \tag{5.22}$$

Demostración. Tomando en (4.17), $j = 0$ y $\beta \equiv 1$ se sigue que

$$\int_{\Delta_1} x^\nu Q_n \frac{ds_k(x)}{\alpha_n(x) q_2(x)} = 0, \quad \nu = 0, \ldots, |n| - 1 \, , \tag{5.23}$$

donde q_2 es un cierto polinomio de grado $|n| - n_k$ cuyos ceros son simples y están en el interior de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_2))$. Escogiendo $W_{n,k} = q_2$, de (5.23) se obtiene (5.20) de forma análoga a como se procedió en el Lema 5.2.

Tomando $p = (Q_n(x)/Q_n'(x_{n,j})(x - x_{n,j}))^2$ en (5.20) se deduce (5.21). Obviamente, esta fórmula implica lo dicho sobre el signo de los coeficientes $\lambda_{n,k,j}$. Tomando ahora $p = \alpha_n W_{n,k}$ se obtiene (5.22) con lo cual concluímos la demostración. □

Como consecuencia del Teorema 5.2 y de los Lemas 5.3 y 5.4 obtenemos el siguiente teorema referido al caso en que $\alpha_n \equiv 1, n \in \Lambda$.

Teorema 5.3 *Sea* $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ *un sistema de Nikishin de* m *medidas. Sea* $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$ *una sucesión infinita de multi-índices distintos dos a dos tal que para todo* $n \in \Lambda$ *la* k*-ésima componente es como se indica en el Teorema 5.2. Entonces, para cada* $n \in \Lambda$ *los coeficientes* $\lambda_{n,k,j}, j = 1, \ldots, |n|$ *conservan el mismo signo. Para cada función Riemann integrable* f *en* $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ *se tiene que*

$$\lim_{n \in \Lambda} \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j}) = \int f(x) ds_k(x) \, , \tag{5.24}$$

y si $f \in Lip_\kappa(\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))), \kappa > 0,$ *entonces obtenemos que*

$$\left| \int f(x) ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j}) \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|n|^\kappa} \right) . \tag{5.25}$$

En cada compacto $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Co}(\mathrm{sop}(\sigma_1))$ *se tiene que*

$$\limsup_{n \in \Lambda} \left\| \widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n} \right\|_K^{1/2|n|} \leq \delta_K < 1 \, , \tag{5.26}$$

donde

$$\delta_K = \text{máx}\{|\varphi_t(z)| : z \in K, t \in \Delta_2 \cup \{\infty\}\}.$$

Finalmente, si $f \in H(\mathcal{V})$*, donde* $\mathcal{V}$ *es una vecindad de* $\text{Co}(\text{sop}(\sigma_1))$*, entonces se llega a que*

$$\lim_{n\in\Lambda} \Big| \int f(x)ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j})\Big|^{1/2|n|} \leq \rho_{\mathcal{V}}\,, \tag{5.27}$$

donde $\rho_{\mathcal{V}} = \inf\{\delta_{\gamma_\rho} : \gamma_\rho \subset \mathcal{V}\}$ *y* $\gamma_\rho = \{z : |\varphi_\infty(z)| = \rho\}, 0 < \rho < 1$*. Si* $k \in \{2, \ldots, m\}$ *y* $n_1 + 1 = n_k$ *para todo* $n \in \Lambda$ *entonces* (5.26) – (5.27) *también se cumplen para la primera componente.*

Demostración. El hecho de que para cada $n \in \Lambda$ con k como en el enunciado, los coeficientes de Nikishin-Christoffel preserven el mismo signo es una consecuencia del Teorema 5.2. Entonces, (5.24) y (5.25) se cumplen por el Lema 5.3.

Para demostrar (5.26) y (5.27) se procede como en la demostración del Lema 5.4 teniendo en cuenta que aquí para la componente k se tiene que

$$\frac{(\widehat{s}_k - \frac{P_{n,k}}{Q_n})(z)}{W_{n,k}(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{2|n|+1}}\right), \quad z \to \infty\,.$$

La última afirmación es producto del hecho que bajo las condiciones indicadas la primera componente también satisface las hipótesis del Teorema 5.2. □

Para el caso de sucesiones $\{\alpha_n\}, n \in \Lambda$, generales como indicamos al inicio de esta sección podemos demostrar lo siguiente.

Corolario 5.1 *Sea* $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ *un sistema de Nikishin de* m *medidas. Sea* $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$ *una sucesión infinita de multi-índices distintos dos a dos tal que para todo* $n \in \Lambda$ *la* k*-ésima componente es como se indica en el Teorema 5.2. Entonces, para cada* $n \in \Lambda$ *los coeficientes* $\lambda_{n,k,j}, j = 1, \ldots, |n|$ *conservan el mismo signo de la medida correspondiente.*

Demostración. La propiedad de conservación del signo de los coeficientes de Nikishin-Christoffel es una consecuencia directa del Teorema 5.2. □

La sucesión de multi–índices $\{(N, \ldots, N, N + 1, \ldots, N + 1)\}, N \in \mathbb{Z}_+$, donde el salto en valores se produce en la k-ésima componente, satisfacen las hipótesis de los dos teoremas anteriores en su componente primera y k-ésima. Ejemplos menos sencillos de tales sucesiones son fáciles de construir a partir de elementos de $\mathbb{Z}_+^m(*)$.

Desafortunadamente, no es posible tener más de dos componentes $k \in \{1, \ldots, m\}$ que satisfagan las condiciones del Teorema 5.2, y cuando hay dos, una tiene que ser la primera de todas. Sin embargo, es posible conseguir (5.26) y (5.27) en más de dos componentes.

Recordemos la siguiente definición de indice asociado introducida en la segunda sección del Capítulo 3. Sea $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$. Para cada $i = 1, \ldots, m$ definimos otro multi-índice asociado $n^i = (n_2^i, \ldots, n_m^i)$ con $m-1$ componentes, donde

$$n_j^i = \begin{cases} \text{mín}(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_i - 1), & \text{cuando} \quad j = 2, \ldots i, \\ \\ \text{mín}(n_i, \ldots, n_j), & \text{cuando} \quad j = i+1, \ldots m \end{cases} \tag{5.28}$$

Denotamos $|n^i| = \sum_{j=2}^m n_j^i$.

Teorema 5.4 *Sea* $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ *un sistema de Nikishin de* m *medidas y* $n \in \mathbb{Z}_+^m$. *Entonces, para cada* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *existe un polinomio mónico* $W_{n,i}$ *de grado* $|n^i|$ *cuyos ceros son simples y están en el interior de* $\text{Co}(\text{sop}(\sigma_2))$ *tal que*

$$\int \frac{p(x)}{(\alpha_n W_{n,i})(x)} ds_k(x) = \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,i,j} \frac{p(x_{n,j})}{(\alpha_n W_{n,i})(x_{n,j})}\,, \quad p \in \mathcal{P}_{|n|+|n^i|+n_i-1}\,, \tag{5.29}$$

y al menos $(|n| + |n^i| + n_i)/2$ *coeficientes de Nikishin–Christoffel asociados a* $P_{n,i}/Q_n$ *tienen el mismo signo de la medida* s_i.

Demostración. La existencia de $W_{n,i}$ del grado indicado se tiene del Teorema 3.1. Además, de las condiciones de ortogonalidad (3.18) se obtiene

$$0 = \int x^\nu Q_n(x) \frac{ds_i(x)}{(\alpha_n W_{n,i})(x)}\,, \quad \nu = 0, 1, \ldots, |n^i| + n_i - 1\,.$$

De aquí se deduce inmediatamente la fórmula de cuadratura (5.29) para todo polinomio p en el espacio de polinomios señalado de igual forma a como lo hemos hecho en situaciones anteriores.

Sea τ_n el número total de índices j tales que el signo de $\lambda_{n,i,j}$ coincide con el signo de la medida s_i. Tomemos $p = \prod'(x - x_{n,j})^2$ donde $\prod'$ denota el producto sobre todos los índices j tales que el signo de $\lambda_{n,i,j}$ coincide con el signo de la medida s_i. Supongamos que $\deg p = 2\tau_n \leq |n| + |n^i| + n_i - 1$, y sustuyamos p en (5.29). Obviamente, tenemos que

$$\text{sg}\left(\int \frac{p(x)}{(\alpha_n W_{n,i})(x)} ds_i(x)\right) \neq \text{sg}\left(\sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,i,j} \frac{p(x_{n,j})}{(\alpha_n W_{n,i})(x_{n,j})}\right)\,,$$

donde sg$(\cdot)$ denota el signo de $(\cdot)$, ya que en la suma se cancelan todos los terminos exepto los que tienen signo diferentes respecto al de la integral. De esta contradicción se concluye que $2\tau_n \geq |n| + |n^i| + n_i$ que es equivalente a la última aseveración del teorema. $\square$

Corolario 5.2 *Sea $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de Nikishin de m medidas. Sea también $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$ una sucesión infinita de multi–índices distintos dos a dos tal que para todo $n \in \Lambda$ y k' fijo, $2 \leq k' < m$, tenemos que $n_1 = n_2 = \cdots = n_{k'-1}$ y $n_{k'} = n_m = n_1 + 1$. Entonces para $k = 1, k', k'+1$ y cada $n \in \Lambda$ los coeficientes $\lambda_{n,k,j}, j = 1, \ldots, |n|$, conservan el mismo signo. En el caso $\alpha_n \equiv 1, n \in \Lambda$ para las mismas componentes se tiene (5.24) – (5.27).*

Demostración. Es fácil verificar que las componentes $k = 1, k'$ satisfacen las hipótesis del Teorema 5.2, luego el Teorema 5.3 y el Corolario 5.1 son aplicables para dichas componentes. Para $k = k'+1$ obsérvese que $|n^k|+n_k = |n| - 1$. Usando la última afirmación del Teorema 5.4, obtenemos que para cada $n \in \Lambda$ al menos $(|n|+|n^k|)/2 = |n|-1/2$ coeficientes $\lambda_{n,k,j}, j = 1, \ldots, |n|$, tienen que tener el mismo signo; o sea, todos tienen el mismo signo porque el número de coeficientes de igual signo tiene que ser un entero. A partir de aquí, podemos seguir el mismo esquema de la demostración del Teorema 5.3 ó el Corolario 5.1 según sea el caso para esta componente. $\square$

Nota 5.3 Cuando $m = 4$ según el Teorema 5.4 los índices de la forma $(n_1, n_1+1, n_1+1, n_1+1)$ podrían tener un coeficiente de Nikishin- Christoffel negativo para la componente $k = 4$ y los del tipo $(n_1, n_1, n_1 + 1, n_1 + 1)$ podrían tener un coeficiente negativo en la componente $k = 2$. Por supuesto, el Teorema 5.4 sólo brinda condiciones suficientes para que se cumpla la propiedad de conservación del signo de los coeficientes de Nikishin-Christoffel. Sería interesante ver si es posible ó no tener dicha propiedad para multi-índices con más de tres componentes debidamente elegidos.

A pesar de lo dicho en la nota anterior, gracias al Teorema 3.3 podemos probar convergencia de las reglas de cuadraturas simultáneas para todas las componentes en la clase de las funciones analíticas en una vecindad de Co(sop(σ_1)) cuando los índices son tales que para todo $i = 1, \ldots, m$,

$$n_i \geq \frac{|n|}{m} - c|n|^{\kappa}, \qquad \kappa < 1, \tag{5.30}$$

donde c es un entero positivo.

Teorema 5.5 *Sea $S = (s_1, \ldots, s_m)$ un sistema de Nikishin de medidas. Sea Λ una sucesión infinita de multi–índices distintos dos a dos que cumple (5.30). Supongamos que $m \leq 3$ ó $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$). Entonces, para cada $k = 1, \ldots, m$ y f analítica en una vecindad de $\mathcal{V}$ de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_1))$ se cumple que*

$$\lim_{n\in\Lambda} |\int f(x)ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j})|^{1/2|n|} \leq \rho_{\mathcal{V}} < 1\,, \tag{5.31}$$

donde δ_{γ_ρ} y γ_ρ se definen como en el Teorema 3.3 y $\rho_{\mathcal{V}} = \inf\{\delta_{\gamma_\rho} : \gamma_\rho \subset \mathcal{V}\}$.

Demostración. La prueba es consecuencia inmediata del Teorema 3.3 y el método empleado en los resultados anteriores para deducir la velocidad de convergencia de las fórmulas de cuadraturas, para funciones analíticas en una vecindad de Δ_1, a partir de la velocidad de convergencia de los aproximantes multipuntuales Hermite-Padé. $\square$

Nota 5.4 Para los multi–índices que satisfacen las condiciones del Teorema 5.5 se tiene que para toda $k = 1, \ldots, m$ los coeficientes de Nikishin–Christoffel preservan el signo de la medida correspondiente salvo $o(|n|)$ de ellos (ver Lema 3.3). Sería interesante comprobar si bajo tales condiciones tiene lugar la propiedad B) para todo $k = 1, \ldots, m$.

Haciendo uso del Corolario 4.2 y la Nota 4.2 del Capítulo 4, podemos dar una expresión más exacta para la cota en (5.31). En la Sección 4.5 se introdujo la permutación τ que satisface (4.51). Denotamos ahora para τ su inversa τ^{-1}.

Teorema 5.6 *Sea $S = (s_1, \ldots, s_m) = \mathcal{N}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ un sistema de Nikishin, donde $\sigma_k \in$ **Reg** para $k = 1, \ldots, m$. Sea $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$ una sucesión infinita de multi-índices $n = (n_1, \ldots, n_m)$ distintos dos a dos, que cumple (4.34), y $\{\alpha_n\}$, $n \in \Lambda$, una sucesión de polinomios mónicos para los cuales se tiene*

$$* \lim_{n\in\Lambda} \frac{1}{|n|}\chi(\alpha_n) = \alpha\,.$$

Existe una permutación definida como en (4.51) tal que $n_{\tau(1)} \geq \cdots \geq n_{\tau(m)}$, $n \in \Lambda$, y $|\alpha| < 1 + p_{\tau(m)}$. Entonces para cada $k = 1, \ldots, m$ y f analítica en una vecindad de $\mathcal{V}$ de $\mathrm{Co}(\mathrm{sop}(s_1))$ tenemos que

$$\lim_{n\in\Lambda} |\int f(x)ds_k(x) - \sum_{j=1}^{|n|} \lambda_{n,k,j} f(x_{n,j})|^{1/|n|} \leq \rho_{\mathcal{V},k} < 1\,,$$

donde

$$\rho_{k,\mathcal{V}} = \inf\{\rho : \gamma_{\rho,k} \subset \mathcal{V}\}$$

y

$$\gamma_{\rho,k} = \{z : \exp(V^{\overline{\mu}_1} - V^{\alpha} + \xi_{\tau^{-1}(k)})(z) = \rho\}\,.$$

La función $\xi_{\tau^{-1}(k)}$ es la de (4.63).

Demostración La demostración sigue el mismo esquema de la prueba del Teorema 3.3. En este caso tomamos la curva $\gamma_{\rho,k}$ como se indica en el enunciado, y usamos la estimación indicada en el Corolario 4.2, teniendo en cuenta la observación hecha en la Nota 4.2. □

Capítulo 6

Problemas Abiertos

Como conclusión proponemos algunos problemas abiertos que han surgido durante el desarrollo de la investigación.

En el Capítulo 2 hemos probado, para cada $m = 1, 2, \ldots$ que en un sistema de Nikishin arbitrario de m funciones, los multi-índices pertenecientes a la clase denotada por $\mathbb{Z}_+^m(*)$ son fuertemente normales (ver Teorema 2.2). Como consecuencia de esto y de la última afirmación del Lema 2.1, tenemos que si un multi-índice $n \in \mathbb{Z}_+^m(*)$, es sucesor de otro, n^-, entonces n^- es débilmente normal. Es razonable preguntarse ¿normalidad débil en sistemas de Nikishin implica normalidad fuerte? Esta pregunta es equivalente a la siguiente ¿los sistemas de Nikishin son fuertemente perfectos? Esto se debe a que cualquiera sea un multi-índice $\widetilde{n}$, se puede encontrar una sucesión secuencial que contenga a $\widetilde{n}$ y a otro multi-índice $n' \in \mathbb{Z}_+^m(*)$, tal que $|\widetilde{n}| < |n'|$. Luego del Lema 2.1 se tiene la equivalencia entre las dos preguntas. Cuando $m \leq 3$ la respuesta es afirmativa; sin embargo esto no ha sido probado para $m \geq 4$.

Obviamente, una respuesta positiva de la pregunta del párrafo anterior, implicaría poder extender a todo $\mathbb{Z}_+^m$ varios resultados probados sólo para multi-índice con tres componentes o pertenecientes a la clase $\mathbb{Z}_+^m(*)$. Por ejemplo, el Teorema 2.6 asegura el entrelazamiento de ceros entre dos polinomios mónicos Q_n y Q_{n^+} de ortogonalidad múltiple de un sistema de Nikishin, relativos a los multi-índices n y n^+, respectivamente, n^+ es sucesor de n. Como hipótesis del Teorema se requiere que $n, n^+ \in \mathbb{Z}_+^m(*)$, esta condición podría ser prescindible si se lograra probar que los sistemas de Nikishin son fuertemente perfectos. Queda entonces abierto el siguiente problema: ¿es cierta la afirmación del Teorema 2.6 con la hipótesis de Λ arbitraria?

Con relación al Capítulo 3 queda por estudiar la convergencia de aproximantes generalizados Hermite-Padé. Los resultados del Capítulo 2 sabemos como extenderlos cuando algunas de las medidas generadoras del sistema de

Nikishin tienen soporte no acotado. Entonces es de interés considerar tales sistemas de Nikishin y probar la convergencia de los aproximantes simultáneos suponiendo cierta condición de tipo Carleman sobre las medidas.

El Capítulo 4 se dedica al estudio de la velocidad de convergencia de los AGHP. Los resultados enunciados han sido probados para sucesiones de multi-índices Λ, tal que sus elementos estén incluidos en $\mathbb{Z}_+^m(*)$. Es interesante intentar extender estos resultados para sistemas de 3 funciones de los cuales sabemos que son fuertemente perfectos. Con respecto a las restricciones tomadas sobre las medidas generadoras del sistema de Nikishin, queda aún por estudiar lo que ocurre cuando $\sigma_1 \in \mathbf{Reg}$. Otra cuestión por resolver es el comportamiento asintótico de los restos cuando algunas de las medidas generadoras del sistema de Nikishin tienen soporte no acotado.

Con relación al método de cuadraturas simultáneas propuesto en el Capítulo 5 es importante obtener condiciones que garanticen la estabilidad numérica del método para sistemas de Nikishin de más de tres medidas, o al menos obtener una cota para los coeficientes de Nikishin-Christoffel del tipo B) ó C) que nos permita obtener convergencia en todas las componentes con clases más amplias de funciones. Por último proponemos estudiar la convergencia del método cuando algunas de las medidas generadoras del sistema de Nikishin tienen soporte no acotado.

Bibliografía

[1] M.A. Angelesco. *Sur deux extensions des fractions continues algébriques.* C.R. Acad. Sci. Paris, **18** (1919), 262-263.

[2] A.I. Aptekarev. *Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems.* Sb. Math., **190** (1999), 631-669.

[3] Keith Ball, Tanguy Rivoal. *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs.* Invent. Math., **146** (2001), 193-207.

[4] M. Bello Hernández, B. de la Calle Ysern, J.J. Guadalupe Hernández, G. López Lagomasino. *Asymptotics for Stieltjes polynomials, Padé-Type Approximants, and Gauss-Kronrod quadrature.* J. D' Analyse Mathématique, **86** (2002), 1-23.

[5] M Bello Hernández, B. de la Calle Ysern, G. López Lagomasino, *Generalized Stieltjes polynomials and rational Gauss-Kronrod quadratures.* Constr. Approx. **20** (2004), 249-265.

[6] C. F. Borges. *On a class of Gauss-like quadrature rules.* Num. Math., **67** (1994), 271-288.

[7] P. Borwein, T. Erdélyi. *Polynomials and Polynomial Inequalities,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 161, Springer, 1991.

[8] A. Branquinho, J. Bustamante, A. Folquié, G. López. *Normal indices in Nikishin systems.* J. of Approx. Theory, **124** (2003), 254-262.

[9] ZH. Bustamante, G. Lopez Lagomasino. *Hermite–Padé Approximation for Nikishin systems of analytic functions.* Russian Acad. Sci. Sb. Math., **77** (1994), 367-384.

[10] F. Cala Rodríguez, G. López Lagomasino. *Multipoint Padé-type approximants. Exact rate of convergence.* Constr. Approx., **14** (1998), 259-272.

[11] F. Cala Rodríguez, G. López Lagomasino. *Multipoint rational approximations with preassigned poles.* J. of Math. Anal. and Appl., **256** (2001), 142-161.

[12] B. de la Calle Ysern, G. López Lagomasino. *Strong asymptotics of orthogonal polynomials with varying measures and Hermite-Padé approximants.* J. of Comp. and Appl. Math., **99** (1998), 91-103.

[13] B. de la Calle Ysern, G. López Lagomasino. *Weak convergence of varying measures and Hermite-Padeé orthogonal polynomials.* Constr. Approx., **15** (1999), 553-575.

[14] B. de la Calle Ysern, G. López Lagomasino. *Convergencia relativa de polinomios ortogonales variantes.* Publicado en Margaritha Mathematica en Memoria de José Javier Guadalupoe Hernández (Chicho), L. Español y J.L. Varona edts. Univ. de La Rioja, Logroño, España, 283-294, 2001.

[15] B. de la Calle Ysern, G. López Lagomasino. *Convergence of multipoint Padé-type Approximants.* J. of Approx. Theory., **109** (2001), 257-278.

[16] T. Carleman. *Les Fonctions Quasi-Analytiques.* Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[17] E. W. Cheney. *Introduction to Approximation Theory.* McGraw–Hill, N. York, 1966.

[18] P. J. Davis, P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration.* Academic Press., N. York, 1975.

[19] K. Driver, H. Stahl. *Normality in Nikishin systems.* Indag. Math., **5** (1994) 161–187.

[20] K. Driver and H. Stahl. *Simultaneous rational approximants to Nikishin systems II.* Acta Sci. Math., **61** (1995), 261-284.

[21] U. Fidalgo, G. López Lagomasino. *On perfect Nikishin systems.* Comp. Methods and Function Theory, **2** (2002), 415-426.

[22] U. Fidalgo, J. Illán, G. López Lagomasino.*Hermite-Padé approximants and simultaneous quadraturas formulas.* J. of Approx. Theory, **126** (2004), 171-197.

[23] U. Fidalgo, G. López Lagomasino.*Rate of convergence of generalized Hermite-Padé approximants of Nikishin systems.* Constr. Approx. (sometido).

[24] A. A. Gonchar. *On the convergence of generalized Padé approximants for meromorphic functions.* Math. USSR. Sb., **27** (1975), 503-514.

[25] A. A. Gonchar, G. López Lagomasino. *On the convergence of multipoint Padé approximants to Markov functions.* Math. USSR Sb., **34** (1978), 449-459.

[26] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov. *On equilibrium problems for vector potentials.* Russian Math. Surveys, **40** (1985), 183-184.

[27] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov. *Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials.* Math. USSR Sb., **53** (1986), 119-130.

[28] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov. *On the convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type.* Translation in Proc. Steklov Inst. Math., **64** (1989), 31-50.

[29] A.A. Gonchar, E.A. Rakhmanov, and V.N. Sorokin. *Hermite-Padé Approximants for systems of Markov–type functions.* Sb. Math., **188** (1997) 33-58.

[30] P. González-Vera, G. López Lagomasino, R. Orive, J. C. Santos. *On the convergence of quadrature formulas for complex weight functions.* J. Math. Anal. Appl., **189** (1995), 514-532.

[31] P. González-Vera, M. Jiménez Paiz, G. López Lagomasino, R. Orive. *On the convergence of quadrature formulas connected with multipoint Padé type approximants.* J. Math. Anal. Appl., **202** (1996), 747-775.

[32] C. Hermite. *Sur la fonction exponentielle.* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **77** (1873), 18-24, 74-79, 226-233, 285-293.

[33] D. Kershaw. *A note on orthogonal polynomials.* Proc. Edimburgh Math. Soc., **17** (1970), 83-93.

[34] M. G. Krein and A. A. Nudel'man. *The Markov Moment Problem and Extremal Problems.* Transl. of Math. Monographs, Vol 15, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[35] N. S. Landkof. *Foundations of Modern Potential Theory.* Grundlehren der Mathenatischen Wissenschaften, Vol. 190, Springer Verlag, New York, 1972.

[36] G. López Lagomasino. *Conditions for convergence of multipoint Padé approximants for functions of Stieltjes.* Math. USSR. Sb., **35** (1979), 363-375.

[37] G. López Lagomasino. *On the assymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and convergence of multipoit Padé approximants.* Math. USSR Sb., **56** (1987), 207-220.

[38] G. López Lagomasino. *Convergence of Padé approximantas of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics for orthogonal polynomials.* Math. USSR Sb., **64** (1989), 207-227.

[39] K. Mahler. *Perfect systems*, Compositio Math., **19** (1968), 95-166.

[40] A. A. Markov. *Selected papers on continued fractions and the theory of functions deviating least from zero.* GITTL, Moscow, (1948). (En ruso)

[41] E.M. Nikishin. *A systems of Markov functions.* Translations of Moscow Univ. Math., **34** (1979).

[42] E.M. Nikishin. *On irrationality of the values of the functions.* Translations of Math. USSR Sb., **37** (1980), 318-388.

[43] E. M. Nikishin. *On simultaneous Padé approximants.* Math. USSR Sb., **41** (1982), 409-425.

[44] E.M. Nikishin and V.N. Sorokin. *Rational Approximations and Orthogonality.* Translations of Math. Monographs. Vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, 1991.

[45] T. Ransford. *Potential Theory in the Complex Plane.* London Math. Soc.. Student Texts, Vol. 28, Cambridge University Press, 1995.

[46] I. H. Sloan, W. E. Smith. *Properties of interpolatory product integration rules.* SIAM J. Numer. Anal., **19** (1982), 427-442.

[47] V.N. Sorokin. *A trascendence measure for* π^2. Math Sb., **187** (1996), 1819-1852.

[48] T.J. Stieltjes. *Recherches sur les fractions continues.* Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, **8** (1894), J1-J122; **9** (1895), A1-A47.

[49] T.J. Stieltjes. *Quelques recherches sur la theorie des quadratures dites mecaniques*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup., **1** (1884), 409-426.

[50] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials.* Coll. Pub., Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.

[51] H. Stahl and V. Totik. *General Orthogonal Polynomials.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[52] P.L. Tchebycheff. *Sur les fractions continues.* Usp. Zap. Imper. Akad. Nauk., **3** (1855), 636-664.

[53] P.L.Tchebycheff. *Sur les developpement des fonctions a une seule variable.*, Bull. Phys.-Math. Acad. Imp. Sci. St. Petersburg, **1** (1895), 193-200.

[54] P.L. Tchebycheff. *Sur les values limites des integrales.* J. Math. Pures Appl., **19** (1874), 2052-2053.

[55] P.L. Tchebycheff. *Ouevres de P.L. Tchebycheff.* Vol. I,II, Imp. Acad. Sci., Petersburg, 1907.

[56] J.L. Walsh. *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.* Coll. Pub., Vol. XX. Providence, Amer. Math. Soc., 1969.