UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

TESIS DOCTORAL

LA TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX Y EL PROBLEMA DE SIMETRIZACIÓN EN POLINOMIOS ORTOGONALES

Autora: María Isabel Bueno Cachadiña

Directores: Francisco Marcellán Español
Froilán Martínez Dopico

Leganés, 2004

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

LA TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX Y EL PROBLEMA DE SIMETRIZACION EN POLINOMIOS ORTOGONALES

Autor: **María Isabel Bueno Cachadiña**
Lda. en Ciencias Matemáticas

Memoria presentada para optar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas. Realizada bajo la dirección de **Dr. Francisco Marcellán Español** y **Dr. Froilán Martínez Dopico.**

Febrero, 2004.

TESIS DOCTORAL

LA TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX Y EL PROBLEMA DE SIMETRIZACIÓN EN POLINOMIOS ORTOGONALES

Autora: María Isabel Bueno Cachadiña

Directores: Francisco Marcellán Español
Froilán Martínez Dopico

Tribunal Calificador:

Presidente:

Vocales:

Vocal secretario:

Calificación:

Leganes, de de 2004.

A mi esposo, a mis hijos,
a mis padres en el cielo,
y a mis padres en la tierra.

Índice general

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar, en primer lugar, mi más profundo agradecimiento al Dr. Francisco Marcellán quien, generosamente, me aceptó como su alumna de doctorado y me introdujo en este maravilloso mundo de la investigación. Muchas gracias por la confianza que depositó en mí y por toda la ayuda que me ha brindado durante estos años. Muchas gracias por valorar mi esfuerzo y mi trabajo en todo momento. Muchas gracias por estar siempre presto a leer y a corregir mis resultados, muchas veces en detrimento de su tiempo de ocio.

En segundo lugar, quiero manifestar mi más sincero agradecimiento al Dr. Froilán Martínez Dopico, quien me ayudó a sumergirme en una nueva área de la matemática, desconocida para mí, y que aceptó ser mi segundo tutor. Muchas gracias por los cientos de horas que trabajó a mi lado, por hacerme pensar, muchas gracias por sus buenos consejos científicos, por su apoyo incondicional y por haberme animado a buscar el continuo crecimiento en el campo de la investigación.

También quiero agradecer de todo corazón al Dr. Jorge Sánchez Ruíz su incondicional colaboración y apoyo en algunos de los trabajos que realicé para esta Memoria. Muchas gracias por momentos inolvidables de éxtasis científico, por sus sabios consejos para mejorar mi capacidad de redactar artículos, por haberme apoyado en momentos de desánimo con su peculiar sentido del humor y su visión positiva de la vida.

Quiero dar las gracias a Mayte Pérez, mi compañera de despacho, quien con paciencia infinita soportó mis momentos de euforia, mis momentos de desilusión, y siempre estuvo atenta a escucharme y a apoyarme como una gran amiga.

Finalmente quiero mencionar a Alberto Portal, mi compañero de andadura, con el que inicié este singular camino del doctorado. Muchas gracias por ofrecerme una sonrisa cada vez que solicité su experta ayuda en informática, muchas gracias por recibirme con cariño cada vez que le interrumpí en su despacho para solicitar su consejo.

INTRODUCCIÓN

Esta Memoria se enmarca en la teoría de polinomios ortogonales y, en particular, se ocupa de transformaciones espectrales de polinomios ortogonales, más en concreto, de la interpretación matricial de las mismas y de su análisis numérico. La teoría de transformaciones espectrales estudia las transformaciones de funcionales (lineales o bilineales) casi-definidos en otros de la misma naturaleza y de modo que las características espectrales del funcional transformado pueden obtenerse a partir de las del funcional original. La literatura científica ofrece multitud de trabajos sobre el tema; como muestra, ver [19, 23, 32, 33, 34, 37, 39, 40, 41, 47, 51, 66, 70, 71]. Dentro de este marco, y desde un punto de vista básicamente algebraico, esta Memoria se centra en dos temas principales:

1. La transformación de Darboux como transformación espectral de polinomios ortogonales.
2. El problema de simetrización asociado a funcionales lineales y bilineales.

Es importante explicar qué queremos decir al hablar de las características espectrales de un funcional (lineal o bilineal). Dado un funcional casi-definido $\mathbf{L}$, existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ ortogonal con respecto a dicho funcional. Teniendo en cuenta que dicha sucesión es una base del espacio de los polinomios, existe una matriz semi-infinita Hessenberg inferior H que verifica la siguiente propiedad:

$$xv_p = Hv_p, \tag{1}$$

donde $v_p = [P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots]^t$. Obsérvese que H es la matriz del operador multiplicación por x en el espacio de los polinomios. Cuando hablamos de las características espectrales del funcional $\mathbf{L}$ nos referimos al espectro de la matriz H como operador en l^2. La matriz H resulta ser de gran interés en la teoría de polinomios ortogonales ya que los autovalores de toda submatriz principal $(H)_n$ son los ceros del correspondiente polinomio ortogonal P_n. Cuando el funcional $\mathbf{L}$ es lineal, H es tridiagonal y recibe el nombre de matriz mónica de Jacobi. En tal caso, (1) no es más que la relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios P_n. En el caso de funcionales bilineales, H es, en general, una matriz Hessenberg inferior completa y la relación de recurrencia a tres términos se convierte en una relación de recurrencia larga.

Cuando hablamos de las transformaciones espectrales de la sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n\}$, nos referimos a las transformaciones de la matriz H en otra matriz $\tilde{H}$ que verifican $D\tilde{H} = HD$, donde D es una matriz y de modo que $\tilde{H}$ y H sean del mismo tipo, es decir, que estén asociadas a funcionales de la misma naturaleza. Obsérvese que $\tilde{H}$ y H tienen el mismo espectro si D es no singular. En este caso, si H es la matriz de Hessenberg asociada a $\mathbf{L}$, $\tilde{H}$ será la matriz de Hessenberg asociada a un funcional $\tilde{\mathbf{L}}$. Establecer una relación entre los funcionales $\mathbf{L}$ y $\tilde{\mathbf{L}}$ es equivalente a establecer una relación entre las matrices de Hessenberg H y $\tilde{H}$ asociadas.

Desde el punto de vista de operadores diferenciales, las transformaciones espectrales pueden entenderse como sigue: Sea $\mathbf{T}$ un operador diferencial, en diferencias o mixto diferencial y en diferencias, y consideremos el problema de autovalores $\mathbf{T}\Psi = \lambda\Psi$. Tomemos un operador $\mathbf{D}$ de naturaleza semejante y exijamos la existencia de una relación del tipo $\mathbf{DT} = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{D}$, donde $\tilde{\mathbf{T}}$ tiene la misma forma que $\mathbf{T}$ con diferentes coeficientes multiplicando a los operadores diferenciales o en diferencias que aparecen en $\mathbf{T}$. Formalmente, las soluciones del problema de autovalores $\tilde{\mathbf{T}}\tilde{\Psi} = \lambda\tilde{\Psi}$ vienen dadas por $\tilde{\Psi} = \mathbf{D}\Psi$. Sin embargo, encontrar el espectro completo de $\tilde{\mathbf{T}}$ a partir de las propiedades conocidas de $\mathbf{T}$ puede ser un problema no trivial si el operador $\mathbf{D}$ es singular. A los operadores $\mathbf{D}$ que transforman Ψ en $\tilde{\Psi}$ se les llama *transformaciones espectrales* si las características espectrales de $\tilde{\mathbf{T}}$ pueden obtenerse a partir de las de $\mathbf{T}$. Transformaciones de este tipo aparecen con frecuencia en el contexto de la mecánica cuántica, cuando T es el Hamiltoniano de la ecuación de Schrodinger.

En 1940, Geronimus [36] estudió las transformaciones espectrales de polinomios ortogonales respecto de funcionales lineales, las que se conocen hoy en día como transformaciones de Darboux para sistemas discretos integrables. La transformación de Darboux tiene además muchas aplicaciones en mecánica cuántica. También son numerosas sus aplicaciones en otras áreas. Por ejemplo, Golub y Kaustsky [37, 47], así como Galant [32], la aplicaron en el cálculo de cuadraturas gaussianas, en particular en las que presentan nodos fijos y nodos múltiples libres. Otros autores como Grünbaum y Haine [39, 40] han usado la transformación de Darboux, entre otras, para obtener los polinomios de Krall a partir de algunas familias clásicas de polinomios ortogonales en relación con el problema biespectral. El primer tipo de transformación espectral para polinomios ortogonales fue propuesto por Christoffel en 1858. La sucesión de polinomios transformada se conoce como sucesión de polinomios núcleo. A esta transformación se la conoce como transformación de Christoffel o transformación de Darboux sin parámetro con shift. Es bien sabido que todo funcional lineal puede expresarse en términos de una medida ($\mathbf{L}(p) = \int_{\mathbb{R}} p d\mu$). En el caso de la transformación de Christoffel, la medida transformada se obtiene mediante una perturbación polinómica de la original. Otro tipo de transformación espectral más general fue considerada por Geronimus en 1940. Esta transformación fue redescubierta más tarde en muchas ocasiones en diferentes contextos. Nos referimos a la transformación de Geronimus o transformacion de Darboux con shift. Esta transformación perturba racionalmente la medida asociada a la sucesión de polinomios inicial. Es interesante señalar que la transformación de Geronimus depende de un parámetro libre que denotamos por s. Si $C(\alpha)$ denota la transformación de Christoffel con shift α y $G(\alpha, s)$ denota la transformación de Geronimus con shift α y parámetro s, entonces, es bien conocido [36, 64] que

$$C(\alpha)G(\alpha, s) = 1, \quad G(\alpha, s)C(\alpha) = U(\alpha, s),$$

donde $U(\alpha, s)$ es la llamada transformación de Uvarov que tiene el efecto de añadir una masa a la función peso inicial en el punto $x = \alpha$.

En nuestro trabajo, damos una interpretación matricial de las transformaciones espectrales mencionadas en el párrafo precedente, es decir, partiendo de la matriz mónica de Jacobi asociada a una sucesión de polinomios mónicos ortogonales, encontramos la matriz mónica de Jacobi asociada a los polinomios ortogonales relacionados con los tres tipos de transformaciones mencionados con anterioridad. La interpretacion matricial de la transformación de Darboux y de la transformacion de Darboux sin parámetro (equivalentemente, Geronimus y Christoffel), involucran, respectivamente, la factorización UL y la factorización LU de una matriz tridiagonal semi-infinita.

A pesar de la importancia de la transformación de Darboux en el análisis numérico, hasta la fecha no se había realizado ningún análisis de estabilidad de los algoritmos utilizados para calcular los distintos tipos de transformaciones de Darboux. En la literatura [37, 47, 32, 33] sólo aparecen afirmaciones vagas sobre la estabilidad numérica de dichos algoritmos basadas en algunos experimentos numéricos. En esta Memoria, presentamos el primer análisis riguroso de la estabilidad numérica del algoritmo usual que calcula una de las versiones matriciales de la transformacion de Darboux. También estudiamos la sensibilidad del problema.

Otro de los temas tratados en esta Memoria es el estudio de transformaciones espectrales de polinomios ortogonales respecto de funcionales bilineales. En particular, se estudian transformaciones tipo Christoffel asociadas a sucesiones de polinomios ortogonales que no satisfacen relaciones de recurrencia a tres términos. En este sentido, definimos transformaciones no simétricas de un funcional bilineal $\mathbf{L}$ como, por ejemplo, $\mathbf{U}(p, q) := \mathbf{L}(xp, q)$. También se definen las perturbaciones simétricas, en particular $\mathbf{x^2 L}$, a partir de la cual es fácil definir $\pi(\mathbf{x})\mathbf{L}$ cuando π es un polinomio par. Además, encontramos transformaciones tipo Darboux que relacionan las matrices de Hessenberg asociadas al funcional original y al perturbado.

En el estudio de las transformaciones espectrales, surge de forma natural el problema de simetrización de funcionales, el cual está estrechamente vinculado a la transformación de Christoffel.

Es bien conocido [23] el problema de simetrización para funcionales lineales. Dado un funcional lineal casi-definido y simétrico $\mathbf{U}$, definido en el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, si $\{Q_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{U}$, existen dos sucesiones de polinomios $\{P_n\}$ y $\{R_n\}$ tales que

$$Q_{2n}(x) = P_n(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xR_n(x^2). \tag{2}$$

La sucesión $\{R_n\}$ es la llamada sucesión de polinomios núcleo mónicos con parámetro 0 asociada a $\{P_n\}$. Existe una relación algebraica explícita entre ambas sucesiones, y es bien conocida la representación, en términos de $\mathbf{U}$, de los funcionales lineales $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}^*$ respecto de los cuales $\{P_n\}$ y $\{R_n\}$ son las correspondientes sucesiones de polinomios mónicos ortogonales. Además, se conoce una relación explícita entre ambos funcionales. El funcional $\mathbf{L}^*$ es una perturbación polinómica del funcional $\mathbf{L}$; en concreto, $\mathbf{L}^* = \mathbf{xL}$.

En la práctica, sin embargo, se trabaja con productos internos que no pueden ser expresados en términos de funcionales lineales, es decir, son funcionales bilineales generales; un ejemplo trivial es el caso de los productos de Sobolev [2, 30, 46, 48, 52, 62]. Uno de los objetivos de esta Memoria es extender el problema de simetrización lineal al caso bilineal, y estudiar las propiedades de ortogonalidad de las correspondientes sucesiones $\{P_n\}$ y $\{R_n\}$ en términos de las cuales pueden expresarse los polinomios ortogonales respecto de un funcional bilineal simetrizado (término equivalente a simétrico en el caso lineal). En particular, se plantea un problema interesante, la definición del funcional $\mathbf{xL}$ cuando $\mathbf{L}$ es un funcional bilineal. Esta extensión no trivial del caso lineal presenta multitud de nuevos matices y deja problemas abiertos que presentamos en la última sección de esta Memoria.

Otra de las aportaciones de esta memoria es una lectura matricial del problema de simetrización tanto lineal como bilineal haciendo uso de factorizaciones matriciales tan bien conocidas como LU, Cholesky o QR, aunque en nuestro contexto aplicadas a matrices semi-infinitas.

Explicamos a continuación los contenidos y aportaciones específicos de cada capítulo de la Memoria. El capítulo 1 tiene carácter introductorio y contiene los conceptos básicos sobre polinomios ortogonales en relación con el problema de simetrización y la teoría de perturbación de funcionales. En particular, se define un álgebra de funcionales lineales, se analizan las propiedades de los polinomios ortogonales respecto de funcionales lineales, se presentan los polinomios clásicos en el contexto de los polinomios semiclásicos, y se analiza el problema de simetrización lineal y su extensión al caso bilineal. Finalmente, se presenta la versión matricial de la transformación de Darboux en sus dos modalidades.

El capítulo 2 se ocupa de las transformaciones espectrales de polinomios ortogonales con respecto a un funcional lineal. En particular, se demuestra que la matriz mónica de Jacobi asociada a las transformadas de Christoffel, Geronimus y Uvarov de un funcional lineal puede encontrarse en términos de la matriz mónica del funcional original, haciendo uso de la versión matricial de la transformación de Darboux y la transformación de Darboux sin parámetro. Para el caso de la transformación de Christoffel se demuestra que la transformación de Darboux con shift permite encontrar la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{x^2U}$, cuando $\mathbf{U}$ es un funcional lineal simétrico, mediante un paso al límite. Una sección de este capítulo se ocupa de los funcionales lineales obtenidos mediante la combinación de transformaciones de Darboux discretas de distinto tipo para, finalmente, incluir un apartado en el que se deducen relaciones algebraicas entre las sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a los funcionales original y perturbado haciendo uso de los factores L y U involucrados en las factorizaciones LU y UL asociadas a los dos tipos de transformación de Darboux.

En el capítulo 3 se estudia el condicionamiento de la transformación de Darboux sin parámetro y sin shift, y se analiza la estabilidad numérica de un algoritmo que transforma la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal **L** en la asociada al funcional lineal **xL**. Esta transformación ha sido usada en numerosos problemas numéricos como, por ejemplo, en el cálculo de cuadraturas gaussianas. El principal resultado es que, aunque dicho algoritmo no es "backward estable", es "forward estable"; esto significa que los errores forward son de magnitud semejante a los producidos por un algoritmo backward estable. En palabras sencillas, podemos decir que la magnitud de los errores producidos por el algoritmo es la mejor que se puede esperar de la sensibilidad de los datos del problema. Además, se presentan cotas para los errores forward que pueden ser calculadas con bajo coste computacional. También se aplican los resultados a algunas familias de polinomios ortogonales clásicos. Se incluye así mismo una sección acerca de la estabilidad y sensibilidad de la factorización LU de matrices tridiagonales generales.

En el capítulo 4 se estudian transformaciones espectrales de polinomios ortogonales respecto de un funcional bilineal simétrico **L**. Aquí, el concepto "simétrico"significa $\mathbf{L}(p,q) = \mathbf{L}(q,p)$, $p, q \in \mathbb{P}$. Distinguiremos entre las transformaciones que generan nuevos funcionales bilineales simétricos y las que producen funcionales bilineales no simétricos. Las factorizaciones LU, QR y triangular aparecen de forma natural a la hora de buscar relaciones algebraicas explícitas entre las matrices de Hessenberg asociadas al funcional lineal original y el transformado. También se estudia el problema de simetrización bilineal, y se da una definición del funcional **xL** con respecto al funcional simetrizado **U**. Finalmente, se aplican los resultados al proceso de simetrización asociado a matrices de Hessenberg tales que alguna de sus potencias es una matriz banda.

En el capítulo 5 se estudia el problema de simetrización bilineal asociado a productos de Sobolev. En este sentido, se muestran dos situaciones:

- Productos de Sobolev simetrizados de orden N continuos.
- Productos de Sobolev simetrizados de orden 1 discreto-continuos.

En ambos casos, se estudian las propiedades de ortogonalidad de las componentes simétricas, es decir, de las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{R_n\}$ que verifican (2). En particular, se dan las medidas de ortogonalidad asociadas a cada una de ellas y, bajo ciertas restricciones relativas al carácter semiclásico de las medidas involucradas, se presentan relaciones de recurrencia a un número finito de términos que verifican dichas sucesiones, así como relaciones algebraicas explícitas entre ellas. También se presentan ejemplos concretos a los que se aplican los resultados.

Finalmente, incluimos una sección de problemas abiertos.

Capítulo 1

Propiedades generales de los polinomios ortogonales. El problema de simetrización y la transformación de Darboux

Como ya se comentó en la introducción, esta Memoria se enmarca en la teoría de polinomios ortogonales y se ocupa básicamente de dos problemas centrales: el problema de simetrización de funcionales, tanto lineales como bilineales, y la transformación de Darboux aplicada a la perturbación de funcionales. Este capítulo contiene información básica sobre propiedades de polinomios ortogonales con respecto a funcionales lineales y bilineales así como algunas definiciones relacionadas con funcionales lineales semiclásicos. En este sentido, se incluyen sin demostración algunos resultados básicos acerca de los polinomios ortogonales clásicos. También se plantea el problema de simetrización asociado a funcionales lineales y su extensión al caso bilineal. Finalmente, se definen la transformación de Darboux y la transformación de Darboux sin parámetro y se presentan algunos antecedentes históricos acerca de las mismas. Gran parte de los contenidos de este capítulo han sido extraídos de [23]. Sólo presentamos la demostración de aquellos resultados que no han sido probados con anterioridad.

1.1. Algebra de funcionales lineales

Sea $\mathbf{L}$ una función definida en el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes reales y con valores en el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{L} : \mathbb{P} \to \mathbb{R},$$

tal que

$$\mathbf{L}(p+q) = \mathbf{L}(p) + \mathbf{L}(q), \quad p, q \in \mathbb{P},$$
$$\mathbf{L}(\lambda p) = \lambda \mathbf{L}(p), \quad \lambda \in \mathbb{C},\ p \in \mathbb{P}.$$

Entonces, se dice que $\mathbf{L}$ es un *funcional lineal*. Una definición semejante es posible cuando se considera el conjunto de los números complejos en vez del conjunto de los números reales. Sin embargo, para los resultados de esta Memoria es suficiente considerar $\mathbb{R}$. En lo que sigue, p siempre denota un polinomio.

Por los Teoremas de Boas y Durán [9, 28], podemos afirmar que todo funcional lineal $\mathbf{L}$ tiene una representación integral, i.e., existen una medida de Borel μ y una función peso ω tales que

$$\mathbf{L}(p) = \int_{\mathbb{R}} p \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} p(x) \, \omega(x) dx. \tag{1.1}$$

Definición 1.1.1 *Sea* $\mathbf{L}$ *un funcional lineal. Consideremos la base canónica del espacio de los polinomios* $\{x^n\}$ *y sea* $X = [1, x, x^2, ...]^t$*. Llamamos* momento estándar de orden n *asociado a* $\mathbf{L}$ *al número complejo* μ_n *definido por*

$$\mu_n = \mathbf{L}(x^n), \quad n \geq 0.$$

Llamaremos matriz de momentos estándar *asociada a* $\mathbf{L}$ *a la matriz semi-infinita* M *cuyos elementos vienen dados por:*

$$M_{i,j} = \mu_{i+j-2}, \quad i, j \geq 1.$$

Si consideramos una base del espacio de los polinomios $\{S_n\}$ *(es decir, una sucesión de polinomios* $\{S_n\}$ *tal que* $\deg(S_n)=n$*) distinta de la canónica, entonces podemos hablar del* momento modificado de orden n *asociado a* $\mathbf{L}$ *y a* $\{S_n\}$*, es decir,*

$$\overline{\mu}_n = \mathbf{L}(S_n), \quad n \geq 0.$$

Además, se obtiene la matriz de momentos modificados M_S *dada por*

$$(M_S)_{i,j} = \mathbf{L}(S_{i-1} S_{j-1}), \quad i, j \geq 1.$$

Observación 1.1.1 *Obsérvese que la matriz de momentos* M *es una matriz de Hankel*

$$M = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

mientras que M_S *no es de Hankel, en general.*

Definición 1.1.2 *Si la matriz de momentos asociada a un funcional lineal* $\mathbf{L}$ *es casi-definida, es decir, todos los menores principales superiores izquierdos de* M *son no nulos, diremos que* $\mathbf{L}$ *es un* funcional lineal casi-definido*. Si la matriz de momentos es definida positiva, es decir, todos los menores principales superiores izquierdos de* M *son positivos, diremos que* $\mathbf{L}$ *es un* funcional lineal definido positivo*. En este caso,* $\mathbf{L}$ *tiene una representación integral (1.1) en términos de una medida de Borel positiva.*

Como veremos en la próxima sección, la definición de funcional casi-definido es fundamental debido a que esta característica nos asegura que el correspondiente funcional tiene asociada una sucesión de polinomios ortogonales.

Un caso particular de funcional lineal que aparecerá con frecuencia en los próximos capítulos es el llamado *funcional de Dirac*.

Definición 1.1.3 *Sea $c \in \mathbb{C}$. El funcional lineal δ_c tal que $\delta_c(p) = p(c)$, con $p \in \mathbb{P}$, se llama* funcional de Dirac en c.

Consideremos a continuación algunas operaciones con funcionales lineales.

Definición 1.1.4 *Sea $\pi \in \mathbb{P}$. El funcional lineal $\pi\mathbf{L}$ definido por $(\pi\mathbf{L})(p) = \mathbf{L}(\pi p)$, recibe el nombre de* multiplicación por la izquierda de $\mathbf{L}$ por un polinomio π.

En particular, cuando $\pi = x - \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, al funcional $(\mathbf{x} - \alpha)\mathbf{L}$ se le conoce como *transformada de Christoffel básica* de $\mathbf{L}$ [66, 71].

Definición 1.1.5 *Sea $\mathbf{C} \in \mathbb{C}$. El funcional lineal $\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$ recibe el nombre de* transformada de Uvarov *de $\mathbf{L}$ [66, 71].*

Definición 1.1.6 *Sea $a \in \mathbb{C}$. El funcional lineal $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\mathbf{a}}\mathbf{L}$ tal que $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\mathbf{a}}\mathbf{L}\right)(p) = \mathbf{L}\left(\frac{p(x)-p(a)}{x-a}\right)$ es la llamada multiplicación por la izquierda de $\mathbf{L}$ por la función racional $\frac{1}{x-a}$.*

La variante del funcional multiplicación por la izquierda por una función racional que aparece a continuación

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\mathbf{a}}\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{a}},$$

recibe el nombre de *transformada de Geronimus* de $\mathbf{L}$ [66, 71].

La definición que aparece a continuación extiende la Definición 1.1.6 al caso en que multiplicamos un funcional lineal por la izquierda por la función racional $\frac{1}{\pi(x)}$, donde $\pi(x) \in \mathbb{P}$. Consideramos, por simplicidad, que $\pi(x)$ es un polinomio mónico. La extensión al caso general es trivial.

Definición 1.1.7 *Sea $\pi(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ un polinomio mónico con raíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y sea $\mathbf{L}$ un funcional lineal. Entonces, definimos el funcional $\frac{\mathbf{1}}{\pi}\mathbf{L}$ por*

$$\frac{\mathbf{1}}{\pi}\mathbf{L} := \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{1}}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{2}}}\cdots\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{n}}}\mathbf{L}\right)\cdots\right),$$

es decir, mediante una composición de funcionales del tipo que aparece en la Definición 1.1.6.

La siguiente proposición demuestra que la Definición 1.1.7 es independiente del orden de la composición. Incluímos la demostración por tratarse de un resultado nuevo.

Proposición 1.1.1 *Sea* $\mathbf{L}$ *un funcional lineal. Si* p *denota un polinomio y* $\pi(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$, *entonces*

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\pi}\mathbf{L}\right)(p(x)) = \mathbf{L}\left[\frac{p(x) - Pint_{n-1}(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}{\pi(x)}\right],$$

donde $Pint_{n-1}(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ *denota el polinomio interpolador de Newton de grado* $n-1$ *que interpola a* p *en* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Demostración. Es bien sabido que el polinomio que interpola a p en $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, con $k = 1, 2, ...$ es

$$Pint_k(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = p(\alpha_1) + \sum_{i=1}^{k-1} p[\alpha_1, ..., \alpha_{i+1}] \prod_{j=1}^{i}(x-\alpha_j),$$

donde

$$p[\alpha] = p(\alpha), \quad \text{y} \quad p[\alpha_1,\ldots,\alpha_n] = \frac{p[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}] - p[\alpha_2,\ldots,\alpha_n]}{\alpha_1-\alpha_n}.$$

Probaremos el enunciado por inducción. Se cumple trivialmente para $k = 1$ teniendo en cuenta la Definición 1.1.6. Supongamos que se cumple para $k = n-1$, es decir,

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{2}}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{3}}}\cdots\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{n}}}\mathbf{L}\right)\cdots\right)\right](p(x)) = \mathbf{L}\left[\frac{p(x) - Pint_{n-2}(x;\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}{\prod_{j=2}^{n}(x-\alpha_j)}\right].$$

Entonces,

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{1}}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{2}}}\cdots\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{n}}}\mathbf{L}\right)\cdots\right)\right](p(x))\\ &= \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{2}}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{3}}}\cdots\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha_{\mathbf{n}}}\mathbf{L}\right)\cdots\right)\right]\left(\frac{p(x)-p(\alpha_1)}{x-\alpha_1}\right). \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Denotemos por $q(x) = \frac{p(x)-p(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$. Entonces, es fácil probar que, si $i \geq 2$,

$$q[\alpha_2,\ldots,\alpha_i] = p[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_i].$$

Si denotamos por $Qint_{n-2}(x;\alpha_2,...,\alpha_n)$ el polinomio que interpola a $q(x)$ en $\alpha_2,...,\alpha_n$, aplicando la hipótesis de inducción a (1.3), se obtiene

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}\left[\frac{q(x) - Qint_{n-2}(x;\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}{\prod_{j=2}^{n}(x-\alpha_j)}\right]\\ &= \mathbf{L}\left[\frac{\frac{p(x)-p(\alpha_1)}{x-\alpha_1} - p[\alpha_1,\alpha_2] - \sum_{i=1}^{n-2} p[\alpha_1,\ldots,\alpha_{i+2}]\prod_{j=1}^{i}(x-\alpha_{j+1})}{\prod_{j=2}^{n}(x-\alpha_j)}\right]\\ &= \mathbf{L}\left[\frac{p(x)-p(\alpha_1) - p[\alpha_1,\alpha_2](x-\alpha_1) - \sum_{i=1}^{n-2} p[\alpha_1,\ldots,\alpha_{i+2}]\prod_{j=0}^{i}(x-\alpha_{j+1})}{\prod_{j=1}^{n}(x-\alpha_j)}\right],\end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado de forma inmediata. □

En interesante resaltar que la proposición anterior es válida cuando el polinomio $\pi(x)$ tiene raíces múltiples. Basta tener en cuenta en la demostración que el valor de la diferencia dividida $p[a_1, a_2, ..., a_n]$ no varía si permutamos cíclicamente las a_i y que, si los n argumentos son iguales, entonces la diferencia dividida anterior puede expresarse en términos de la derivada $n-1$-ésima de p, es decir, $p[a, a, ..., a] = p^{(n-1)}(a)$.

Observación 1.1.2 *En el caso particular en que el polinomio $\pi(x) = x^n$, es decir, cuando $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, es evidente que*

$$Pint(x; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p^{(i)}(0)}{i!} x^i,$$

donde $p^{(i)}$ denota la derivada i-ésima de p.

Finalmente, definimos la derivada distribucional de un funcional lineal.

Definición 1.1.8 *Sea $\mathbf{L}$ un funcional lineal. El funcional lineal $D(\mathbf{L})$ definido por $D(\mathbf{L})(p) = -\mathbf{L}(p')$, donde p' denota la derivada del polinomio p, se denomina la* derivada del funcional $\mathbf{L}$.

1.2. Propiedades de los polinomios ortogonales respecto de funcionales lineales

Sea $\mathbf{L}$ un funcional lineal. Dada una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ con coeficientes reales, diremos que es ortogonal respecto de $\mathbf{L}$ si

- $\deg(P_n) = n$ para todo $n \geq 0$,
- $\mathbf{L}(P_n P_m) = K_n \delta_{n,m}$ con $K_n \neq 0$ y donde $\delta_{n,m}$ es la "delta de Kronecker" definida por

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 1 & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Si el funcional $\mathbf{L}$ está expresado en términos de una medida de Borel μ como en (1.1), decir que la sucesión $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto a la medida μ es equivalente a decir que la sucesión $\{P_n\}$ es ortogonal respecto a $\mathbf{L}$.

Diremos que la sucesión $\{P_n\}$ es *ortonormal* con respecto a $\mathbf{L}$ si es una sucesión ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$ y además, $\mathbf{L}(P_n^2) = 1$ para todo n.

Proposición 1.2.1 *Si* $\mathbf{L}$ *es un funcional casi-definido, entonces existe una sucesión de polinomios* $\{P_n\}$ *ortogonal respecto del funcional* $\mathbf{L}$*, dada por :*

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \tag{1.4}$$

Si el funcional es definido positivo, entonces existe una sucesión de polinomios ortonormal con respecto al mismo.

Resulta evidente que si $\{P_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonal respecto de un funcional lineal $\mathbf{L}$, entonces $\{c_n P_n\}$ también lo será para toda sucesión de constantes no nulas $\{c_n\}$. En particular, si el coeficiente líder de cada polinomio es uno, se dice que los polinomios son *mónicos*. Toda sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}$ ortogonal respecto de un funcional lineal $\mathbf{L}$ verifica una relación de recurrencia a tres términos:

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{1.5}$$

$$P_{-1}(x) = 0, \ P_0(x) = 1, \tag{1.6}$$

donde $\gamma_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$.

De igual forma que toda sucesión de polinomios ortogonal con respecto a un funcional lineal casi-definido verifica una relación de recurrencia a tres términos (1.5), toda relación de recurrencia a tres términos, cuyos parámetros verifican ciertas restricciones, y bajo determinadas condiciones iniciales, tiene asociada una sucesión de polinomios ortogonal respecto a un determinado funcional lineal. El siguiente teorema presenta este resultado.

Teorema 1.2.1 *(Teorema de Favard)[23] Sean* $\{\beta_n\}$ *y* $\{\gamma_n\}$ *dos sucesiones arbitrarias de números complejos y sea* $\{P_n\}$ *la sucesión de polinomios mónicos definida por la relación de recurrencia (1.5) con las condiciones iniciales dadas en (1.6). Entonces, existe un único funcional lineal* $\mathbf{L}$ *tal que*

$$\mathbf{L}(1) = \gamma_0, \quad \mathbf{L}(P_m(x)P_n(x)) = 0, \quad \text{para } n \neq m, \quad m, n = 0, 1, 2, ...$$

Además, $\mathbf{L}$ *es un funcional casi-definido y* $\{P_n\}$ *es su correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos si y sólo si* $\gamma_n \neq 0$ *para todo* n*. El funcional* $\mathbf{L}$ *será definido positivo si y sólo si* β_n *es real y* $\gamma_n > 0$*, para* $n \geq 1$*.*

Sea $\mathbf{L}$ un funcional lineal casi-definido y sea $\{P_n\}$ la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Entonces, la relación de recurrencia que verifican los polinomios P_n, dada en (1.5), puede expresarse en notación matricial de la forma siguiente :

$$x \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

donde J es una matriz semi-infinita y tridiagonal dada por

$$J = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

A la matriz J la llamaremos *matriz mónica de Jacobi* asociada al funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$. A continuación incluímos dos proposiciones que relacionan los autovalores de las submatrices de la matriz mónica de Jacobi con los ceros de los polinomios de la sucesión $\{P_n\}$, y cuyas demostraciones pueden encontrarse en [23].

Proposición 1.2.2 *Los autovalores de la submatriz principal superior izquierda de orden n de J son los ceros del polinomio ortogonal P_n.*

Proposición 1.2.3 *Sea μ una medida positiva cuyo soporte es un subconjunto de la recta real que contiene infinitos puntos. Entonces, si $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a μ, los ceros de P_n están en la envoltura convexa del soporte de la medida para todo n.*

Cuando un funcional lineal es definido positivo podemos hablar de *la norma de los polinomios P_n*. Sea $\{\hat{P}_n\}$ la sucesión de polinomios ortonormales (obsérvese que elegimos positivo el coeficiente líder), entonces se puede demostrar

$$\hat{P}_n = P_n \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}},$$

donde Δ_n denota el determinante de la sección de orden $n+1$ de M. Entonces, $\{\hat{P}_n\}$ verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$\sqrt{\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}}\hat{P}_{n+1}(x) = (x-\beta_n)\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\hat{P}_n(x) - \gamma_n \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}}\hat{P}_{n-1}(x)$$

Si se multiplican ambos miembros por $\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$, teniendo en cuenta que $\gamma_n = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}$ [23, pag. 19], entonces $\{\hat{P}_n\}$ verifica la relación:

$$a_{n+1}\hat{P}_{n+1}(x) = (x-\beta_n)\hat{P}_n(x) - a_n\hat{P}_{n-1}(x),$$

donde

$$a_n^2 = \gamma_n^2 \frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_n \Delta_{n-2}} = \frac{\gamma_n^2}{\gamma_n} = \gamma_n.$$

Por tanto, la relación de recurrencia anterior puede expresarse como:

$$\sqrt{\gamma_{n+1}}\hat{P}_{n+1}(x) + \beta_n\hat{P}_n(x) + \sqrt{\gamma_n}\hat{P}_{n-1}(x) = x\hat{P}_n(x),$$

y la matriz tridiagonal asociada a la sucesión de polinomios ortonormales es:

$$J_s = \begin{bmatrix} \beta_0 & \sqrt{\gamma_1} & 0 & \cdots \\ \sqrt{\gamma_1} & \beta_1 & \sqrt{\gamma_2} & \cdots \\ 0 & \sqrt{\gamma_2} & \beta_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Esta matriz es simétrica y recibe el nombre de *matriz de Jacobi* asociada a la sucesión $\{\hat{P}_n\}$. Obsérvese que, cuando un funcional $\mathbf{L}$ es definido positivo, los parámetros γ_n en la relación de recurrencia son todos positivos y, por tanto, se pueden escoger las raíces cuadradas positivas para los elementos no diagonales de J_s. La siguiente proposición relaciona los autovalores de las submatrices principales de J_s con los ceros de los correspondientes polinomios ortonormales.

Proposición 1.2.4 *Los autovalores de la submatriz principal de orden n de J_s son los ceros del polinomio ortonormal $\hat{P}_n$.*

Corolario 1.2.1 *Sea J_s la matriz de Jacobi asociada a una medida positiva μ con soporte en un intervalo de la recta real contenido en $(0,\infty)$. Entonces, J_s es una matriz simétrica definida positiva.*

1.3. Sucesiones de polinomios ortogonales semiclásicos

Consideremos un funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$ definido en $\mathbb{P}$ y sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$. Se dice que $\mathbf{L}$ es un *funcional lineal semiclásico* si existen polinomios ϕ y ψ, con $\deg(\psi) \geq 1$, tales que

$$D(\phi\mathbf{L}) = \psi\mathbf{L}, \tag{1.9}$$

donde D denota la derivada distribucional.

Notación: En el resto de este capítulo aparece con frecuencia la siguiente notación:

$$\phi(x)p(x)\omega(x)|_a^b = 0,$$

que significa

$$\lim_{x\to a}\phi(x)p(x)\omega(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b}\phi(x)p(x)\omega(x) = 0.$$

La condición de ser semiclásico también puede ser caracterizada en términos de una función peso:

Proposición 1.3.1 *[43] Sea $\mathbf{L}$ un funcional lineal semiclásico (1.9) con representación integral*

$$\mathbf{L}(p) = \int_{\mathbb{R}} p(x)\omega(x)dx, \tag{1.10}$$

donde ω es una función contínuamente diferenciable en un intervalo $[a,b]$ y que satisface ciertas condiciones de contorno, es decir, $\phi(x)p(x)\omega(x)|_a^b = 0$ para todo polinomio p. Entonces,

$$(\phi\omega)' = \psi\omega, \tag{1.11}$$

y se dice que ω es una función peso semiclásica. *La ecuación (1.11) es la llamada ecuación de Pearson. En el caso de funcionales generales (1.9) es la* ecuación distribucional de Pearson.

Observemos que, para toda función peso ω con las condiciones que aparecen en la Proposición 1.3.1, existe una familia infinita de pares de polinomios (ϕ, ψ) que verifican la ecuación de Pearson dada en (1.11). Teniendo en cuenta este hecho, P. Maroni [54] introdujo el concepto de clase de un funcional semiclásico.

Definición 1.3.1 *[54] Dado un funcional lineal semiclásico* $\mathbf{L}$*, sea (ϕ, ψ) el par de polinomios de grado mínimo que satisface (1.9). Entonces, se define* la clase del funcional $\mathbf{L}$ *como*

$$s = \text{máx}\{\deg(\phi) - 2, \deg(\psi) - 1\}. \tag{1.12}$$

Si una sucesión de polinomios es ortogonal respecto de un funcional semiclásico se dice que se trata de una sucesión de *polinomios semiclásicos*. Un caso particular de polinomios semiclásicos son los llamados *polinomios clásicos*, asociados a funcionales semiclásicos de clase 0. Estas sucesiones tienen nombre propio: polinomios de Jacobi, polinomios de Hermite, polinomios de Laguerre y polinomios de Bessel. Dada la frecuencia con que haremos uso de estas sucesiones, presentamos a continuación algunos datos acerca de cada una de ellas. Notemos también que, de acuerdo a la Definición 1.3.1, si un funcional es de clase 0, debe ocurrir que $\deg(\phi) \leq 2$ y $\deg(\psi) = 1$. Cuando nos refiramos a las relaciones de recurrencia a tres términos que verifican dichas sucesiones de polinomios, supondremos que las condiciones iniciales son $P_0(x) = 1,\ P_{-1}(x) = 0$, y que estamos considerando las respectivas sucesiones de polinomios mónicos.

1.3.1. Polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi constituyen una familia biparamétrica, es decir, para diferentes valores de dos parámetros dados α y β se obtienen distintas sucesiones de polinomios de Jacobi. De ahí que, de ahora en adelante, los denotemos por $P_n^{(\alpha,\beta)}$, donde $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Estos polinomios son ortogonales con respecto al funcional lineal definido positivo $\mathbf{L}$ dado por

$$\mathbf{L}(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\ (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx.$$

La función peso que define $\mathbf{L}$ es semiclásica de clase 0 dado que

$$[(1-x^2)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}]\ ' = [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x](1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

con las condiciones de frontera $(1-x^2)p(x)\omega(x)|_{-1}^{1} = 0$, para todo $p \in \mathbb{P}$.

La sucesión de polinomios mónicos de Jacobi de parámetros α y β verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (x-\beta_n)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \gamma_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.13}$$

donde

$$\beta_n = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)},$$

$$\gamma_n = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta-1)},$$

excepto cuando $\alpha = -\beta$, en cuyo caso $\beta_0 = (\beta-\alpha)/(\alpha+\beta+2)$.

1.3.2. Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre constituyen una familia uniparamétrica, es decir, para diferentes valores de un parámetro dado α se obtienen distintas sucesiones de polinomios de Laguerre. De ahí que, de ahora en adelante, los denotemos por $L_n^{(\alpha)}$, donde $\alpha > -1$. Estos polinomios son ortogonales con respecto al funcional lineal $\mathbf{L}$ dado por

$$\mathbf{L}(p(x)) = \int_0^\infty p(x)\, x^\alpha e^{-x} dx.$$

El funcional $\mathbf{L}$ también es definido positivo y obsérvese que la función peso que lo define es semiclásica de clase 0 dado que

$$[x\, x^\alpha e^{-x}]\,' = [\alpha+1-x]x^\alpha e^{-x},$$

con condiciones de frontera $xp(x)\omega(x)|_0^\infty = 0$.

La sucesión de polinomios mónicos de Laguerre de parámetro α verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x-\beta_n)L_n^{(\alpha)}(x) - \gamma_n L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.14}$$

donde

$$\beta_n = 2n+\alpha+1, \quad \gamma_n = n(n+\alpha).$$

1.3.3. Polinomios de Hermite

La sucesión de polinomios de Hermite $\{H_n\}$ es ortogonal con respecto al funcional lineal $\mathbf{L}$ dado por

$$\mathbf{L}(p(x)) = \int_{-\infty}^\infty p(x)\, e^{-x^2} dx.$$

El funcional $\mathbf{L}$ es definido positivo y obsérvese que la función peso que lo define es semiclásica de clase 0 dado que

$$[e^{-x^2}]\,' = [-2x]e^{-x^2},$$

con condiciones de frontera $p(x)\omega(x)|_{-\infty}^{\infty} = 0$.

La sucesión de polinomios mónicos de Hermite verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{1}{2}nH_{n-1}(x), \quad n \geq 0. \tag{1.15}$$

1.3.4. Polinomios de Bessel

Los polinomios de Bessel constituyen una familia uniparamétrica de parámetro α, donde $\alpha \neq -2, -3, -4, ...$ De ahora en adelante, los denotaremos por $B_n^{(\alpha)}$. Estos polinomios son ortogonales con respecto a un funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$ dado por

$$\mathbf{L}(p(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_C p(z)\ \rho^{\alpha}(z)dz, \tag{1.16}$$

donde C denota el círculo unidad y

$$\rho^{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+1)_k}\left(-\frac{2}{z}\right)^k. \tag{1.17}$$

Observemos que, aunque existe una representación integral de los polinomios de Bessel en términos de una función peso real con soporte en $\mathbf{R}$, damos la representación integral (1.16) por ser ésta mucho más sencilla.

En (1.17), $(x)_n$ es el símbolo de Pochhammer definido mediante

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1),\ n \geq 1.$$

El funcional $\mathbf{L}$ es clásico dado que

$$D(\phi\mathbf{L}) = \psi\mathbf{L},$$

donde $\phi(x) = x^2$ y $\psi(x) = (\alpha+2)x + 2$.

La sucesión de polinomios mónicos de Bessel de parámetro α verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$B_{n+1}^{\alpha}(x) = (x-\beta_n)B_n^{\alpha}(x) - \gamma_n B_{n-1}^{\alpha}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.18}$$

donde

$$\beta_n = \frac{-2\alpha}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)}, \quad \gamma_n = \frac{-4n(n+\alpha)}{(2n+\alpha)^2(2n-1+\alpha)(2n+1+\alpha)}.$$

1.4. Funcionales lineales simétricos y el proceso de simetrización

Definición 1.4.1 *Diremos que un funcional lineal* $\mathbf{U}$ *es* simétrico *si todos sus momentos de orden impar son nulos, es decir,*

$$\mu_{2k+1} = \mathbf{U}(x^{2k+1}) = 0, \quad k \geq 0.$$

Proposición 1.4.1 *Sea un funcional lineal* $\mathbf{U}$ *definido en términos de una función peso* ω *como en (1.1), entonces una condición necesaria y suficiente para que* $\mathbf{U}$ *sea simétrico es que* ω *sea una función par definida en un subconjunto de la recta real simétrico respecto del origen.*

Teorema 1.4.1 *Sea* $\{Q_n\}$ *la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a un funcional lineal casi-definido* $\mathbf{U}$*. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\mathbf{U}$ *es simétrico.*
- $Q_n(-x) = (-1)^n Q_n(x), \quad n \geq 0.$
- *En la fórmula de recurrencia (1.5), los parámetros* $\beta_n = 0$*, para* $n \geq 0$*.*

Observación 1.4.1 *Si tenemos en cuenta la tercera afirmación en el teorema anterior, se deduce que la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal simétrico tiene diagonal principal nula.*

Sea $\mathbf{U}$ un funcional lineal casi-definido y simétrico, y sea $\mathbf{L}$ el funcional lineal definido por:

$$\mathbf{L}(x^n) := \mathbf{U}(x^{2n}). \tag{1.19}$$

Supongamos que $\{Q_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{U}$. Entonces, por el Teorema 1.4.1, $Q_n(-x) = (-1)^n Q_n(x)$. Esto implica que existen dos sucesiones de polinomios mónicos $\{P_n\}$ y $\{P_n^*\}$ tales que

$$Q_{2n}(x) = P_n(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xP_n^*(x^2). \tag{1.20}$$

Es fácil probar que la sucesión $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto al funcional $\mathbf{L}$ definido en (1.19), es decir, el funcional $\mathbf{L}$ es casi-definido, y la sucesión $\{P_n^*\}$ es ortogonal respecto del funcional $\mathbf{L}^* = \mathbf{xL}$. $\{P_n^*\}$ es la sucesión de *polinomios núcleo mónicos asociados a* $\mathbf{L}$ *y al parámetro cero* [23]. La notación usual para estos polinomios es $\{P_n^*(0;x)\}$ pero, por simplicidad, de ahora en adelante denotaremos por P_n^* a los polinomios núcleo asociados al parámetro cero, salvo cuando se pueda incurrir en error. Los polinomios núcleo están unívocamente determinados por la sucesión $\{P_n\}$ de acuerdo a la siguiente relación:

$$P_n^*(x) = \frac{1}{x}\left[P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(0)}{P_n(0)}P_n(x)\right]. \tag{1.21}$$

Como un ejemplo bien conocido del proceso de simetrización, los polinomios de Hermite son los simetrizados de los polinomios de Laguerre con parámetro $\alpha = -1/2$, i.e.

$$H_{2n}(x) = L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2),$$

$$H_{2n+1}(x) = xL_n^{\frac{1}{2}}(x^2).$$

Recíprocamente, podemos considerar un funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$ y definir un funcional lineal simétrico $\mathbf{U}$ del modo siguiente:

$$\mathbf{U}(x^{2n}) = \mathbf{L}(x^n), \quad \mathbf{U}(x^{2n+1}) = 0, \quad n \geq 0. \tag{1.22}$$

Sin embargo, no podemos asegurar que el funcional $\mathbf{U}$ que hemos definido sea casi-definido, de ahí que sea necesario introducir la siguiente definición.

Definición 1.4.2 *Sea* $\mathbf{L}$ *un funcional lineal casi-definido. Se dice que* $\mathbf{L}$ *es* simetrizable *si el funcional lineal* $\mathbf{U}$ *definido en (1.22) es también casi-definido.*

La siguiente proposición da condiciones necesarias y suficientes para que un funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$ sea simetrizable (ver [23]).

Proposición 1.4.2 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El funcional lineal casi-definido* $\mathbf{L}$ *es simetrizable.*
2. *La sucesión* $\{P_n\}$ *de polinomios mónicos ortogonales con respecto a* $\mathbf{L}$ *verifica* $P_n(0) \neq 0$ *para todo* $n \geq 1$*.*
3. *Existe la factorización* LU *sin pivote de la matriz mónica de Jacobi* J *asociada a* $\mathbf{L}$*.*
4. *El funcional* $\mathbf{xL}$ *es casi-definido.*
5. *Existe la sucesión de polinomios núcleo con parámetro* 0 *asociada a* $\{P_n\}$*.*

Si $\{Q_n\}$ denota la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{U}$, entonces $\{Q_n\}$ se puede expresar como en (1.20).

1.5. Polinomios ortogonales respecto de funcionales bilineales

Consideremos ahora un funcional bilineal $\tilde{\mathbf{L}}$ definido en $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$. Entonces, definimos el momento $\mu_{n,m}$ mediante

$$\tilde{\mathbf{L}}[x^n, x^m] = \mu_{n,m},$$

y construímos la correspondiente matriz de momentos del modo siguiente:

$$M(i,j) = \mu_{i-1,j-1}, \quad i,j \geq 1.$$

En tal caso, diremos que $\tilde{\mathbf{L}}$ es casi-definido si la matriz de momentos M lo es.

Diremos que una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto a un funcional bilineal $\tilde{\mathbf{L}}$ si:

- $\deg P_n = n$ para todo $n \geq 0$,
- $\tilde{\mathbf{L}}(P_n, P_m) = K_n \delta_{n,m}$, para todo $n, m \geq 0$ y $K_n \neq 0$.

Si $\tilde{\mathbf{L}}$ es un funcional bilineal casi-definido, entonces existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ ortogonal con respecto a $\tilde{\mathbf{L}}$. En general, estos polinomios no verificarán una relación de recurrencia a un número finito de términos. Sin embargo, al ser $\{P_n\}$ una base polinómica, se verifica la siguiente relación

$$xv_p = Hv_p,$$

donde $v_p = [P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots]^t$, y H es una matriz de Hessenberg inferior, es decir,

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & 0 & \cdots \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

En lo que sigue, diremos que H es la *matriz de Hessenberg* asociada al funcional bilineal $\tilde{\mathbf{L}}$.

Obsérvese que todo funcional lineal $\mathbf{L}$ definido en $\mathbb{P}$ induce un funcional bilineal $\tilde{\mathbf{L}}$ en $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ mediante

$$\tilde{\mathbf{L}}(p,q) = \mathbf{L}(pq), \quad p, q \in \mathbb{P}.$$

El Teorema de Favard nos dice que el funcional $\tilde{\mathbf{L}}$ está inducido por un funcional lineal si y sólo si la matriz de Hessenberg H asociada a $\tilde{\mathbf{L}}$ es una matriz de Jacobi.

1.6. Funcionales bilineales y el proceso de simetrización

El proceso de simetrización planteado en la Sección 1.4 puede generalizarse al caso de funcionales bilineales. En este caso, sin embargo, hay que distinguir entre los conceptos de funcional bilineal simétrico y simetrizado.

Definición 1.6.1 *Diremos que un funcional bilineal* $\tilde{\mathbf{U}}$ *es simétrico si*

$$\tilde{\mathbf{U}}(p,q) = \tilde{\mathbf{U}}(q,p).$$

Obsérvese que la definición de funcional bilineal simétrico no está relacionada con la definición de funcional lineal simétrico dada en la Sección 1.4. Pero una definición equivalente a la Definición 1.4.1 para funcionales bilineales es la siguiente:

Definición 1.6.2 *Sea* $\tilde{\mathbf{U}}$ *un funcional bilineal simétrico. Diremos que* $\tilde{\mathbf{U}}$ *es un funcional simetrizado si* $\tilde{\mathbf{U}}(x^n, x^m) = 0$ *cuando* $n+m$ *es un entero positivo impar.*

Observación 1.6.1 *De nuevo, si* $\tilde{\mathbf{U}}$ *está inducido por un funcional lineal* $\mathbf{U}$*,* $\tilde{\mathbf{U}}$ *es simetrizado si y sólo si* $\mathbf{U}$ *es simétrico en el sentido de la Definición 1.4.1.*

Si el funcional $\tilde{\mathbf{U}}$ simétrico y simetrizado es casi-definido y $\{Q_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\tilde{\mathbf{U}}$, es fácil probar que se verifican propiedades semejantes a las que tienen las sucesiones de polinomios ortogonales respecto de funcionales lineales simétricos. En particular,

Proposición 1.6.1 *Sea* $\tilde{\mathbf{U}}$ *un funcional bilineal casi-definido, simétrico y simetrizado, y sea* $\{Q_n\}$ *la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Entonces, existen dos sucesiones de polinomios mónicos* $\{P_n\}$ *y* $\{P_n^{*u}\}$ *tales que*

$$Q_{2n}(x) = P_n(x^2),\ Q_{2n+1}(x) = xP_n^{*u}(x^2). \tag{1.23}$$

Se dice que $\{P_n^{*u}\}$ es la sucesión de *polinomios núcleo generalizados* asociada a $\{P_n\}$ con respecto a $\tilde{\mathbf{U}}$. A diferencia de lo que ocurría en el caso lineal, la sucesión $\{P_n^{*u}\}$ no está unívocamente determinada por la sucesión $\{P_n\}$, como veremos en capítulos posteriores.

Proposición 1.6.2 *Sea* $\tilde{\mathbf{U}}$ *un funcional bilineal simétrico y simetrizado. Sea* $\{Q_n\}$ *la sucesión de polinomios mónicos ortogonal respecto de* $\tilde{\mathbf{U}}$*. Si* $\{P_n\}$ *y* $\{P_n^{*u}\}$ *son las sucesiones que verifican (1.23), entonces* $\{P_n\}$ *es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al funcional bilineal* $\tilde{\mathbf{L}}$ *dado por*

$$\tilde{\mathbf{L}}(x^m, x^n) = \tilde{\mathbf{U}}(x^{2m}, x^{2n}), \quad m, n \geq 0. \tag{1.24}$$

Equivalentemente, $\{P_n^{*u}\}$ *es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al funcional bilineal* $\tilde{\mathbf{L}}^*$ *dado por*

$$\tilde{\mathbf{L}}^*(x^m, x^n) = \tilde{\mathbf{U}}(x^{2m+1}, x^{2n+1}), \quad m, n \geq 0. \tag{1.25}$$

Demostración. Es fácil probar a partir de (1.24) y de (1.25) que

$$\tilde{\mathbf{L}}(p(x), q(x)) = \tilde{\mathbf{U}}(p(x^2), q(x^2)),$$
$$\tilde{\mathbf{L}}^*(p(x), q(x)) = \tilde{\mathbf{U}}(xp(x^2), xq(x^2)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}(P_n(x), P_m(x)) &= \tilde{\mathbf{U}}(P_n(x^2), P_m(x^2)) \\ &= \tilde{\mathbf{U}}(Q_{2n}(x), Q_{2m}(x)) \\ &= K_{2n}\delta_{n,m}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{L}}^*(P_n^*(x), P_m^*(x)) &= \tilde{\mathbf{U}}(xP_n^*(x^2), xP_m^*(x^2)) \\ &= \tilde{\mathbf{U}}(Q_{2n+1}(x), Q_{2m+1}(x)) \\ &= K_{2n+1}\delta_{n,m}.\end{aligned}$$

□

Corolario 1.6.1 *Supongamos que la matriz de momentos estándar asociada al funcional bilineal simétrico y simetrizado* $\tilde{\mathbf{U}}$ *es*

$$M_U = \begin{bmatrix} \mu_{00} & 0 & \mu_{02} & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_{11} & 0 & \mu_{13} & \cdots \\ \mu_{20} & 0 & \mu_{22} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Entonces las matrices de momentos estándar asociadas a los funcionales bilineales $\tilde{\mathbf{L}}$ *y* $\tilde{\mathbf{L}}^*$ *son, respectivamente,*

$$M_L = \begin{bmatrix} \mu_{00} & \mu_{02} & \mu_{04} & \cdots \\ \mu_{20} & \mu_{22} & \mu_{24} & \cdots \\ \mu_{40} & \mu_{42} & \mu_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad M_{L^*} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{13} & \mu_{15} & \cdots \\ \mu_{31} & \mu_{33} & \mu_{35} & \cdots \\ \mu_{51} & \mu_{53} & \mu_{55} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta los resultados y comentarios previos, podemos plantear el problema general de simetrización del modo siguiente: Sea $\tilde{\mathbf{U}}$ un funcional bilineal simétrico y simetrizado, y sea $\{Q_n\}$ la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Resolver el problema de simetrización asociado a $\tilde{\mathbf{U}}$ implica el estudio de las propiedades de ortogonalidad de las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ que verifican (1.23). En este sentido, se buscan expresiones explícitas de los funcionales bilineales respecto de los cuales son ortogonales, es decir, queremos encontrar una representación de dichos funcionales que no esté expresada en términos del funcional $\tilde{\mathbf{U}}$. También interesa determinar relaciones de recurrencia a un número finito de términos que dichas sucesiones satisfagan así como posibles relaciones algebraicas explícitas entre los elementos de ambas sucesiones. En definitiva, lo que se pretende es extender el proceso de simetrización lineal dado en la Sección 1.4 al caso bilineal.

1.7. La transformación de Darboux

Definición 1.7.1 *Dada una matriz tridiagonal semi-infinita*

$$J = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1.26}$$

diremos que la matriz tridiagonal $J^{(d)}$ *es la* transformada de Darboux de J *si*

$$J = UL, \quad J^{(d)} = LU,$$

donde los factores L *y* U *son de la forma*

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 1 & & & \\ 0 & u_2 & 1 & & \\ & 0 & u_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \; y \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ l_1 & 1 & 0 & & \\ & l_2 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \qquad (1.27)$$

Al proceso que nos permite encontrar $J^{(d)}$ *a partir de* J *lo llamaremos* transformación de Darboux.

Es importante observar que la factorización LU que aparece en la definición previa, por ser J una matriz semi-infinita, no es única y depende de un parámetro libre.

También es posible considerar primero la factorización $J = LU$ (en el caso de que ésta exista) y definir $J^{(p)} := UL$.

Definición 1.7.2 *Dada una matriz tridiagonal semi-infinita* J *como en (1.26), diremos que la matriz tridiagonal* $J^{(p)}$ *es la* transformada de Darboux sin parámetro de J *si*

$$J = LU, \quad J^{(p)} = UL,$$

donde los factores L *y* U *son las matrices dadas en (1.27). Al proceso que nos permite encontrar* $J^{(d)}$ *a partir de* J *lo llamaremos* transformación de Darboux sin parámetro.

En este caso, la factorización es única y, por tanto, no existe parámetro libre.

Como veremos en capítulos posteriores, la transformación de Darboux en sus dos versiones está estrechamente relacionada con determinadas perturbaciones de funcionales lineales. En particular, la transformación de Darboux sin parámetro está vinculada al funcional lineal $\mathbf{xL}$ definido en la Sección 1.1 y, por tanto, al problema de simetrización en el caso lineal, como se vio en la Sección 1.4.

También podemos hablar de la versión con shift de los dos tipos de transformación de Darboux.

Definición 1.7.3 *Sea* $\alpha \in \mathbb{C}$, *entonces llamaremos* transformación de Darboux con shift α *al proceso que transforma la matriz mónica de Jacobi,* J *en* $J^{(d,\alpha)}$, *es decir,*

$$J - \alpha I = UL, \quad J^{(d,\alpha)} = LU + \alpha I,$$

donde I *denota la matriz identidad semi-infinita. Análogamente, llamaremos* transformación de Darboux sin parámetro con shift α *al proceso dado por*

$$J - \alpha I = LU, \quad J^{(p,\alpha)} = UL + \alpha I.$$

Finalmente, supongamos que, en vez de considerar una matriz mónica de Jacobi, consideramos una matriz de Jacobi J_s (1.8). Si el funcional lineal asociado a J_s está definido en términos de una medida positiva con soporte en un subconjunto de $(0, \infty)$, entonces la matriz J_s es simétrica y definida positiva y, por tanto, podemos considerar su factorización de Cholesky $J_s = LL^t$.

Definición 1.7.4 *Llamaremos* transformación de Darboux sin parámetro simétrica *al proceso que transforma una matriz de Jacobi definida positiva en la matriz* $\tilde{J}$ *del modo siguiente*

$$J_s = LL^t, \quad \tilde{J}_s = L^t L.$$

donde $J_s = LL^t$ *denota la factorización de Cholesky de* J_s.

Veremos más adelante que esta transformación está estrechamente relacionada con la *transformación de Darboux sin parámetro.*

Históricamente, la transformación de Darboux fue introducida en la monografía clásica de Darboux [25], aunque en esta referencia sólo se trata el caso de un operador de Sturm-Liouville continuo. Las versiones discretas fueron introducidas más tarde y su estudio sistemático fue realizado por V. B. Matveev y M. A. Salle [55], a quienes se debe la denominación "transformación de Darboux."

Capítulo 2

La transformación de Darboux y perturbación de funcionales lineales

2.1. Introducción

En la literatura sobre polinomios ortogonales han sido estudiados varios ejemplos de perturbaciones de funcionales lineales casi-definidos. En particular, se han considerado los siguientes tres casos canónicos, que ya presentamos en la Sección 1.1:

1. El funcional $\mathbf{L}$ se transforma en $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{xL}$.
2. El funcional $\mathbf{L}$ se transforma en $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{2}} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$.
3. El funcional $\mathbf{L}$ se transforma en $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$.

Es natural dar respuesta a las siguientes preguntas: 1) ¿Es casi-definido el funcional lineal perturbado? 2) Si lo es, ¿existe una relación entre la sucesión $\{\tilde{P}_n\}$ de polinomios mónicos ortogonal con respecto al funcional perturbado y la sucesión $\{P_n\}$ ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$?

En [23] y [54] se dan condiciones necesarias y suficientes para que $\tilde{\mathbf{L}}_1$ sea casi-definido. Allí, también se obtiene la representación de $\{\tilde{P}_n\}$ en términos de $\{P_n\}$. En [66] y [71], este tipo de perturbación se denomina *la transformación de Christoffel básica*.

En [24, 51, 54] se dan condiciones necesarias y suficientes para que $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{2}}$ sea casi-definido. Además, se obtiene una representación de $\{\tilde{P}_n\}$ en términos de $\{P_n\}$. Obsérvese que $\mathbf{xL} = \tilde{\mathbf{L}}_1 = \mathbf{x}\tilde{\mathbf{L}}_2$. En [66] y [71], a este tipo de perturbación se le llama *transformación de Uvarov*.

El funcional $\tilde{L}_3$ aparece de manera natural cuando intentamos resolver la ecuación $x\tilde{\mathbf{L}}_3 = \mathbf{L}$. Esto significa que $\tilde{\mathbf{L}}_3(x^k) = \mathbf{L}(x^{k-1}),\ k = 1, 2, ...$ asi como $\tilde{\mathbf{L}}_3(1) = \mathbf{C} \neq 0$. En [53], se dan condiciones necesarias y suficientes para que $\tilde{\mathbf{L}}_3$

sea un funcional lineal casi-definido. Más aún, aparece una representación de $\{\tilde{P}_n\}$ en términos de $\{P_n\}$. En [66] y [71], a este tipo de perturbación se la conoce como *transformación de Geronimus.*

El objetivo de este capítulo es analizar estos tipos de perturbaciones desde un punto de vista diferente. En concreto, damos una lectura matricial de resultados bien conocidos y redescubrimos muchas propiedades haciendo uso de análisis matricial. Nuestra aproximación al tema se basa en la relación entre las matrices mónicas de Jacobi $\tilde{J}_i$, $i = 1, 2, 3$, asociadas a los funcionales lineales $\tilde{\mathbf{L}}_i$, $i = 1, 2, 3$, y la matriz J asociada al funcional $\mathbf{L}$.

El proceso para calcular la matriz mónica de Jacobi asociada a $\tilde{\mathbf{L}}_1$ en términos de la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{L}$ está basado en la transformación de Darboux sin parámetro, que es una versión infinita de un paso del algoritmo LR. Hay varias contribuciones en esta dirección; por ejemplo, los trabajos de Galant [32, 33], Golub y Kautsky [37, 47], y Gautschi [34]. Supongamos que un funcional lineal dado $\mathbf{L}$ está definido en términos de una función peso ω del modo siguiente

$$\mathbf{L}(p) = \int_{\mathbb{R}} p(x)\omega(x)dx,$$

donde p denota un polinomio. Los trabajos de Galant, Golub y Kautsky está enfocado al cálculo de los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos que verifica la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a una perturbación lineal de ω, i.e., $\tilde{\omega} = k(x - \alpha)\omega$, $k, \alpha \in \mathbb{R}$, cuando ω es una medida positiva, exigiendo que $\tilde{\omega}$ sea también una función peso, lo que significa que $\tilde{\omega}$ es una función positiva y L^1-integrable en el soporte de ω. Gautschi extendió este resultado para el caso de medidas casi-definidas, i.e, medidas μ tales que el funcional lineal asociado $\mathbf{L}$ definido por $\mathbf{L}(p(x)) = \int_{\mathbb{R}} p(x)d\mu$ es casi-definido. En el contexto matricial, la transformación de Darboux sin parámetro aplicada a la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal $\mathbf{L}$ genera la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{xL}$. La principal aplicación práctica de los resultados anteriores está en la evaluación de nodos de cuadratura gaussiana en la presencia de nodos fijos [37]. Teniendo en cuenta que los autovalores de cualquier submatriz principal de una matriz mónica de Jacobi coinciden con los ceros del polinomio ortogonal de grado igual al orden de la submatriz, los nodos de las cuadraturas pueden ser calculados como los autovalores de ciertas matrices. Es importante resaltar un trabajo reciente de Gautschi [35] en el que la relación del proceso de Darboux con los polinomios ortogonales y las cuadraturas gaussianas es tratada de una forma moderna y amigable. Nuestra principal contribución a los resultados anteriores es la siguiente: Sea $\mathbf{U}$ un funcional lineal simétrico casi-definido. Entonces, por la Observación 1.4.1, la correspondiente matriz mónica de Jacobi no tiene factorización LU. En tal caso, el funcional $\mathbf{xL}$ no es casi-definido y, por tanto, no existe la correspondiente matriz mónica de Jacobi. Sin embargo, probamos que es posible encontrar la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{x^2L}$ (otro funcional simétrico) mediante la aplicación de dos transformaciones de Darboux sin parámetro y con shift, como un caso límite.

Grünbaum y Haine consideraron la matriz mónica de Jacobi asociada a $\tilde{\mathbf{L}}_2 = \mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$ [40, 41] en el contexto del análisis espectral de ecuaciones diferenciales lineales de cuarto orden con coeficientes polinómicos. Dichos autores estaban interesados en las soluciones polinómicas de tales ecuaciones diferenciales, los llamados polinomios ortogonales de Krall (ver también [3]). Ellos obtuvieron estos polinomios a partir de algunos casos particulares de polinomios ortogonales clásicos mediante la combinación de una *transformación de Darboux* y una *transformación de Darboux sin parámetro*. Uno de nuestros objetivos es extender este resultado para los polinomios de Krall al caso general en que $\mathbf{L}$ es cualquier funcional lineal casi-definido, es decir, probar que la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$ puede obtenerse a partir de la matriz asociada a $\mathbf{L}$ haciendo uso de la transformación de Darboux en sus dos versiones finitas.

Finalmente, la perturbación $\tilde{\mathbf{L}}_3$ está relacionada con una extensión de la fórmula clásica de Christoffel. En el caso de medidas positivas, hay varias contribuciones (ver [32, 33, 34, 70]) cuando se consideran perturbaciones racionales $\tilde{\omega}(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\omega(x)$ de una función peso. Grünbaum y Haine introdujeron una modificación de tales algoritmos que permite encontrar la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\tilde{\mathbf{L}}_3$ de una forma alternativa a la usada por Maroni [53]. Ellos usan tal algoritmo para algunos casos particulares de funcionales lineales (Laguerre y Jacobi). En este capítulo, consideramos el problema general e introducimos de una forma natural la llamada *transformación de Darboux* a fin de encontrar $\tilde{J}_3$ a partir de J. La transformación de Darboux está relacionada con problemas biespectrales [39, 40, 42] así como con ecuaciones diferenciales de evolución [55]. Más recientemente se ha considerado en el análisis de transformaciones racionales espectrales, auto-semejanzas, y sus conexiones con polinomios ortogonales [66, 71].

2.2. Resultados auxiliares

En esta sección damos algunos lemas auxiliares que serán usados con frecuencia en las secciones siguientes.

Consideremos un funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$ así como la sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}$ ortogonal con respecto a dicho funcional. Esta sucesión de polinomios verifica la relación de recurrencia a tres términos dada en (1.5). Sea J la correspondiente matriz mónica de Jacobi como en (1.7). Supongamos que $J = LU$ denota la factorización LU de J, donde los factores L y U son como en (1.27). En el siguiente lema expresamos los elementos u_k de la diagonal principal de la matriz triangular superior U en términos de los elementos l_k que están en la subdiagonal de L y las entradas β_k de la diagonal principal de J. Más aún, damos una expresión alternativa para los elementos u_k en términos de los valores $P_n(0)$, y obtenemos una fórmula recursiva para el cálculo de los elementos l_k.

Lema 2.2.1 *Sea J la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal casi-definido. Supongamos que $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos aso-*

ciada a J y que $P_n(0) \neq 0$, $n \geq 1$. En tal caso, existen matrices L, U como en (1.27) tales que $J = LU$ es la factorización LU de J y se verifican las siguientes relaciones:

$$u_n = -\frac{P_n(0)}{P_{n-1}(0)}, \quad n \geq 1. \tag{2.1}$$

Además,

$$\begin{cases} u_1 = \beta_0, \\ u_n = \beta_{n-1} - l_{n-1}, \quad n \geq 2, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde l_n puede ser calculado de forma recursiva mediante

$$l_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_0}, \quad l_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - l_{n-1}}, \quad n \geq 2. \tag{2.3}$$

Demostración.
El producto de L por U es

$$LU = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \cdots \\ u_1 l_1 & u_2 + l_1 & 1 & \cdots \\ 0 & u_2 l_2 & u_3 + l_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Comparando los elementos de las matrices J y LU que están en las mismas posiciones, se obtiene el resultado (2.2) de forma inmediata. También se deduce que

$$\gamma_k = l_k u_k, \quad \text{para todo } k \geq 1. \tag{2.5}$$

El resultado (2.1) se obtiene aplicando inducción sobre k y teniendo en cuenta la relación de recurrencia a tres términos (1.5) que verifica $\{P_m\}$. Como $P_1(0) = -\beta_0$ y $P_0(0) = 1$,

$$u_1 = \beta_0 = -\frac{P_1(0)}{P_0(0)}.$$

Supongamos que $u_k = -\frac{P_k(0)}{P_{k-1}(0)}$ para $1 \leq k \leq n$. Entonces, considerando (1.5)

$$P_{n+1}(0) = -\beta_n P_n(0) - \gamma_n P_{n-1}(0).$$

Dividiendo la expresión previa por $P_n(0)$ y aplicando la hipótesis de inducción así como (2.2) y (2.5), se obtiene

$$-\frac{P_{n+1}(0)}{P_n(0)} = \beta_n - \frac{\gamma_n}{u_n} = \beta_n - l_n = u_{n+1}. \tag{2.6}$$

Finalmente, considerando de nuevo (2.2) y teniendo en cuenta (2.5), se deduce el resultado (2.3). □

Observación 2.2.1 *A partir del Lema 2.2.1, se sigue que existe la factorización LU sin pivote de una matriz mónica de Jacobi J si y sólo si $P_n(0) \neq 0$, $n \geq 1$. Además,*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ l_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & l_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \beta_1 - l_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \beta_2 - l_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

donde

$$l_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_0}, \quad l_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - l_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

También debe señalarse que, dado que los elementos en la diagonal principal de L son iguales a 1, la factorización LU de la matriz J es única.

Ahora expresamos la matriz mónica de Jacobi (1.7) como un producto de una matriz triangular superior por una matriz triangular inferior, i.e., $J = UL$ donde los factores L y U son como las matrices bidiagonales dadas en (1.27). En este caso, la factorización no es única y depende de un parámetro libre S_0. Es interesante observar que la factorización UL de la que estamos hablando no es una extensión al caso infinito de la factorización UL estándar en el caso finito. Sin embargo, en lo que sigue, a este tipo de factorización la llamaremos *factorización UL*. También es importante señalar que el causante de que la factorización UL infinita no sea única es precisamente el carácter semi-infinito de la matriz J.

Definición 2.2.1 *Sea $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios ortogonal con respecto a un funcional lineal* $\mathbf{L}$ *casi-definido y que satisface la relación de recurrencia dada en (1.5). Sea $s \in \mathbb{C}$. Entonces, diremos que $\{\hat{P}_n\}$ es la sucesión de* polinomios co-recursivos con parámetro s asociada al funcional lineal $\mathbf{L}$ *si dicha sucesión satisface la relación de recurrencia*

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x - \hat{\beta}_n)\hat{P}_n(x) - \hat{\gamma}_n \hat{P}_{n-1}(x), \tag{2.8}$$
$$\hat{P}_{-1}(x) = 0, \quad \hat{P}_0(x) = 1.$$

donde

$$\hat{\beta}_0 = \beta_0 - s, \quad \hat{\beta}_n = \beta_n, \quad n \geq 1,$$

$$\hat{\gamma}_n = \gamma_n, \quad \textit{para todo } n \geq 1.$$

Lema 2.2.2 *Sea J la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal casi-definido* $\mathbf{L}$ *y sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a* $\mathbf{L}$. *Supongamos que $J = UL$ denota la factorización UL de J y S_i denota la entrada en la posición $(i+1, i+1)$ de U, i.e., $S_i := u_{i+1}$ para $i \geq 0$, donde el elemento S_0 es un parámetro libre generado en la factorización (dado que ésta no* *es única). Si $\{\hat{P}_n\}$ denota la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro S_0 asociada a* $\mathbf{L}$ *y $\hat{P}_n(0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, entonces*

$$l_n = -\frac{\hat{P}_n(0)}{\hat{P}_{n-1}(0)}, \quad n \geq 1. \tag{2.9}$$

Además,

$$l_n = \beta_{n-1} - S_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{2.10}$$

y S_n puede calcularse de forma recurrente mediante

$$S_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - S_{n-1}}, \quad n \geq 1. \tag{2.11}$$

Demostración.
Si U y L son matrices como las que aparecen en (1.27), entonces

$$UL = \begin{bmatrix} u_1 + l_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ u_2 l_1 & u_2 + l_2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & u_3 l_2 & u_3 + l_3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Comparando los elementos de las matrices UL y J, se obtiene

$$l_1 = \beta_0 - u_1.$$

Esta ecuación no fija los valores de l_1 y u_1, por lo que la factorización no es única. Tomamos u_1 como un parámetro libre que denotamos por S_0. Téngase en cuenta que S_0 puede tomar cualquier valor siempre que la correspondiente sucesión de polinomios co-recursivos verifique $\hat{P}_n(0) \neq 0$ para todo n. Entonces, l_1 puede ser expresado en términos de S_0 de forma obvia. Supongamos que, para algún k, $l_k = \beta_{k-1} - S_{k-1} \neq 0$ y $S_{k-1} := u_k$. Entonces, como $u_{k+1} l_k = \gamma_k$,

$$S_k := u_{k+1} = \frac{\gamma_k}{\beta_{k-1} - S_{k-1}}.$$

Por otro lado, $u_{k+1} + l_{k+1} = \beta_k$ y se obtiene

$$l_{k+1} = \beta_k - S_k.$$

El resultado (2.9) se obtiene por inducción teniendo en cuenta la relación de recurrencia que verifican los polinomios co-recursivos dada en (2.8). □

La siguiente proposición da una condición necesaria y suficiente para que la factorización UL de parámetro s de una matriz mónica de Jacobi exista.

Proposición 2.2.1 *Sea J una matriz mónica de Jacobi como en (1.7). Entonces, la factorización UL de parámetro s de J existe si y sólo si, para todo $i \in \mathbb{N}$,*

$$s \neq -\frac{P_i(0)}{\tilde{P}_{i-1}(0)}, \quad i \geq 1, \tag{2.13}$$

donde $\{\tilde{P}_n\}$ *es la sucesión de polinomios mónicos de primera especie asociada a* $\{P_n\}$*, es decir, la sucesión de polinomios que verifica la relación de recurrencia*

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})\tilde{P}_n(x) - \gamma_{n+1}\tilde{P}_{n-1}(x),$$

$$\tilde{P}_0(x) = 1, \quad \tilde{P}_{-1}(x) = 0.$$

Demostración. Es fácil probar por inducción sobre i que

$$l_1 = -P_1(0) - s, \quad l_i = (-1)^i \frac{P_i(0) + \tilde{P}_{i-1}(0)s}{\prod_{k=1}^{i-1} l_k}, \quad n \geq 2.$$

Por tanto, $l_i \neq 0$ si y sólo si se verifica (2.13). Pero, dado que $u_i = \gamma_i / l_i$ y $\gamma_i \neq 0$ para todo $i \geq 1$, se obtiene trivialmente el resultado. □

El siguiente corolario da una condición necesaria y suficiente para que la factorización UL de parámetro s de una matriz mónica de Jacobi exista en términos del valor en cero de los polinomios co-recursivos de parámetro s asociados a $\{P_n\}$. Dicho resultado se obtiene como corolario de la proposición anterior aunque también se deduce de forma evidente a partir de (2.9).

Corolario 2.2.1 *Bajo las hipótesis de la proposición anterior, si* $\{\hat{P}_n\}$ *denota la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro* s *asociada a* $\{P_n\}$*, entonces,*

$$\hat{P}_i(0) = P_i(0) + \tilde{P}_i(0)s,$$

y, por tanto, la factorización UL de parámetro s *de una matriz mónica de Jacobi existe si y sólo si la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro* s *asociada a* $\{P_n\}$ *verifica*

$$\hat{P}_i(0) \neq 0, \quad i \geq 1.$$

Observación 2.2.2 *En resumen, la factorización UL de parámetro* s *de una matriz mónica de Jacobi* J *existe si y sólo si la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro* s *asociada a* $\{P_n\}$ *verifica* $\hat{P}_n(0) \neq 0$ *para todo* $n \geq 1$*. Además, si* $J = UL$ *denota la correspondiente factorización*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta_0 - s & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \beta_1 - S_1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & S_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & S_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

donde

$$S_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - S_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad S_0 = s.$$

Consideremos ahora un funcional lineal definido positivo $\mathbf{L}$ dado en términos de una medida de Borel positiva μ con soporte en $(0, \infty)$. Entonces podemos hablar de la matriz mónica de Jacobi J asociada a $\mathbf{L}$ y también de la matriz de Jacobi J_s, que es simétrica y definida positiva (ver (1.8) y Corolario 1.2.1). Por tanto, es posible calcular la factorización de Cholesky de J_s. Supongamos que $J = LU$ y $J_s = \tilde{L}\tilde{L}^t$ denotan, respectivamente, la factorización LU de J y la factorización de Cholesky de J_s. Obsérvese que el factor $\tilde{L}$ es triangular inferior y bidiagonal. El siguiente lema establece la relación entre las matrices J y J_s, así como una relación algebraica entre los elementos no nulos de L, U y $\tilde{L}$.

Lema 2.2.3 *Sea J_s la matriz de Jacobi asociada a un funcional lineal definido positivo dado por*

$$\mathbf{L}(p) = \int_0^\infty p d\mu,$$

donde μ es una medida de Borel positiva soportada en $[0, \infty]$. Sea J la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{L}$. Entonces, si $J = LU$ y $J_s = \tilde{L}\tilde{L}^t$ denotan la factorización LU de J y la factorización de Cholesky de J_s, respectivamente, entonces

1. *$J = D\ J_s\ D^{-1}$, donde D es una matriz diagonal definida por*

$$D(i,i) = \begin{cases} 1 & i = 1, \\ \sqrt{\prod_{j=1}^{i-1} \gamma_j}, & i \geq 2. \end{cases}$$

2. *Si u_i denota el elemento en la posición (i,i) de U, l_i denota el elemento en la posición $(i+1, i)$ de L y $\tilde{l}_{ii}$, $\tilde{l}_{i+1,i}$ denotan los elementos en las posiciones (i,i), $(i+1,i)$ de $\tilde{L}$, respectivamente, entonces se verifica la siguiente relación:*

$$\tilde{l}_{ii} = \sqrt{u_i}, \quad \tilde{l}_{i+1,i} = \sqrt{l_i}, \quad i \geq 1.$$

2.3. Transformación del funcional L en xL

En lo que sigue, probaremos que la aplicación de una trasformación de Darboux sin parámetro (definida en la Sección 1.7) a la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{L}$, transforma esta matriz en la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{xL}$. Este resultado se puede extender de forma inmediata para obtener la matriz mónica de Jacobi asociada a $(\mathbf{x} - \alpha)\mathbf{L}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

El siguiente lema da una versión finita de la transformación de Darboux sin parámetro. Usamos la siguiente notación: Para toda matriz cuadrada A, $(A)_n$ denota la submatriz principal superior izquierda de orden n de A.

Lema 2.3.1 *Supongamos que $\tilde{L}\tilde{U}$ y LU son las factorizaciones LU sin pivote de $(J)_n$ y J, respectivamente. Entonces,*

$$(L)_n = \tilde{L}, \quad (U)_n = \tilde{U}.$$

Más aún, si $J^{(p)}$ es la transformada de Darboux sin parámetro de J, entonces

$$(J^{(p)})_n = (U)_n(L)_n + l_n e_n e_n^t,$$

donde $e_n = [0, ..., \overset{(n)}{1}]^t$.

Mientras que la Definición 1.7.2 se refiere a la transformación de Darboux sin parámetro asociada a matrices semi-infinitas, el lema anterior proporciona una definición de la transformación de Darboux sin parámetro en el caso finito. Así, decimos que $(J^{(p)})_n$ es la transformada de Darboux sin parámetro de $(J)_n$.

Demostración. Basta tener en cuenta (1.27) y las submatrices principales superiores izquierdas de orden n de L y U para obtener el resultado de forma inmediata. □

Proposición 2.3.1 *Sea $(J)_n$ la submatriz principal superior izquierda de orden n de la matriz mónica de Jacobi J asociada a un funcional lineal casi-definido* **L**. *Supongamos que la sucesión $\{P_n\}$ de polinomios mónicos asociada a J verifica $P_n(0) \neq 0$. Si aplicamos una transformación de Darboux sin parámetro a $(J)_n$, i.e.,*

$$(J)_n = (L)_n(U)_n, \quad (J^{(p)})_n = (U)_n(L)_n + l_n e_n e_n^t,$$

entonces, la matriz $(J^{(p)})_n$ es la submatriz principal superior izquierda de orden n de la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional **xL**.

Demostración.

Teniendo en cuenta (2.7), obtenemos

$$(J^{(p)})_n = \begin{bmatrix} \beta_0 + l_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ l_1(\beta_1 - l_1) & \beta_1 + l_2 - l_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n-1}(\beta_{n-1} - l_{n-1}) & \beta_{n-1} + l_n - l_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Dado que $P_n(0) \neq 0$, por la Proposición 1.4.2, el funcional **L** es simetrizable y, por tanto, existe la sucesión $\{P_n^*\}$ de polinomios núcleo con parámetro cero asociada a $\{P_n\}$. Además, en la Sección 1.4 vimos que dicha sucesión es ortogonal con respecto al funcional **xL**. Supongamos que $\{P_n^*\}$ satisface la relación de recurrencia a tres términos dada por

$$P_{n+1}^*(x) = (x - \delta_n)P_n^*(x) - k_n P_{n-1}^*(x), \quad n \geq 0. \tag{2.15}$$

Además, se verifica la relación algebraica explícita dada en (1.21). Asumiendo que $l_0 = 0$, probaremos que

$$\begin{cases} \delta_n = \beta_n + l_{n+1} - l_n, & n \geq 0, \\ k_n = l_n(\beta_n - l_n), & n \geq 1. \end{cases} \tag{2.16}$$

Sustituyendo (1.21) en (2.15) y teniendo en cuenta (2.1)

$$P_{n+2}(x) = [x - \delta_n - u_{n+2}]P_{n+1}(x) + [u_{n+1}(x - \delta_n) - k_n]P_n(x) - k_n u_n P_{n-1}(x).$$

Como $\{P_n\}$ verifica la relación de recurrencia (1.5), obtenemos

$$[\delta_n + u_{n+2} - \beta_{n+1}]P_{n+1}(x) = [\gamma_{n+1} + u_{n+1}(x - \delta_n) - k_n]P_n(x) - k_n u_n P_{n-1}(x). \tag{2.17}$$

Comparando la expresión previa con (1.5), se obtiene la siguiente relación

$$\delta_n = \beta_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+1},$$

y teniendo en cuenta (2.2), deducimos

$$\delta_n = \beta_n + l_{n+1} - l_n.$$

Por otro lado, a partir de (1.5) y (2.17) se llega también a la siguiente relación

$$k_n = \gamma_n \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Obsérvese que, por (2.3), se tiene que $\gamma_n = l_n(\beta_{n-1} - l_{n-1})$. Entonces, teniendo en cuenta (2.2)

$$k_n = l_n(\beta_n - l_n).$$

$\square$

Observación 2.3.1 *Es interesante recordar, y la proposición anterior lo ratifica, que una condición necesaria y suficiente para que el funcional* $\mathbf{xL}$ *sea casi-definido es que exista la factorización* LU *de* J*, lo que equivale a decir que* $P_n(0) \neq 0$ *para todo* n *ó que* $\mathbf{L}$ *es simetrizable.*

A partir de la proposición anterior se obtiene de forma inmediata el resultado correspondiente para el caso infinito.

Teorema 2.3.1 *Sea* J *la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal casi-definido* $\mathbf{L}$*. Si* $\{P_n\}$ *es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a* $\mathbf{L}$ *y suponemos que* $P_n(0) \neq 0$ *para* $n \geq 1$*, entonces, la transformada de Darboux sin parámetro de* J*,* $J^{(p)}$*, es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional* $\mathbf{xL}$*.*

Demostración.

Como L y U son matrices bidiagonales, en ambos productos LU y UL, los elementos se calculan a partir de sumas finitas. Por tanto, la demostración de la Proposición 2.3.1 sigue siendo válida en el caso infinito sin ningún problema de convergencia. □

El resultado anterior ya era conocido por Galant y Gautschi aunque, en [33], Galant da un resultado más simple que es válido sólo para funcionales lineales dados en términos de una medida positiva. En [34], Gautschi presenta el mismo resultado pero no lo formula en su versión matricial.

Como mencionamos al comienzo de esta sección, el resultado dado en el Teorema 2.3.1 puede extenderse fácilmente al caso más general $(\mathbf{x}-\alpha)\mathbf{L}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. El siguiente lema es la clave para tal extensión.

Lema 2.3.2 *Sea J la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces, la matriz $J-\alpha I$, donde I denota la matriz identidad semi-infinita, es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal casi-definido $\mathbf{L_1}$ dado por*

$$\mathbf{L_1}[p(x)] = \mathbf{L}[p(x-\alpha)], \tag{2.18}$$

donde $p(x)$ denota cualquier polinomio.

Demostración.

Sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$. Esta sucesión verifica una relación de recurrencia a tres términos como la dada en (1.5). Si introducimos el cambio de variable $x \to x+\alpha$, se obtiene

$$P_{n+1}(x+\alpha) = [x-(\beta_n-\alpha)]P_n(x+\alpha) - \gamma_n P_{n-1}(x+\alpha), \quad n \geq 0. \tag{2.19}$$

Si $\tilde{P}_n(x) := P_n(x+\alpha)$, entonces $\{\tilde{P}_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonales asociada a la matriz mónica de Jacobi $J-\alpha I$. Más aún, tal sucesión es ortogonal con respecto al funcional lineal casi-definido $\mathbf{L_1}$ dado en (2.19), i.e.,

$$\mathbf{L_1}[\tilde{P}_n(x)\tilde{P}_m(x)] = \mathbf{L}[\tilde{P}_n(x-\alpha)\tilde{P}_m(x-\alpha)] = \mathbf{L}[P_n(x)P_m(x)] = K_n\delta_{n,m}.$$

□

Proposición 2.3.2 *Sea J la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{L}$ y sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $P_n(\alpha) \neq 0$ para $n \geq 1$. Si aplicamos una transformación de Darboux sin parámetro con shift α a la matriz J, es decir,*

$$J-\alpha I = LU, \quad \tilde{J} := UL + \alpha I,$$

entonces, $\tilde{J}$ es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $(\mathbf{x}-\alpha)\mathbf{L}$.

Demostración.

Por el Lema 2.3.2, $J-\alpha I$ es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{L_1}$ definido por

$$\mathbf{L_1}[p(x)] = \mathbf{L}[p(x-\alpha)]. \tag{2.20}$$

La aplicación de una transformación de Darboux sin parámetro a $J-\alpha I$ genera una nueva matriz mónica de Jacobi T. Por el Teorema 2.3.1 sabemos que T es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{xL_1}$. Entonces, de nuevo por el Lema 2.3.2, $T+\alpha I$ es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{L_2}$ dado por

$$\mathbf{L_2}[p(x)] = (\mathbf{xL_1})[p(x+\alpha)].$$

Por tanto,

$$\mathbf{L_2}[p(x)] = (\mathbf{xL_1})[p(x+\alpha)] = \mathbf{L_1}[xp(x+\alpha)] = \mathbf{L}[(x-\alpha)p(x)] = (\mathbf{x}-\alpha)\mathbf{L}[p(x)].$$

□

Iterando el resultado previo, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.3.1 *Sea J la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal casi-definido* $\mathbf{L}$ *y sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a* $\mathbf{L}$. *Consideremos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{C}$. Aplicamos las siguientes transformaciones a J,*

$$\begin{aligned}
T_1 &:= J - \alpha_1 I = L_1U_1, \quad \tilde{T}_1 := U_1L_1 + \alpha_1 I,\\
T_2 &:= \tilde{T}_1 - \alpha_2 I = L_2U_2, \quad \tilde{T}_2 := U_2L_2 + \alpha_2 I,\\
&\vdots\\
T_r &:= \tilde{T}_{r-1} - \alpha_r I = L_rU_r, \quad \tilde{T}_r := U_rL_r + \alpha_r I.
\end{aligned}$$

Si $\{P_n(\ ;i)\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonales asociada a la matriz $\tilde{T}_i$, $i \in \{1,2,..,r-1\}$ y, suponiendo que

$$P_n(\alpha_1) \neq 0, \quad P_n(\alpha_{i+1};i) \neq 0, \quad n \geq 1, \quad i \in \{1,2,...,r-1\},$$

entonces $\tilde{T}_r$ es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional

$$(\mathbf{x}-\alpha_\mathbf{r})...(\mathbf{x}-\alpha_\mathbf{2})(\mathbf{x}-\alpha_\mathbf{1})\mathbf{L}.$$

Este es el llamado funcional transformado de Christoffel de $\mathbf{L}$ *de parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.*

Consideremos ahora un funcional lineal definido positivo $\mathbf{L}$, dado en términos de una medida de Borel positiva con soporte en $(0,\infty)$. Sea J_s la matriz de Jacobi asociada a $\mathbf{L}$. La proposición 2.3.3 que presentamos abajo garantiza que la aplicación de una transformación de Darboux sin parámetro simétrica a J_s genera la matriz de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{xL}$. A continuación, presentamos un lema previo que muestra que la transformada de Darboux sin parámetro simétrica (ver Definición 1.7.4) de una matriz de Jacobi es otra matriz de Jacobi.

Lema 2.3.3 *Sea J_s una matriz de Jacobi definida positiva. Entonces, la matriz $\tilde{J}_s$ que se obtiene al aplicar una transformación de Darboux sin parámetro simétrica a J_s es otra matriz de Jacobi, es decir, una matriz tridiagonal simétrica y definida positiva.*

Demostración. Dado que $\tilde{L}^t$ es una matriz triangular superior y bidiagonal, y que $\tilde{L}$ es una matriz triangular inferior y bidiagonal, resulta evidente que $\tilde{L}^t\tilde{L}$ es una matriz tridiagonal.

Por otro lado, $(\tilde{L}^t\tilde{L})^t = \tilde{L}^t\tilde{L}$ y, por tanto, $\tilde{J}_s$ es una matriz simétrica.

Finalmente, es definida positiva porque la matriz $\tilde{L}$ es no singular. □

Proposición 2.3.3 *Sea J_s la matriz de Jacobi asociada a un funcional lineal definido positivo* **L**, *dado en términos de una medida de Borel positiva μ con soporte en $(0,\infty)$. Entonces la transformada de Darboux sin parámetro simétrica de J_s, es decir, la matriz $\tilde{J}_s$ dada por*

$$J_s = \tilde{L}\tilde{L}^t, \quad \tilde{J}_s = \tilde{L}^t\tilde{L},$$

es la matriz de Jacobi asociada al funcional definido positivo **xL**.

Demostración. Si $J = LU$ denota la factorización LU de la matriz mónica de Jacobi asociada a **L**, y $J^{(p)}$ es la transformada de Darboux sin parámetro de J, entonces los elementos en la posiciones (i,i) y $(i+1,i)$ de $J^{(p)}$ pueden expresarse en términos de los elementos de L y U del modo siguiente:

$$J^{(p)}(i,i) = u_i + l_i, \quad J^{(p)}(i+1,i) = u_{i+1}l_i.$$

Por otro lado, el elemento en la posición $(i+1,i)$ de $\tilde{J}_s$ viene dado por

$$\tilde{J}_s(i+1,i) = (\tilde{l}_{i+1,i})(\tilde{l}_{i+1,i+1}) = \sqrt{l_i u_{i+1}},$$

y el elemento en la posición (i,i) de $\tilde{J}_s$ viene dado por

$$\tilde{J}_s(i,i) = \tilde{l}_{ii}^2 + \tilde{l}_{i+1,i}^2 = u_i + l_i,$$

lo cual prueba el resultado, teniendo en cuenta el Lema 2.3.3. □

2.4. Transformación del funcional L en $\mathbf{x^2L}$ en el caso simétrico

Consideremos un funcional *lineal definido positivo y simétrico* **U** (ver Definición 1.4.1) y sea

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \xi_1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & \xi_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{U}$. Observemos que, dado que J_0 tiene todas las entradas en la diagonal principal nulas (Observación 1.4.1), la factorización LU sin pivote de J_0 no existe. Por tanto, no es posible calcular la transformada de Darboux sin parámetro de J_0 y el funcional $\mathbf{xU}$ no es casi-definido.

En esta subsección vamos a estudiar las perturbaciones de un funcional lineal definido positivo y simétrico que generan nuevos funcionales lineales definidos positivos y simétricos. Obsérvese que si $\mathbf{U}$ es simétrico, entonces $\mathbf{xU}$ no es un funcional simétrico. Sin embargo, $\mathbf{x^2U}$ sí lo es. Basados en los resultados previos, la forma más obvia de obtener la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{x^2U}$ sería la aplicación de dos transformaciones de Darboux sin parámetro consecutivas a J_0 pero ya hemos comentado que esto no es posible. En el resto de esta subsección, probaremos que la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{x^2U}$ puede obtenerse a partir de la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{U}$ aplicando de forma consecutiva dos transformaciones de Darboux sin parámetro con shifts $-\epsilon\, i$ y $\epsilon\, i$ (donde i denota la unidad imaginaria), respectivamente, y tomando límites cuando ϵ tiende a cero. Este problema fue considerado por Buhmann e Iserles [19] en un contexto más general. Ellos consideraron un funcional lineal definido positivo $\mathbf{L}$, y probaron que un paso del método QR aplicado a la matriz de Jacobi asociada a $\mathbf{L}$ permite encontrar la matriz de Jacobi asociada a $\mathbf{x^2L}$.

Apliquemos una transformación de Darboux sin parámetro con shift $-\epsilon\, i$ a la matriz mónica de Jacobi J_0 dada en (2.21), donde ϵ es cualquier número positivo. Si $J_0 + (\epsilon\, i)I = L_1U_1$ denota la factorización LU de $J_0 + (\epsilon\, i)I$ entonces, por (2.7),

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ l_1(\epsilon) & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & l_2(\epsilon) & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \; U_1 = \begin{bmatrix} \epsilon\, i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \epsilon\, i - l_1(\epsilon) & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \epsilon\, i - l_2(\epsilon) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

con

$$l_1(\epsilon) = \frac{\xi_1}{\epsilon\, i}, \quad l_n(\epsilon) = \frac{\xi_n}{\epsilon\, i - l_{n-1}(\epsilon)}, \quad n \geq 2.$$

Calculamos $J_1 := U_1L_1 - (\epsilon\, i)I$ y se obtiene

$$J_1 = \begin{bmatrix} l_1(\epsilon) & 1 & 0 & \cdots \\ l_1(\epsilon)(\epsilon\, i - l_1(\epsilon)) & l_2(\epsilon) - l_1(\epsilon) & 1 & \cdots \\ 0 & l_2(\epsilon)(\epsilon\, i - l_2(\epsilon)) & l_3(\epsilon) - l_2(\epsilon) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Por la Proposición 2.3.2, se deduce que J_1 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $(\mathbf{x} + \epsilon\, \mathbf{i})\mathbf{U}$. Observemos que no existe $\lim_{\epsilon \to 0} J_1$.

Apliquemos ahora una transformación de Darboux sin parámetro con shift $\epsilon\, i$ a J_1, es decir,

$$J_1 - (\epsilon\, i)I = L_2U_2, \quad J_2 := U_2L_2 + (\epsilon\, i)I.$$

Si se satisfacen las hipótesis del Corolario 2.3.1, entonces J_2 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $(\mathbf{x^2} + \epsilon^2)\mathbf{U}$. Observemos que este nuevo funcional es simétrico y definido positivo así como lo es $\mathbf{U}$. Más aún,

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ l_1(\epsilon)(\epsilon\, i - l_2(\epsilon)) & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & l_2(\epsilon)(\epsilon\, i - l_3(\epsilon)) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

J_2 es la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal simétrico dado que las entradas de la diagonal principal son nulas. Si ϵ tiende a cero, se obtiene

Proposición 2.4.1

$$\left| \lim_{\epsilon \to 0} l_n(\epsilon)[\epsilon\, i - l_{n+1}(\epsilon)] \right| < \infty.$$

Observación 2.4.1 *Si $T := \lim_{\epsilon\to 0} J_2$ y se verifica la Proposición 2.4.1, entonces T es la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal simétrico. Obsérvese que si la representación integral de $\mathbf{U}$ es*

$$\mathbf{U}(p) = \int_{\mathbb{R}} p d\mu,$$

entonces, dado que

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 + \epsilon^2) p(x) d\mu - \int_{\mathbb{R}} x^2 p(x) d\mu = \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} p(x) d\mu,$$

aplicando límite cuando ϵ tiende a cero en la expresión anterior se deduce que

$$\lim_{\epsilon\to 0} (\mathbf{x^2} + \epsilon^2)\mathbf{U} = \mathbf{x^2 U}.$$

Por tanto, T es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal simétrico $\mathbf{x^2U}$.

A fin de probar la Proposición 2.4.1, introducimos los siguientes lemas:

Lema 2.4.1 *Si $\{R_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos asociada a $J_0 + (\epsilon\, i)I$, entonces*

$$l_n(\epsilon) = -\xi_n \frac{R_{n-1}(0)}{R_n(0)}, \quad n \geq 1.$$

Demostración. Sea $J_0 + (\epsilon\, i)I = LU$ la factorización LU sin pivote de $J_0 + (\epsilon\, i)I$. Teniendo en cuenta (2.5), para $n \geq 1$, $\xi_n = l_n(\epsilon)u_n(\epsilon)$, donde $u_n(\epsilon) = \epsilon\, i - l_{n-1}(\epsilon)$ en nuestro caso, y $l_0(\epsilon) = 0$. Considerando (2.1), el resultado buscado se obtiene de forma inmediata. □

Lema 2.4.2 *Teniendo en cuenta que los polinomios $\{R_n\}$ son funciones de ϵ, se verifican las siguientes afirmaciones:*

- *Los polinomios de grado par satisfacen*

$$\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n}(0) \neq 0 \quad \textit{para } n \geq 1.$$

- *Los polinomios de grado impar verifican*

$$R_{2n+1}(0) = (\epsilon\, i) K_{2n+1}(\epsilon),$$

donde $K_{2n+1}(\epsilon)$ *es un polinomio en la variable* ϵ *tal que* $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$ *para* $n \geq 0$.

Demostración. La matriz $J_0 + (\epsilon\, i)I$ contiene los parámetros de la relación de recurrencia que verifican los polinomios R_n. Entonces

$$R_{n+1}(x) = (x - \epsilon\, i)R_n(x) - \xi_n R_{n-1}(x). \tag{2.23}$$

$$R_0(x) = 1, \quad R_{-1}(x) = 0.$$

Dado que el funcional lineal $\mathbf{U}$ es definido positivo, $\xi_n > 0$ para $n \geq 1$. Más aún, $R_1(0) = -\epsilon\, i$ y $R_2(0) = -\epsilon^2 - \xi_1$. Obsérvese que, $\lim_{\epsilon\to 0} R_2(0) \neq 0$ ya que $\xi_1 \neq 0$. El resto de la demostración es por inducción. Supongamos que $\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n-2}(0) \neq 0$. Entonces, por (2.23)

$$\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n}(0) = \lim_{\epsilon\to 0}[-\epsilon\, i R_{2n-1}(0) - \xi_{2n-1} R_{2n-2}(0)] \neq 0.$$

Por otro lado,

$$R_1(0) = -\epsilon\, i = \epsilon\, i K_1(\epsilon), \text{ donde } K_1(\epsilon) := -1.$$

Supongamos que $R_{2n-1}(0) = \epsilon\, i K_{2n-1}(\epsilon)$. Entonces, por (2.23)

$$R_{2n+1}(0) = -\epsilon\, i R_{2n}(0) - \xi_{2n} R_{2n-1}(0) = -\epsilon\, i R_{2n}(0) - \epsilon\, i \xi_{2n} K_{2n-1}(\epsilon).$$

Por tanto,

$$R_{2n+1}(0) = \epsilon\, i K_{2n+1}(\epsilon), \quad \text{para } n \geq 1, \tag{2.24}$$

donde

$$K_{2n+1}(\epsilon) = -R_{2n}(0) - \xi_{2n} K_{2n-1}(\epsilon). \tag{2.25}$$

Tenemos que probar que $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$. Para comenzar, observemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} R_2(0) < 0, \quad \lim_{\epsilon\to 0} R_4(0) = \lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon^2 K_3(\epsilon) - \xi_3 R_2(0)) > 0. \tag{2.26}$$

Probaremos por inducción que los límites, cuando ϵ tiende a cero, de dos polinomios consecutivos de grado par evaluados en cero, tienen signos opuestos. De hecho,

$$\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n}(0) = -\xi_{2n-1} \lim_{\epsilon\to 0} R_{2n-2}(0), \tag{2.27}$$

y la afirmación anterior se obtiene de forma inmediata. Por otro lado, teniendo en cuenta que $K_1(\epsilon) = -1 < 0$, a partir de (2.25) se obtiene

$$\lim_{\epsilon\to 0} K_3(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}[-R_2(0) - \xi_2 K_1(\epsilon)] > 0,$$

dado que $\lim_{\epsilon\to 0} R_2(0)$ y $\lim_{\epsilon\to 0} K_1(\epsilon)$ tienen el mismo signo y $\xi_2 > 0$. Supongamos que $\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n-2}(0)$ y $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n-3}(\epsilon)$ tienen el mismo signo. Entonces, $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n-1}(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}[-R_{2n-2}(0) - \xi_{2n-2}K_{2n-3}(\epsilon)]$ tiene signo opuesto que $\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n-2}(0)$ lo que, por (2.27), implica que $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n-1}$ y $\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n}(0)$ tienen el mismo signo y finalmente, por (2.25) concluímos que $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$. □

Teniendo en cuenta los Lemas 2.4.1 y 2.4.2, a continuación probamos la Proposición 2.4.1.

Demostración. Por el Lema 2.4.1 se obtiene

$$l_{2n}(\epsilon)[\epsilon\, i - l_{2n+1}(\epsilon)] = -\frac{\xi_{2n}R_{2n-1}(0)}{R_{2n}(0)}\left[\epsilon\, i + \frac{\xi_{2n+1}R_{2n}(0)}{R_{2n+1}(0)}\right],$$

y, por el Lema 2.4.2,

$$= -\frac{\xi_{2n}\epsilon\, iK_{2n-1}(\epsilon)}{R_{2n}(0)}\left[\epsilon\, i + \frac{\xi_{2n+1}R_{2n}(0)}{\epsilon\, iK_{2n+1}(\epsilon)}\right] = \frac{\xi_{2n}K_{2n-1}(\epsilon)}{R_{2n}(0)}\left[\epsilon^2 - \frac{\xi_{2n+1}R_{2n}(0)}{K_{2n+1}(\epsilon)}\right].$$

Por el Lema 2.4.2 de nuevo, dado que $\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n}(0) \neq 0$ y $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} |l_{2n}(\epsilon)(\epsilon\, i - l_{2n+1}(\epsilon))| < \infty.$$

Equivalentemente,

$$l_{2n+1}(\epsilon)(\epsilon\, i - l_{2n+2}(\epsilon)) =$$
$$= -\frac{\xi_{2n+1}R_{2n}(0)}{\epsilon\, iK_{2n+1}(\epsilon)}\left[\epsilon\, i + \frac{\xi_{2n+2}\epsilon\, iK_{2n+1}(\epsilon)}{R_{2n+2}(0)}\right] = -\frac{\xi_{2n+1}R_{2n}(0)}{K_{2n+1}(\epsilon)}\left[1 + \frac{\xi_{2n+2}K_{2n+1}(\epsilon)}{R_{2n+2}(0)}\right].$$

Por tanto, como $\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n+2}(0) \neq 0$ y $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$, se deduce que

$$\lim_{\epsilon\to 0} |l_{2n+1}(\epsilon)(\epsilon\, i - l_{2n+2}(\epsilon))| < \infty.$$

□

A partir de la demostración de la Proposición 2.4.1 y del Lema 2.4.2, deducimos a continuación el algoritmo que nos permite calcular la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{x^2U}$ a partir de la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{U}$. Para simplificar la notación, denotamos

$$R^l_{2n}(0) := \lim_{\epsilon\to 0} R_{2n}(0), \quad K^l_{2n+1} := \lim_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon).$$

Lema 2.4.3 *Las cantidades $R^l_{2n}(0)$ para $n \geq 0$ y K^l_{2n+1} para $n \geq 0$, pueden calcularse de forma recursiva en la forma siguiente:*

$$R^l_{2n}(0) = -\xi_{2n-1} R^l_{2n-2}(0), \quad R^l_0 = 1,$$

$$K^l_{2n+1} = -R^l_{2n}(0) - \xi_{2n} K^l_{2n-1}, \quad K^l_1 = -1.$$

Demostración. Basta considerar (2.25) y (2.27). □

Proposición 2.4.2 *Sea J la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal simétrico definido positivo, $\mathbf{U}$. Sea $\tilde{J}$ la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{x^2 U}$. Si $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ y $\{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_n, \ldots\}$ denotan, respectivamente, los elementos en la subdiagonal de J y de $\tilde{J}$, entonces*

$$\tilde{\xi}_{2n} = -\xi_{2n}\xi_{2n+1}\frac{K^l_{2n-1}}{K^l_{2n+1}}, \quad n \geq 1,$$

$$\tilde{\xi}_{2n+1} = \xi_{2n+1}\frac{R^l_{2n}(0)}{K^l_{2n+1}}\left[1 + \frac{\xi_{2n+2}K^l_{2n+1}}{R^l_{2n+2}(0)}\right], \quad n \geq 0.$$

Demostración. Basta considerar la demostración de la Proposición 2.4.1. □

2.5. Transformación del funcional $\mathbf{L}$ en $\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$

En esta sección, probaremos que la aplicación de una transformación de Darboux sin parámetro seguida de una tranformación de Darboux a la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{L}$, produce la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$. Este resultado puede extenderse de una forma muy sencilla para obtener la matriz mónica de Jacobi asociada a

$$\mathbf{L} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{k}} \mathbf{C_i}\delta_{\mathbf{a_i}}, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

En lo que resta de este capítulo, cada vez que se aplique una factorización UL se supone que el parámetro libre s toma valores tales que la correspondiente factorización UL existe. Resulta evidente que ese conjunto de valores no es vacío ya que el número de condiciones que deben cumplirse para que la factorización UL de una matriz mónica de Jacobi exista ($\hat{P}_i(0) \neq 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$) es numerable.

La siguiente proposición es el resultado más importante de esta sección.

Proposición 2.5.1 *Sea J_0 la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$. Supongamos que $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$ y $P_n(0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Si aplicamos las siguientes transformaciones a J_0:*

$$J_0 = L_1 U_1, \quad J_1 := U_1 L_1,$$

$$J_1 = U_2L_2, \quad J_2 := L_2U_2,$$

entonces J_2 *es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional* $\mathbf{L}+\mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$ *donde*

$$C = \frac{\mu_0(\beta_0 - s)}{s}.$$

Aquí $\mu_0 = \mathbf{L}(1)$, $\beta_0 = \frac{\mathbf{L}(x)}{\mathbf{L}(1)}$ *y* s *denota el parámetro libre asociado a la factorización UL de* J_1.

Demostración.

Considerando (2.7), la matriz $J_1 := U_1L_1$ puede expresarse del modo siguiente,

$$J_1 = \begin{bmatrix} \beta_0 + l_1 & 1 & 0 & \cdots \\ l_1(\beta_1 - l_1) & \beta_1 + l_2 - l_1 & 1 & \cdots \\ 0 & l_2(\beta_2 - l_2) & \beta_2 + l_3 - l_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

donde $[l_1, l_2, \ldots]$ y $[\beta_0, \beta_1, \ldots]$ denotan la subdiagonal de L_1 y la diagonal principal de J_0, respectivamente.

Consideremos ahora la factorización UL de J_1, que depende de un parámetro libre s. Por la Proposición 2.2.2,

$$J_1 = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & S_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & S_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta_0 + l_1 - s & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \beta_1 + l_2 - l_1 - S_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \beta_2 + l_3 - l_2 - S_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

donde

$$S_1 = \frac{l_1(\beta_1 - l_1)}{\beta_0 + l_1 - s}, \quad S_n = \frac{l_n(\beta_n - l_n)}{\beta_{n-1} + l_n - l_{n-1} - S_{n-1}}, \text{ para todo } n \geq 2. \tag{2.28}$$

Entonces, la matriz $J_2 := L_2U_2$ viene dada por

$$J_2 = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & \cdots \\ s(\beta_0 + l_1 - s) & \beta_0 + l_1 - s + S_1 & 1 & \cdots \\ 0 & S_1(\beta_1 + l_2 - l_1 - S_1) & \beta_1 + l_2 - l_1 + S_2 - S_1 & \cdots \\ 0 & 0 & S_2(\beta_2 + l_3 - l_2 - S_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Tenemos que probar que J_2 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}},$$

donde $C = \frac{\mu_0(\beta_0 - s)}{s}$, con $\mu_0 = \mathbf{L}(1)$.

Nótese que $\mathbf{L}$ es un funcional simetrizable ya que $P_n(0) \neq 0$ (recordemos la Definición 1.4.2 y la Proposición 1.4.2). Sea $\mathbf{U}$ el funcional lineal simétrico asociado a $\mathbf{L}$ y sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{U}$. Supongamos que $\{\xi_n\}$ es la sucesión de parámetros dados por la relación de recurrencia a tres términos que verifica $\{Q_n\}$, i.e.,

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - \xi_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

Se ha demostrado [23] que se verifica la siguiente relación entre los parámetros que definen la relación de recurrencia para las sucesiones de polinomios $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$:

$$\begin{cases} \beta_0 = \xi_1, \\ \beta_n = \xi_{2n} + \xi_{2n+1}, \quad n \geq 1, \\ \gamma_n = \xi_{2n-1}\xi_{2n}, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{2.29}$$

Asumiendo que $l_0 = 0$, a continuación probamos por inducción que

$$\xi_{2n-1} = \beta_{n-1} - l_{n-1}, \quad \xi_{2n} = l_n, \quad n \geq 1. \tag{2.30}$$

Por (2.3) y (2.29),

$$\xi_1 = \beta_0 - l_0, \quad \xi_2 = \frac{\gamma_1}{\beta_0} = l_1.$$

Supongamos que $\xi_{2n-1} = \beta_{n-1} - l_{n-1}$. Entonces, por (2.3) y (2.29) se obtiene

$$\xi_{2n} = \frac{\gamma_n}{\xi_{n-1}} = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - l_{n-1}} = l_n.$$

Por otro lado, por (2.29), se deduce que

$$\xi_{2n+1} = \beta_n - \xi_{2n} = \beta_n - l_n.$$

Supongamos ahora que $\{\tilde{P}_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\tilde{\mathbf{L}}$ y sean $\{\tilde{\beta}_n\}$ y $\{\tilde{\gamma}_n\}$ las sucesiones de parámetros asociadas a la relación de recurrencia que verifica dicha sucesión. Observemos que $\tilde{\mathbf{L}}$ también es un funcional simetrizable dado que $\tilde{P}_n(0) = P_n(0)$. Sea $\tilde{\mathbf{U}}$ el funcional lineal simétrico asociado a $\tilde{\mathbf{L}}$ y sea $\{\tilde{Q}_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\tilde{\mathbf{U}}$. Si $\{\tilde{\xi}_n\}$ denota la sucesión de parámetros dada por la relación de recurrencia a tres términos que satisface $\{\tilde{Q}_n\}$, entonces

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_0 = \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\beta}_n = \tilde{\xi}_{2n} + \tilde{\xi}_{2n+1}, \quad n \geq 1 \\ \tilde{\gamma}_n = \tilde{\xi}_{2n-1}\tilde{\xi}_{2n}, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{2.31}$$

Más aún, [4, 23]

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{1+\frac{C}{\mu_0}}, \\ \tilde{\xi}_{2m} = \xi_{2m-1} + \xi_{2m} - \tilde{\xi}_{2m-1}, \quad m \geq 1, \\ \tilde{\xi}_{2m+1} = \frac{\xi_{2m}\xi_{2m+1}}{\tilde{\xi}_{2m}}, \quad m \geq 1. \end{cases} \tag{2.32}$$

En lo que sigue, determinamos la relación entre $\tilde{\beta}_n$ y β_n así como la relación entre $\tilde{\gamma}_n$ y γ_n. A partir de (2.29), (2.31), y (2.32)

$$\tilde{\beta}_0 = \tilde{\xi}_1 = \frac{\xi_1\mu_0}{\mu_0+C} = \frac{\beta_0\mu_0}{\mu_0+C} = s,$$
$$\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\xi}_2\tilde{\xi}_1 = (\xi_1+\xi_2-\tilde{\xi}_1)\tilde{\beta}_0 = (\beta_0+\xi_2-\tilde{\beta}_0)\tilde{\beta}_0.$$

Teniendo en cuenta (2.30), el resultado previo puede expresarse como

$$\tilde{\gamma}_1 = (\beta_0+l_1-s)s.$$

Si denotamos por $S_0 := s$, probaremos a continuación que

$$\tilde{\xi}_{2n-1} = S_{n-1}, \quad \tilde{\xi}_{2n} = \beta_{n-1}+l_n-l_{n-1}-S_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Ya hemos probado que $\tilde{\xi}_1 = s = S_0$. A partir de (2.32), se deduce que $\tilde{\xi}_2 = \beta_0 - l_0 + l_1 - S_0$. Supongamos ahora que $\tilde{\xi}_{2n-1} = S_{n-1}$, entonces

$$\tilde{\xi}_{2n} = \xi_{2n-1}+\xi_{2n}-\tilde{\xi}_{2n-1} = \beta_{n-1}-l_{n-1}+l_n-S_{n-1}.$$

Por otro lado, a partir de (2.28), (2.30) y (2.32) se tiene

$$\tilde{\xi}_{2n+1} = \frac{\xi_{2n}\xi_{2n+1}}{\tilde{\xi}_{2n}} = \frac{l_n(\beta_n-l_n)}{\beta_{n-1}+l_n-l_{n-1}-S_{n-1}} = S_n.$$

Por tanto,

$$\tilde{\beta}_k = \tilde{\xi}_{2k}+\tilde{\xi}_{2k+1} = \beta_{k-1}-l_{k-1}+l_k-S_{k-1}+S_k,$$
$$\tilde{\gamma}_k = \tilde{\xi}_{2k}\tilde{\xi}_{2k-1} = S_{k-1}(\beta_{k-1}-l_{k-1}+l_k-S_{k-1}).$$

$\square$

Observación 2.5.1 *Teniendo en cuenta la proposición anterior, se deduce que una condición necesaria y suficiente para que el funcional* $\mathbf{L}+\mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$ *sea casi-definido es que* $P_n(0) \neq 0$ *para todo* n *(siendo* $\{P_n\}$ *la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a* $\mathbf{L}$*) y que* $\hat{P}_n^*(0) \neq 0$*, para todo* n*, donde* $\{\hat{P}_n^*\}$ *denota la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro* $s = \frac{\mu_0\beta_0}{\mu_0+C}$ *asociados al funcional* $\mathbf{xL}$*.*

A continuación damos la versión con shift de la Proposición 2.5.1.

Corolario 2.5.1 *Sea* J_0 *la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal casi-definido* $\mathbf{L}$ *y sea* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tal que* $P_n(\alpha) \neq 0$ *para todo* n*. Consideremos las siguientes transformaciones sobre la matriz* J_0

$$J_0 - \alpha I = L_1U_1, \quad J_1 := U_1L_1,$$
$$J_1 = U_2L_2, \quad J_2 := L_2U_2 + \alpha I.$$

Entonces, J_2 *es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional* $\mathbf{L}+\mathbf{C}\delta_\alpha$ *donde*

$$\mathbf{C} = \frac{\mu_0(\beta_0-\alpha-s)}{s},$$

con $\mu_0 = \mathbf{L}(1)$*,* $\beta_0 = \frac{\mathbf{L}(x)}{\mathbf{L}(1)}$ *y* s *es el parámetro asociado a la factorización UL de* J_1*.*

Demostración.

Denotamos por $T_0 := J_0 - \alpha I$. Entonces, por el Lema 2.3.2, T_0 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{L_1}$ dado por

$$\mathbf{L_1}[p(x)] = \mathbf{L}[p(x-\alpha)].$$

Por la Proposición 2.5.1, la matriz $T_1 = L_2U_2$ es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{L_2} = \mathbf{L_1} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{C} = \frac{\tilde{\mu}_0(\tilde{\beta}_0 - s)}{s} = \frac{\mu_0(\beta_0 - \alpha - s)}{s}, \quad \text{con } \tilde{\mu}_0 = \mathbf{L_1}(1),\ \tilde{\beta}_0 = \frac{\mathbf{L_1}(x)}{\mathbf{L_1}(1)}.$$

Finalmente, $J_2 = T_1 + \alpha I$ es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{L_3}$ dado por

$$\mathbf{L_3}[p(x)] = \mathbf{L_2}[p(x+\alpha)],$$

y, por tanto,

$$\mathbf{L_3}[p(x)] = \mathbf{L_2}[p(x+\alpha)] = \mathbf{L_1}[p(x+\alpha)] + \mathbf{C}p(\alpha) = \mathbf{L}[p(x)] + \mathbf{C}p(\alpha),$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{L_3} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\alpha.$$

□

El siguiente corolario muestra cómo incluir una masa en dos puntos simétricos con respecto al origen.

Corolario 2.5.2 *Consideremos la matriz mónica de Jacobi J_0 asociada al funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Apliquemos las siguientes transformaciones a J_0*

$$\begin{array}{ll} J_0 - \alpha I = L_1U_1, & J_1 := U_1L_1, \\ J_1 = U_2L_2, & J_2 := L_2U_2 + \alpha I, \\ J_2 + \alpha I = L_3U_3, & J_3 := U_3L_3, \\ J_3 = U_4L_4, & J_4 := L_4U_4 - \alpha I. \end{array}$$

Si se dan las condiciones necesarias para que exista la factorización LU de $J_0 - \alpha I$ y $J_2 + \alpha I$, entonces J_4 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional

$$\mathbf{L_2} = \mathbf{L} + \mathbf{C_1}\delta_\alpha + \mathbf{C_2}\delta_{-\alpha},$$

donde

$$\mathbf{C_1} = \frac{\mu_0(\beta_0 - \alpha - s_1)}{s_1}, \quad \mathbf{C_2} = \frac{\mu_0(\beta_0 + \alpha - s_2) + C_1(2\alpha - s_2)}{s_2},$$

con $\mu_0 = \mathbf{L}(1)$, $\beta_0 = \frac{\mathbf{L}(x)}{\mathbf{L}(1)}$ y s_1, s_2 son los parámetros libres asociados a la factorización UL de J_1 y J_3, respectivamente.

Demostración.

Por el Corolario 2.5.1, la matriz J_2 está asociada al funcional lineal

$$\mathbf{L_1} = \mathbf{L} + \mathbf{C_1}\delta_\alpha,$$

donde

$$\mathbf{C_1} = \frac{\mu_0(\beta_0 - \alpha - s_1)}{s_1}.$$

De nuevo en virtud del Corolario 2.5.1, la matriz J_4 está asociada al funcional lineal

$$\mathbf{L_2} = \mathbf{L_1} + \mathbf{C_2}\delta_{-\alpha},$$

donde

$$\mathbf{C_2} = \frac{\tilde{\mu}_0(\tilde{\beta}_0 + \alpha - s_2)}{s_2}, \quad \text{con } \tilde{\mu}_0 = \mathbf{L_1}(1), \quad \tilde{\beta}_0 = \frac{\mathbf{L_1}(x)}{\mathbf{L_1}(1)}.$$

Observemos que

$$\tilde{\mu}_0 = \mathbf{L_1}(1) = \mu_0 + C_1, \quad \tilde{\beta}_0 = \frac{\mathbf{L_1}(x)}{\mathbf{L_1}(1)} = \frac{\mu_1 + C_1\alpha}{\mu_0 + C_1} = \frac{\beta_0\mu_0 + C_1\alpha}{\mu_0 + C_1}. \tag{2.33}$$

Finalmente, si p denota un polinomio, entonces

$$\mathbf{L_2}[p(x)] = \mathbf{L_1}[p(x)] + \mathbf{C_2}p(-\alpha) = \mathbf{L}[p(x)] + \mathbf{C_1}p(\alpha) + \mathbf{C_2}p(-\alpha),$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{L_2} = \mathbf{L} + \mathbf{C_1}\delta_\alpha + \mathbf{C_2}\delta_{-\alpha}.$$

Más aún, por (2.33), se obtiene

$$\mathbf{C_2} = \frac{(\mu_0 + \mathbf{C_1})(\frac{\beta_0\mu_0 + \mathbf{C_1}\alpha}{\mu_0 + \mathbf{C_1}} + \alpha - s_2)}{s_2} = \frac{\mu_0(\beta_0 + \alpha - s_2) + \mathbf{C_1}(2\alpha - s_2)}{s_2}.$$

□

2.6. Transformación del funcional L en $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L}+\mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$

En esta sección analizamos el caso en que el funcional lineal inicial $\mathbf{L}$ se transforma en $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L}+\mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$ mediante la aplicación de una transformación de Darboux a la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{L}$.

Proposición 2.6.1 *Sea J_1 la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{L}$. Supongamos que $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$. Consideremos la aplicación de una transformación de Darboux a J_1 de parámetro s,*

$$J_1 = UL, \quad J_2 := LU.$$

Entonces, J_2 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\tilde{\mathbf{L}}$ dado por $\tilde{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L}+\mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$, con $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{L}(1)}{s}$, donde s denota el parámetro libre asociado a la factorización UL de J_1, si $\hat{P}_n(0) \neq 0$ para todo n, donde $\{\hat{P}_n\}$ denota la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro s asociada a $\{P_n\}$. En otras palabras, $\tilde{\mathbf{L}}$ es la transformada de Geronimus de $\mathbf{L}$.

Demostración. Si suponemos que existe un número real s tal que la sucesión $\{\hat{P}_n\}$ de polinomios co-recursivos de parámetro s verifica $\hat{P}_n(0) \neq 0$ para todo n, entonces, existe la factorización UL de J con parámetro s y, por tanto, el funcional $\tilde{L}$ asociado a J_2 es casi-definido. Observemos la siguiente transformación

$$J_1 = UL, \quad J_2 := LU, \quad J_3 := J_1 = UL.$$

Entonces, la matriz J_3, por ser igual a J_1, está asociada al funcional $\mathbf{L}$ y, por ser la transformada de Darboux sin parámetro de J_2, está asociada al funcional $\mathbf{x}\tilde{\mathbf{L}}$. Entonces, deducimos que

$$\mathbf{x}\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}, \tag{2.34}$$

lo que es equivalente a decir que existe una constante $\mathbf{C}$ tal que

$$\tilde{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}. \tag{2.35}$$

Ahora bien, por (2.34) y (2.35),

$$\tilde{\mathbf{L}}(x) = \mathbf{L}(1), \quad \tilde{\mathbf{L}}(1) = \mathbf{C}.$$

Además, si $\tilde{\beta}_0$ denota el elemento de la matriz J_2 en la posición (1,1), teniendo en cuenta el resultado anterior

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{\tilde{\mathbf{L}}(x)}{\tilde{\mathbf{L}}(1)} = \frac{\mathbf{L}(1)}{\mathbf{C}}.$$

Pero $\tilde{\beta}_0 = s$, de donde se deduce que $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{L}(1)}{s}$.

□

Una demostración alternativa de la proposición anterior puede encontrarse en [41].

Observación 2.6.1 *A partir de la proposición anterior se deduce que una condición necesaria y suficiente para que el funcional $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$ sea casi-definido es que exista la factorización UL de J_1, lo que es equivalente a exigir que $\hat{P}_n(0) \neq 0$ para todo n, donde $\{\hat{P}_n\}$ es la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro $s = \frac{\mathbf{L}(1)}{C}$ asociados al funcional $\mathbf{L}$.*

A continuación presentamos la versión finita de la Proposición 2.6.1. Téngase en cuenta que, aunque trabajaremos con matrices finitas, la factorización UL a la que nos referiremos no es la factorización UL estándar sino que es una restricción al caso finito de la factorización UL infinita que hemos trabajado con anterioridad.

Proposición 2.6.2 *Sea $(J_1)_n$ la submatriz principal superior izquierda de orden n de la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$. Sea*

$\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$. Apliquemos la siguiente transformación a $(J_1)_n$,

$$(J_1)_n = U_n L_n, \quad (J_2)_n := L_n U_n.$$

Entonces, $(J_2)_n$ es la submatriz principal superior izquierda de orden n de la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$, con $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{L}(1)}{s}$ y s, el parámetro libre asociado a la correspondiente factorización UL, si $\hat{P}_n(0) \neq 0$ para todo n, donde $\{\hat{P}_n\}$ denota la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro s asociada a $\{P_n\}$.

El siguiente corolario presenta la versión con shift de la Proposición 2.6.1.

Corolario 2.6.1 *Sea J_1 la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{L}$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Supongamos que $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$. Apliquemos la siguiente transformación a J_1,*

$$J_1 - \alpha I = UL, \quad J_2 := LU + \alpha I.$$

Entonces, J_2 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\tilde{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}-\alpha}\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\alpha$, con $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{L}(1)}{s}$ y s, el parámetro libre asociado a la correspondiente factorización UL, si $\hat{P}_n(\alpha) \neq 0$ para todo n, donde $\{\hat{P}_n\}$ denota la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro s asociada a $\{P_n\}$.

Demostración. La demostración es semejante a la del Corolario 2.5.1.

□

2.7. Funcionales lineales obtenidos mediante la combinación de transformaciones de Darboux y transformaciones de Darboux sin parámetro

Hasta ahora hemos obtenido ciertas perturbaciones estándar de un funcional lineal mediante la aplicación de una transformación de Darboux o mediante la aplicación de una transformación de Darboux sin parámetro o bien mediante la aplicación de una combinación de ambas. Sin embargo, resulta evidente que podemos generar multitud de nuevas perturbaciones sin más que combinar convenientemente un número finito de transformaciones de Darboux y de transformaciones de Darboux sin parámetro. En esta sección mostramos dos ejemplos. Serán muy útiles para este objetivo la Definición 1.1.7, la Proposición 1.1.1 y la Observación 1.1.2, así como el siguiente resultado.

Proposición 2.7.1 *Sea $\mathbf{L}$ un funcional lineal. Entonces,* *1. Si $n \leq m$,*

$$\mathbf{x^n}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^m}}\mathbf{L}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^{m-n}}}\mathbf{L}, \tag{2.36}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^m}}(\mathbf{x^n L}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^{m-n}}}\mathbf{L} - \mathbf{L}(1)\delta_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\mathbf{L}(x^i)}{(i+m-n)!}\delta_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{i+m-n})}. \tag{2.37}$$

2. Si $n > m$,

$$\mathbf{x^n}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^m}}\mathbf{L}\right) = \mathbf{x^{n-m}}\mathbf{L}, \tag{2.38}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^m}}(\mathbf{x^n L}) = \mathbf{x^{n-m}}\mathbf{L} - \mathbf{L}(x^{n-m})\delta_0 + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\mathbf{L}(x^{i+n-m})}{i!}\delta_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{i})}. \tag{2.39}$$

Demostración. La demostración es trivial a partir de la Definición 1.1.4, la Proposición 1.1.1 y la Observación 1.1.2. □

En el primer ejemplo que analizamos a continuación, consideramos la aplicación de dos transformaciones de Darboux consecutivas a una matriz mónica de Jacobi.

Corolario 2.7.1 *Sea J_1 la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{L_1}$. Supongamos que existen la factorización UL de J_1 con parámetro s_1 y la factorización UL de J_2 con parámetro s_2. Si aplicamos dos transformaciones de Darboux consecutivas a la matriz J_1, i.e.,*

$$J_1 = U_1 L_1, \quad J_2 := L_1 U_1,$$

$$J_2 = U_2 L_2, \quad J_3 := L_2 U_2,$$

entonces, J_3 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal

$$\mathbf{L_3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}}\mathbf{L_1} + \mathbf{C_1}\delta_\mathbf{0} + \mathbf{C_2}\delta'_\mathbf{0},$$

donde

$$\mathbf{C_1} = \frac{\mathbf{L_1}(1)}{s_1 s_2}, \quad \mathbf{C_2} = -\frac{\mathbf{L_1}(1)}{s_1}.$$

Demostración. Por la Proposición 2.6.1, J_2 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal

$$\mathbf{L}_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L_1} + \mathbf{D_2}\delta_\mathbf{0},$$

donde $D_2 = \frac{\mathbf{L_1}(1)}{s_1}$. Considerando de nuevo la Proposición 2.6.1, J_3 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal

$$\mathbf{L_3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L_2} + \mathbf{C_1}\delta_\mathbf{0},$$

y $\mathbf{C_1} = \frac{\mathbf{L_2}[1]}{s_2} = \frac{\mathbf{L_1}(1)}{s_1 s_2}$. Entonces, para todo $p \in \mathbb{P}$, se obtiene

$$\mathbf{L_3}(p) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L_2}\right)(p) + \mathbf{C_1}p(0) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L_1} + \mathbf{D_2}\delta_{\mathbf{0}}\right](p) + \mathbf{C_1}p(0) =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}}\mathbf{L_1}(p) - \mathbf{D_2}p'(0) + \mathbf{C_1}p(0).$$

□

La situación tratada en el corolario previo, donde los funcionales contienen, no sólo funcionales de Dirac sino también algunas de sus derivadas, fue considerada por primera vez en [41].

Finalmente, obtenemos la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional $\mathbf{L} + \mathbf{C_1}\delta_{\mathbf{0}} + \mathbf{C_2}\delta'_{\mathbf{0}}$ en términos de la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{L}$.

Corolario 2.7.2 *Sea J_0 la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$. Supongamos que $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$ y $P_n(0) \neq 0$, para todo $n \geq 1$. Aplicamos las siguientes transformaciones*

$$\begin{aligned} J_0 &= L_1U_1, \quad J_1 := U_1L_1, \\ J_1 &= L_2U_2, \quad J_2 := U_2L_2, \\ J_2 &= U_3L_3, \quad J_3 := L_3U_3, \\ J_3 &= U_4L_4, \quad J_4 := L_4U_4, \end{aligned}$$

siempre que las factorizaciones LU y UL que aparecen, existan. Entonces, J_4 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal

$$\mathbf{L} + \mathbf{C_1}\delta_{\mathbf{0}} + \mathbf{C_2}\delta'_{\mathbf{0}},$$

donde $\mathbf{C_1} = \frac{\mathbf{L}(x^2)}{s_1 s_2} - \mathbf{L}(1)$ y $\mathbf{C_2} = -\frac{\mathbf{L}(x^2)}{s_1} + \mathbf{L}(x)$. Aquí s_1 y s_2 son los parámetros libres asociados a la factorización UL de J_2 y J_3, respectivamente.

Demostración.

Notemos que

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}[\mathbf{xL}] = \mathbf{L} - \mathbf{L}(1)\delta_{\mathbf{0}}, \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\delta_{\mathbf{0}} = -\delta'_{\mathbf{0}}. \tag{2.40}$$

Entonces, por el Teorema 2.3.1 y la Proposición 2.6.1, se obtiene que J_1 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{xL}$ y J_2 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{x^2L}$. Además, J_3 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{xL} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$, donde $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{L}(x^2)}{s_1} - \mathbf{L}(x)$, con s_1 el parámetro libre asociado a la factorización UL de J_2. Finalmente, J_4 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{L} + \mathbf{C_1}\delta_{\mathbf{0}} + \mathbf{C_2}\delta'_{\mathbf{0}}$.

Por la Proposición 2.6.1, el funcional lineal asociado a J_4 es

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}[\mathbf{xL} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}] + \mathbf{D}\delta_{\mathbf{0}}$$

con $\mathbf{D} = \frac{\mathbf{L}(x^2)}{s_1 s_2}$. Teniendo en cuenta (2.40), se obtiene el resultado buscado.

□

2.8. Relación algebraica explícita entre sucesiones de polinomios ortogonales

En esta sección obtenemos relaciones algebraicas explícitas entre sucesiones de polinomios, en particular, entre la sucesión de polinomios ortogonal con respecto a un funcional lineal **L** y las sucesiones ortogonales con respecto a los funcionales perturbados estándar estudiados en este capítulo, es decir,

- $\mathbf{xL}$,
- $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$,
- $\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_{\mathbf{0}}$.

Las expresiones que se obtienen ya eran conocidas pero nosotros las obtenemos mediante un procedimiento alternativo utilizando la técnica matricial empleada en el resto del capítulo. De esta manera, las matrices L y U que se obtienen en las factorizaciones LU ó UL de una matriz de Jacobi, adquieren significado al probarse que L es la matriz de cambio de base que relaciona la sucesión asociada al funcional lineal original con la sucesión que se obtiene al final de la transformación (transformación de Darboux con o sin parámetro). Por otro lado, la matriz U nos permite establecer una relación algebraica inversa, es decir, nos permite expresar los polinomios asociados a la matriz de salida en términos de los polinomios asociados al funcional original.

2.8.1. Relación algebraica explícita entre los polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal L y los polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal xL.

Denotemos por $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios ortogonal con respecto a un funcional lineal casi-definido **L** y sea J la matriz mónica de Jacobi asociada. Supongamos, además, que $P_n(0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Sea J^* la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional **xL**, o lo que es lo mismo, a la sucesión de polinomios núcleo mónicos $\{P_n^*\}$ asociada a $\{P_n\}$. Entonces,

$$xv_p = Jv_p, \tag{2.41}$$

$$xv_{p^*} = J^*v_{p^*}, \tag{2.42}$$

donde v_p y v_{p^*} denotan los vectores columna cuyos elementos son los polinomios $\{P_n\}$ y $\{P_n^*\}$, respectivamente, es decir, $v_p = [P_0(x), P_1(x), \ldots]^t$ y $v_{p^*} = [P_0^*(x), P_1^*(x), \ldots]^t$. Por el Teorema 2.3.1, si $J = LU$ denota la factorización LU de J, entonces, $J^* = UL$. Por tanto, por (2.42)

$$xv_{p^*} = ULv_{p^*}.$$

Si multiplicamos la expresión anterior por L por la izquierda, se obtiene

$$x(Lv_{p^*}) = J(Lv_{p^*}),$$

y comparando con (2.41), se llega a que $v_p = Lv_{p^*}$, es decir, la matriz L es la matriz de cambio de base de $\{P_n^*\}$ a $\{P_n\}$, lo que es equivalente a decir que

$$P_n(x) = P_n^*(x) + l_n P_{n-1}^*(x), \quad \text{para todo } n.$$

Teniendo en cuenta el Lema 2.2.1, la expresión anterior puede reescribirse expresando los coeficientes en términos de los datos iniciales en la forma siguiente

$$P_n(x) = P_n^*(x) - \gamma_n \frac{P_{n-1}(0)}{P_n(0)} P_{n-1}^*(x).$$

Por otro lado, por (2.42),

$$xv_{p^*} = ULv_{p^*} = Uv_p,$$

es decir, la matriz U nos da los coeficientes de una relación algebraica que vincula a las dos bases polinómicas del modo siguiente

$$xP_n^*(x) = P_{n+1}(x) + u_{n+1}P_n(x).$$

Recordemos además el Lema 2.2.1, según el cual los elementos de la diagonal principal de U verifican

$$u_n = -\frac{P_n(0)}{P_{n-1}(0)},$$

y así recuperamos el resultado dado en (1.21).

$$xP_n^*(x) = P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(0)}{P_n(0)} P_n(x).$$

2.8.2. Relación algebraica explícita entre los polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal L y los polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$

Sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$. Suponiendo que el funcional lineal $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$ es casi-definido, sea $\{Q_n\}$ la correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales. Si J_1 denota la matriz mónica de Jacobi asociada a $\{P_n\}$ y J_2 denota la matriz mónica de Jacobi asociada a $\{Q_n\}$, entonces,

$$xv_p = J_1 v_p, \quad xv_q = J_2 v_q, \tag{2.43}$$

donde v_p y v_q denotan los vectores columna que contienen los polinomios de las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$, respectivamente. Además, si $J_1 = UL$ denota la factorización UL de J_1 de parámetro s, por la Proposición 2.6.1, $J_2 = LU$. Siguiendo un razonamiento semejante al utilizado en la subsección anterior, y teniendo en cuenta el Lema 2.2.2, se obtiene que $v_q = Lv_p$, $xv_p = Uv_q$, y, por tanto,

$$Q_n(x) = P_n(x) - \frac{\hat{P}_n(0)}{\hat{P}_{n-1}(0)} P_{n-1}(x), \tag{2.44}$$

donde $\{\hat{P}_n\}$ denota la sucesión de polinomios co-recursivos de parámetro s asociados a $\mathbf{L}$. Esta expresión también ha sido obtenida en [53] usando un método diferente. Además,

$$xP_n = Q_{n+1}(x) - \gamma_n \frac{\hat{P}_{n-1}(0)}{\hat{P}_n(0)} Q_n(x). \tag{2.45}$$

2.8.3. Relación algebraica explícita entre los polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal L y los polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal $\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$

Sean $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$ las sucesiones de polinomios mónicos ortogonales con respecto a los funcionales lineales $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$, respectivamente. Sea J_0 la matriz mónica de Jacobi asociada a $\mathbf{L}$. Entonces, por la Proposición 2.5.1, la matriz mónica de Jacobi J_2 asociada a $\mathbf{L} + \mathbf{C}\delta_\mathbf{0}$ se obtiene mediante el siguiente proceso de factorización

$$\begin{aligned} J_0 &= L_1 U_1, \quad J_1 := U_1 L_1, \\ J_1 &= U_2 L_2, \quad J_2 := L_2 U_2. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.3.1, también sabemos que J_1 es la matriz mónica de Jacobi asociada al funcional lineal $\mathbf{xL}$. Entonces, si $\{P_n^*\}$ denota la sucesión de polinomios núcleo asociada a $\{P_n\}$ (recordemos que $\{P_n^*\}$ es también la sucesión de polinomios mónicos ortogonales asociada a J_1), teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior y por (2.44),

$$Q_n(x) = P_n^*(x) - \frac{\hat{P}_n^*(0)}{\hat{P}_{n-1}^*(0)} P_{n-1}^*(x), \quad n \geq 1.$$

Considerando la definición de polinomios núcleo, se obtiene

$$xQ_n(x) = P_{n+1}(x) - \left[\frac{P_{n+1}(0)}{P_n(0)} + \frac{\hat{P}_n^*(0)}{\hat{P}_{n-1}^*(0)} \right] P_n(x) + \frac{P_n(0)\hat{P}_n^*(0)}{P_{n-1}(0)\hat{P}_{n-1}^*(0)} P_{n-1}(x), \tag{2.46}$$

que es equivalente a la expresión obtenida en [3].

Matricialmente, las relaciones algebraicas entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$ se obtienen de la forma siguiente. Sabemos que

$$xv_p = J_0 v_p, \quad xv_{p^*} = J_1 v_{p^*}, \quad xv_q = J_2 v_q.$$

Entonces, siguiendo un procedimiento semejante al utilizado en la Subsección (2.44), se obtiene que

$$v_p = L_1 v_{p^*}, \quad v_q = L_2 v_{p^*}.$$

Por tanto,

$$v_q = L_2 L_1^{-1} v_p. \tag{2.47}$$

Por otro lado, $xv_{p^*} = U_1 v_p$, y se obtiene

$$xv_q = L_2 U_1 v_p,$$

que es la expresión matricial de (2.46).

Capítulo 3

Aspectos numéricos de la transformación de Darboux sin parámetro

En este capítulo estudiamos la estabilidad del algoritmo introducido en el Capítulo 2 para calcular la transformada de Darboux sin parámetro de la matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal casi-definido $\mathbf{L}$. Obsérvese que la matriz mónica que se obtiene en el proceso es la asociada al funcional $\mathbf{xL}$ que, como vimos en el Capítulo 1, está estrechamente vinculada al proceso de simetrización de funcionales lineales (Proposición 1.4.2). Incluimos también una sección relacionada con la estabilidad y condicionamiento de la factorización LU sin pivote de matrices tridiagonales generales. Este trabajo surge de forma natural a partir de los desarrollos realizados en el análisis del algoritmo que calcula la transformación de Darboux sin parámetro. Dada la importancia que la factorización LU tiene por sí misma en el contexto del Algebra Lineal Numérica, incluímos este contenido que, en cierta manera, se deslinda del hilo conductor de esta memoria. En cualquier caso, los resultados obtenidos tienen aplicaciones obvias en el problema de simetrización de funcionales lineales dado que, como se vió en la Seccion 2.8.1, las matrices L y U obtenidas de la factorización LU de una matriz mónica de Jacobi asociada a un funcional lineal casi-definido, contienen los parámetros de las relaciones algebraicas explícitas entre las sucesiones de polinomios $\{P_n\}$ y $\{P_n^*\}$ asociadas a $\mathbf{L}$ y $\mathbf{xL}$, respectivamente.

Las conclusiones más importantes de este capítulo son que tanto el algoritmo para calcular la transformación de Darboux sin parámetro como el algoritmo para calcular la factorización LU sin pivote de matrices tridiagonales generales son "forward estables". Ello significa que la magnitud de los errores "forward" producidos por ambos algoritmos son lo mejor que uno puede esperar de la sensibilidad del problema, aunque el algoritmo no es "backward estable".

Como el lector puede comprobar, los análisis de estabilidad incluidos en este capítulo son largos y sutiles, por lo que sólo nos hemos centrado en el análisis de la transformación de Darboux sin parámetro que es la que, hasta la fecha, ha despertado mayor interés en las aplicaciones numéricas. Sin embargo, estos análisis de estabilidad deberían extenderse a la transformación de Darboux sin parámetro y con shift así como a la transformación de Darboux general. De hecho, en la actualidad estamos trabajando en el primero de estos problemas, que exige un estudio más delicado que la versión sin shift debido a que, en general, se pierde la estabilidad forward para valores del shift fuera de ciertas regiones.

3.1. Estabilidad y condicionamiento de la transformación de Darboux sin parámetro

3.1.1. Nociones básicas sobre estabilidad numérica y condicionamiento

En esta subsección, incluímos algunas nociones básicas acerca de la estabilidad numérica de algoritmos y del condicionamiento de problemas matemáticos. Se utiliza un lenguaje sencillo a fin de introducir rápida e informalmente al lector en el tema. Así aparecen ciertos términos entrecomillados indicando que no son formales pero expresan la idea que se pretende explicar. En particular, no se da una definición formal de número de condición. Sin embargo, en los desarrollos en subsecciones posteriores aparece la definición de número de condición precisa para nuestro estudio. Mantenemos la terminología inglesa para ciertos conceptos y definiciones por estimar que es la más sencilla y significativa aunque, en algunos de ellos, incluímos la traducción española de los mismos.

Definimos un *problema matemático* como una función $f : X \to Y$, donde X e Y son, respectivamente, el espacio vectorial de datos y el espacio vectorial de soluciones. Ambos espacios son de dimensión finita. Nos centraremos en el comportamiento de f en un punto concreto $x \in X$.

Diremos que el problema f está *bien condicionado* si toda perturbación "pequeña" de los datos x produce solamente cambios pequeños en $f(x)$. En cambio, diremos que se trata de un problema *mal condicionado* si "pequeñas" perturbaciones en los datos generan cambios grandes en $f(x)$. En definitiva, el condicionamiento de un problema mide el cambio en la solución con respecto al cambio en los datos originales.

Consideremos un algoritmo $\tilde{f}$ para resolver el problema f en un ordenador. Supongamos que calculamos mediante el algoritmo $\tilde{f}$ una aproximación de $y = f(x)$ en una aritmética en coma flotante de precisión $\mathbf{u}$. Denotemos dicha aproximación por $\hat{y} = \tilde{f}(x)$. Si $\tilde{f}$ es un "buen" algoritmo, uno puede esperar calcular $\hat{y}$ con error relativo en norma pequeño, es decir,

$$\frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y\|} \leq C\mathbf{u}, \quad C \in \mathbb{R}$$

o con error relativo en componentes pequeños,

$$\max_k \left\{ \frac{|y_k - \hat{y}_k|}{|y_k|} \right\} \leq C\mathbf{u}.$$

Llamaremos *errores forward* a los errores relativos de $\hat{y}$ y de sus componentes.

Definición 3.1.1 *Diremos que un algoritmo $\tilde{f}$ para resolver un problema $f : X \to Y$ es "accurate" si, para toda $x \in X$, existe C tal que*

$$\frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y\|} \leq C\mathbf{u},$$

o bien,

$$\max_k \left\{ \frac{|y_k - \hat{y}_k|}{|y_k|} \right\} \leq C\mathbf{u}.$$

Sin embargo, cuando el problema f está mal condicionado no se puede esperar que un algoritmo $\tilde{f}$ sea "accurate". Lo más que se puede esperar en tal caso es *estabilidad.*

Definición 3.1.2 *[44] Sea $\tilde{f}$ un algoritmo para resolver el problema $f : X \to Y$. Para cada $x \in X$, sea $\hat{y} = \tilde{f}(x)$. Diremos que el algoritmo $\tilde{f}$ es estable en norma en el sentido mixto backward-forward (o numéricamente estable en norma) si para todo $x \in X$, existen Δx y $\Delta \hat{y}$ de modo que*

$$\hat{y} + \Delta\hat{y} = f(x + \Delta x), \quad \|\Delta\hat{y}\| \leq C\mathbf{u}\|\hat{y}\|, \quad \|\Delta x\| \leq C\mathbf{u}\|x\|.$$

Diremos que el algoritmo $\tilde{f}$ es estable en componentes en el sentido mixto backward-forward (numéricamente estable en componentes) si, para cada $x \in X$ existen Δx y $\Delta\hat{y}$ tales que

$$\hat{y} + \Delta\hat{y} = f(x + \Delta x), \quad |\Delta\hat{y}| \leq C\mathbf{u}|\hat{y}|, \quad |\Delta x| \leq C\mathbf{u}|x|,$$

donde $|x|$ denota el vector cuyas componentes son los valores absolutos de las componentes de x.

Es decir, si un algoritmo es numéricamente estable, entonces la solución calculada $\hat{y}$ difiere poco del valor que habría sido producido por datos próximos a los exactos.

En ciertos casos, ocurre que $\hat{y} = f(x + \Delta x)$. El valor $\max\left|\frac{\Delta x_k}{x_k}\right|$ recibe el nombre de *error backward en componentes* mientras que $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ es el llamado *error backward en norma.* El proceso por el que se acota el error backward de la solución calculada se llama *Análisis backward (o regresivo) de errores.*

Definición 3.1.3 *[44] Diremos que un algoritmo $\tilde{f}$ para resolver un problema $f : X \to Y$ es* backward estable en norma *(o estable en sentido regresivo) si, para todo $x \in X$, la solución calculada $\hat{y}$ verifica*

$$\hat{y} = f(x + \Delta x), \quad \|\Delta x\| \leq C\mathbf{u}\|x\|,$$

es decir, el algoritmo calcula la solución exacta de datos próximos a los exactos. Diremos que el algoritmo es backward estable en componentes *si para todo $x \in X$, la solución calculada $\hat{y}$ verifica*

$$\hat{y} = f(x + \Delta x), \quad |\Delta x| \leq C\mathbf{u}|x|,$$

Ahora bien, para que un algoritmo backward estable produzca errores forward pequeños es necesario que el problema esté bien condicionado.

Teorema 3.1.1 *Supongamos que aplicamos un algoritmo backward estable para resolver un problema $f : X \to Y$, con número de condición relativo en norma κ. Entonces, si $y = f(x)$ para $x \in X$ e $\hat{y}$ denota la solución calculada por el algoritmo, el error forward verifica*

$$\frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y\|} \leq [\kappa(x) + o(1)]C\mathbf{u}.$$

Un resultado semejante se obtiene cuando se consideran errores forward en componentes y número de condición relativo en componentes.

Finalmente, definimos algoritmo forward estable, es decir, aquel que produce soluciones con errores forward de magnitud semejante a los producidos por un algoritmo backward estable.

Definición 3.1.4 *[44] Se dice que un algoritmo $\tilde{f}$ es* forward estable *(o estable en sentido progresivo) si*

$$\frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y\|} = O(\mathbf{u}\kappa),$$

donde κ denota el número de condición del problema.

Una definición semejante es posible cuando se considera el error forward en componentes. Obsérvese que la estabilidad backward implica estabilidad forward pero no al revés.

3.1.2. Introducción

Sea $\mathbf{L}$ un funcional lineal casi-definido con valores reales y definido en el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes reales. Supongamos que $\mathbf{L}$ tiene la siguiente representación integral en términos de una medida de Borel μ

$$\mathbf{L}(p) = \int_{\mathbb{R}} p \, d\mu.$$

Sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$. En este capítulo, no utilizaremos la notación introducida en (1.7) para las matrices mónicas de Jacobi. La razón es utilizar una notación que nos permita escribir con claridad los algoritmos que vamos a introducir. En particular, representaremos la matriz mónica de Jacobi asociada a $\{P_n\}$ como sigue:

$$J = \begin{bmatrix} B_1 & 1 & 0 & 0 & ... \\ G_1 & B_2 & 1 & 0 & ... \\ 0 & G_2 & B_3 & 1 & ... \\ 0 & 0 & G_3 & B_4 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

donde $G_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Recordemos, además, que, en el caso particular en que la medida μ sea positiva, $G_n > 0$ para todo n. Si la medida μ es positiva, es posible considerar la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ así como la correspondiente matriz de Jacobi (ver (1.8)).

$$J_s = \begin{bmatrix} B_1 & \sqrt{G_1} & 0 & 0 & ... \\ \sqrt{G_1} & B_2 & \sqrt{G_2} & 0 & ... \\ 0 & \sqrt{G_2} & B_3 & \sqrt{G_3} & ... \\ 0 & 0 & \sqrt{G_3} & B_4 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Ya comentamos en el Capítulo 2 que, en el contexto de las aplicaciones, es interesante estudiar cómo la matriz mónica de Jacobi J cambia cuando la medida μ se multiplica por un polinomio $\pi(x)$, i.e., $\pi(x)d\mu(x)$, y que la transformación de Darboux sin parámetro, en el caso de matrices semi-infinitas tridiagonales, es el proceso que permite obtener la matriz mónica de Jacobi asociada a $xd\mu$. Recordemos que la transformada de Darboux sin parámetro de una matriz tridiagonal semi-infinita J se calcula como sigue: 1) calcular la factorización LU sin pivote de J, fijando los elementos de la diagonal principal de la matriz L para que sean unos, 2) multiplicar los factores L y U en orden inverso, i.e., UL. Obsérvese, como se señala en [32, 47], que este algoritmo es una versión infinita de un paso del algoritmo LR. Pero la versión finita, que es la única accesible desde el punto de vista numérico, presenta una diferencia significativa (Proposición 2.3.1): una vez que han sido multiplicados los factores U y L, debe añadirse una matriz de rango uno. En la práctica, trabajaremos con una submatriz de orden n de J, $(J)_n$ y, por tanto, entre los parámetros de entrada no contaremos con la información necesaria para calcular el elemento l_n, necesario para construir la transformada de Darboux sin parámetro de $(J)_n$ de orden n. De ahí que incluyamos la siguiente proposición cuya demostración se sigue trivialmente de la Proposición 2.3.1.

Proposición 3.1.1 *[15] Sea* $\mathbf{L}$ *un funcional lineal casi-definido y sea* $\{P_n\}$ *la correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales. Si* $P_n(0) \neq 0$, *para* *todo* $n \geq 0$ *y* $(J)_n = L_n U_n$ *denota la factorización* LU *sin pivote de la submatriz principal de orden* n *de* J*, entonces* $(J^{(p)})_{n-1} := (U_n L_n)_{n-1}$ *es la submatriz principal de orden* $n-1$ *de la matriz mónica de Jacobi asociada a* $\mathbf{xL}$.

Considerando la importancia dada en la literatura a la transformación de Darboux sin parámetro (recordemos la introducción del Capítulo 2), parece natural y necesario dar respuesta a las siguientes preguntas: 1) ¿Es numéricamente estable el algoritmo descrito previamente para calcular la transformada de Darboux sin parámetro de una matriz mónica de Jacobi? ; 2) ¿qué podemos decir sobre el condicionamiento del problema? Las respuestas a estas preguntas no son triviales. Señalemos, por ejemplo, que la transformación de Darboux sin parámetro está relacionada con la factorización LU sin pivote que, en principio, no es un algoritmo backward estable (3.1.3). De acuerdo con lo que nosotros conocemos, hasta ahora no ha sido publicado ningún análisis formal de errores de ningún algoritmo que calcule la transformación de Darboux sin parámetro. Sin embargo, debería notarse que, en las referencias [32], [34] y [47], se afirma que el algoritmo que calcula la transformación de Darboux sin parámetro con shift parece estable (3.1.2). Estas afirmaciones están basadas en unos pocos experimentos numéricos y no son concluyentes.

El objetivo de este capítulo es desarrollar un análisis formal y general de la estabilidad del algoritmo usual para calcular *la transformación de Darboux sin parámetro en su versión sin shift*. En primer lugar hacemos un análisis de error backward (Subsección 3.1.4). Por otro lado, el estudio de la sensibilidad de la versión sin shift de la transformación de Darboux sin parámetro juega un papel clave en este análisis (Subsección 3.1.5). Definimos y estimamos dos tipos de números de condición que nos permiten dar cotas de los errores forward; además, mostramos que esas cotas pueden ser calculadas con bajo costo. La principal conclusión que presentamos es que el algoritmo habitual para calcular la transformación de Darboux sin parámetro es *forward estable* (3.1.4), i.e., los errores forward son de magnitud semejante a aquellos producidos por un algoritmo backward estable. No hay necesidad de decir que este resultado no implica que los errores forward sean pequeños. De ahí la necesidad de introducir cotas calculables de los errores forward. Hemos elegido desarrollar un análisis de errores en componentes porque, en muchos casos, al calcular la transformación de Darboux sin parámetro, se obtienen errores forward pequeños en componentes. También es posible realizar un análisis de errores en norma aunque, por brevedad, no lo incluímos. Además haremos un análisis comparativo con la *transformación de Darboux sin parámetro simétrica* (ver Sección 1.7) cuando ésta sea posible.

A lo largo de este capítulo, por simplicidad, hablaremos de la transformación de Darboux en vez de la transformación de Darboux sin parámetro ya que sólo consideramos el caso sin parámetro y no hay posibilidad de confusión.

3.1.3. Algoritmo y experimentos numéricos

En la próxima sección, analizaremos la estabilidad de un algoritmo que implementa la transformación de Darboux numéricamente. Nuestro análisis se basa en la estructura especial de las matrices mónicas de Jacobi. En esta sección comenzamos con una descripción detallada del algoritmo que implementa la transformación de Darboux y también introducimos la notación usada en el resto del capítulo. En el apartado 3.1.3.1 se hacen algunas observaciones importantes sobre las entradas y salidas de este algoritmo. Finalmente se presentan algunos experimentos numéricos en el apartado 3.1.3.2. A partir de ahora todos los resultados se refieren a submatrices principales de matrices mónicas de Jacobi o matrices de Jacobi. Dado que estamos interesados en el análisis numérico del algoritmo que implementa la transformación de Darboux y la transformación de Darboux simétrica, tenemos que restringirnos a matrices finitas.

Consideremos la matriz mónica de Jacobi de orden n,

$$(J)_n = \begin{bmatrix} B_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ G_1 & B_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & B_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{n-1} & B_n \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Por simplicidad, usaremos la siguiente notación

$$J(B, G) := (J)_n,$$

$$B = [B_1, ..., B_n]^T, \ G = [G_1, ..., G_{n-1}]^T.$$

El mismo tipo de notación es considerada para el caso de matrices de Jacobi.

$$J_s(B, \sqrt{G}) := (J_s)_n = \begin{bmatrix} B_1 & \sqrt{G_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{G_1} & B_2 & \sqrt{G_2} & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{G_2} & B_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{G_{n-1}} & B_n \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

En el resto de este capítulo suponemos que todas las matrices de Jacobi (mónicas o simétricas) que consideramos tienen una factorización LU sin pivote única y que $G_i \neq 0$, para todo i, de acuerdo a los resultados presentados en la sección previa.

Teniendo en cuenta la Proposición 3.1.1, la versión finita de la transformación de Darboux incluye los siguientes pasos.

Descripción matricial de la transformación de Darboux de orden n

1. Factorización LU sin pivote de $J(B,G)$.

$$J(B,G) = LU,$$

donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

2. Multiplicación de U por L.

$$\tilde{J} = UL$$

3. Supresión de la última fila y la última columna de $\tilde{J}$, lo cual da la matriz $(J_1)_{n-1}$.

Obsérvese que $(J_1)_{n-1}$ es una matriz mónica de Jacobi de orden $n-1$. En lo que sigue, $J(b,g) := (J_1)_{n-1}$, donde

$$J(b,g) = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & b_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

y

$$b = [b_1, ..., b_{n-1}]^T, \; g = [g_1, ..., g_{n-2}]^T.$$

El código de MATLAB que calcula la factorización LU sin pivote de $J(B,G)$ viene dado en el siguiente algoritmo:

Algoritmo 3.1.1 *Dada una matriz mónica de Jacobi $J(B,G) \in R^{n\times n}$, este algoritmo calcula la factorización LU sin pivote de $J(B,G)$.*

```
u(1)=B(1)
for i=1:n-1
   l(i)=G(i)/u(i)
   u(i+1)=B(i+1)-l(i)
end
```

Aunque el algoritmo previo no es nuestro principal objetivo y aparece implícitamente en el algoritmo que calcula la transformación de Darboux, por claridad, lo escribimos explícitamente dado que nos referiremos a él en algunas ocasiones.

El siguiente algoritmo calcula la transformada de Darboux de una matriz mónica de Jacobi $J(B,G)$ de orden n.

Algoritmo 3.1.2 *Dada una matriz mónica de Jacobi $J(B,G) \in R^{n\times n}$, este algoritmo calcula su transformada de Darboux de orden $n-1$, $J(b,g) \in R^{(n-1)\times(n-1)}$.*

```
u(1)=B(1)
for i=1:n-2
    l(i)=G(i)/u(i)
    b(i)=u(i)+l(i)
    u(i+1)=B(i+1)-l(i)
    g(i)=u(i+1)l(i)
end
l(n-1)=G(n-1)/u(n-1)
b(n-1)=u(n-1)+l(n-1)
```

El coste computacional del Algoritmo 3.1.2 es $4n-6$ flops.

3.1.3.1. Entradas, salidas y notación matricial

El Algoritmo 3.1.2, para calcular la submatriz principal de orden $n-1$ de la transformada de Darboux de $J(B,G)$, sólo necesita los vectores $B(1:n-1)$ y G, i.e, el elemento B_n no se necesita. Por tanto, el Algoritmo 3.1.2 tiene $2(n-1)$ parámetros de entrada

$$B' = [B_1, B_2, ..., B_{n-1}], \quad G = [G_1, G_2, ..., G_{n-1}],$$

y $2n-3$ parámetros de salida

$$b = [b_1, b_2, ..., b_{n-1}], \quad g = [g_1, g_2, ..., g_{n-2}].$$

También observamos que, para calcular $J(b,g)$, no necesitamos calcular la factorización LU de $J(B,G)$ completa. De hecho, basta con calcular $[u_1, u_2, ..., u_{n-1}]$ y $[l_1, l_2, ..., l_{n-1}]$. Como conclusión, puede decirse que la transformación de Darboux es una función de parámetros B' y G, y, por tanto, para estudiar el error backward o la teoría de perturbaciones relacionadas con la transformación de Darboux, sólo tenemos que considerar estos parámetros de entrada. Aunque esto es preciso desde un punto de vista matemático, pensamos que no es intuitivo. Por tanto, usaremos frecuentemente la descripción matricial del proceso de Darboux en el enunciado de los teoremas que aparecen en el análisis del error backward, y en la teoría de perturbaciones de la transformación de Darboux, como si los parámetros de entrada fueran B y G. Es claro, a partir de lo dicho anteriormente, que, en estos teoremas, B_n y u_n no juegan ningún papel.

3.1.3.2. Experimentos numéricos

Ahora mostramos unos pocos experimentos numéricos en los que aplicamos el Algoritmo 3.1.2 para calcular la tranformación de Darboux, a varias familias de polinomios ortogonales clásicos. Estos experimentos presentan un comportamiento típico que ilustra la necesidad del análisis de estabilidad estructurado que presentamos. En particular, consideramos los polinomios de Jacobi, Laguerre y Bessel. Recordemos que, tanto los polinomios de Laguerre como los de Bessel son familias uniparamétricas mientras que los polinomios de Jacobi forman una familia biparamétrica. Obsérvese que no consideramos la familia de polinomios de Hermite ya que está asociada a una medida simétrica y, por tanto, no existe la transformada de Darboux de la correspondiente matriz mónica de Jacobi (ver Sección 2.4). Las diferencias entre las tres familias objeto de esta sección están relacionadas con las medidas con respecto a las que son ortogonales, así como con las características de las correspondientes matrices de Jacobi (3.4).

1. Los polinomios de Jacobi son ortogonales con respecto a una medida positiva con soporte en $[-1, 1]$. La correspondiente matriz de Jacobi no es definida positiva.

2. Los polinomios de Laguerre son ortogonales con respecto a una medida positiva con soporte en $(0, \infty)$. La correspondiente matriz de Jacobi es definida positiva.

3. Los polinomios de Bessel son ortogonales con respecto a una medida con signo, por tanto, la matriz de Jacobi no existe.

Es importante resaltar que los polinomios de Bessel son los únicos entre las familias clásicas que son ortogonales con respecto a una medida con signo [23].

En los siguientes experimentos comparamos la salida del Algoritmo 3.1.2 en la aritmética de punto flotante de MATLAB 5.3 ($\mathbf{u} = 1{,}11 \times 10^{-16}$) con la salida calculada por MAPLE. Con más precisión, los valores exactos de las salidas b_i y g_i (ver (3.6)) son calculados con MAPLE, y entonces estas expresiones son redondeadas a 32 dígitos decimales de precisión.

En esta sección, $\hat{b} = [\hat{b}_1, ..., \hat{b}_{n-1}]$ y $\hat{g} = [\hat{g}_1, ..., \hat{g}_{n-2}]$ denotan las cantidades calculadas por MATLAB y $b = [b_1, ..., b_{n-1}]$, $g = [g_1, ..., g_{n-2}]$ denotan las cantidades calculadas con MAPLE. En las tablas que aparecen a continuación se muestran las siguientes magnitudes: los **errores forward en componentes** de b y g

$$forb = \max_{1 \le k \le n-1} \left\{ \left| \frac{b_k - \hat{b}_k}{b_k} \right| \right\}, \quad forg = \max_{1 \le k \le n-2} \left\{ \left| \frac{g_k - \hat{g}_k}{g_k} \right| \right\}, \tag{3.7}$$

y los **errores forward en norma** de b y g,

$$FORb = \frac{\|b - \hat{b}\|}{\|J(b, g)\|}, \quad FORg = \frac{\|g - \hat{g}\|}{\|J(b, g)\|}. \tag{3.8}$$

Observación 3.1.1 *En la definición previa usamos la norma del máximo tanto para vectores como para matrices, i.e.,*

$$\|v\| = \max_i \{|v(i)|\}, \ \textit{si } v \textit{ es un vector},$$

$$\|A\| = \max_{i,j} \{|A(i,j)|\}, \ \textit{si } A \textit{ es una matriz.}$$

En las siguientes tablas J denota la matriz mónica de Jacobi que es entrada del Algoritmo 3.1.2, mientras que L y U son los factores que se obtienen de la factorización LU de J. Incluimos los resultados obtenidos, además del número de condición espectral de las matrices involucradas en el proceso [1]. También incluimos $maxL := \max_i\{|l_i|\}$, donde l_i denota la entrada de L en la posición $(i+1, i)$.

1. Resultados para los polinomios de Laguerre con parámetro 1/10.

	n=10	n=50	n=100
forb	$1{,}5\ 10^{-16}$	$1{,}5\ 10^{-16}$	$1{,}56\ 10^{-16}$
forg	$2{,}11\ 10^{-16}$	$2{,}15\ 10^{-16}$	$2{,}25\ 10^{-16}$
FORb	$1{,}95\ 10^{-17}$	$5{,}79\ 10^{-18}$	$2{,}87\ 10^{-18}$
FORg	$1{,}56\ 10^{-16}$	$1{,}85\ 10^{-16}$	$1{,}83\ 10^{-16}$
maxL	10	50	100
$\kappa_2(J)$	$5{,}4\ 10^{7}$	$4{,}46\ 10^{64}$	$1{,}39\ 10^{158}$
$\kappa_2(L)$	$5{,}7\ 10^{7}$	$> 10^{64}$	$> 10^{158}$
$\kappa_2(U)$	11,9	53,84	106,29

2. Resultados para los polinomios de Jacobi con parámetros $1, -1/2$.

	n=10	n=50	n=100
forb	$1{,}84\ 10^{-16}$	$3{,}17\ 10^{-16}$	$4{,}74\ 10^{-16}$
forg	$7{,}16\ 10^{-16}$	$7{,}9\ 10^{-16}$	$1{,}27\ 10^{-15}$
FORb	$1{,}63\ 10^{-16}$	$3{,}11\ 10^{-16}$	$4{,}62\ 10^{-16}$
FORg	$6{,}51\ 10^{-16}$	$7{,}8\ 10^{-16}$	$1{,}23\ 10^{-15}$
maxL	1,15	1,19	1,2
$\kappa_2(J)$	$2{,}86\ 10^{3}$	$3{,}17\ 10^{15}$	$2{,}5\ 10^{30}$
$\kappa_2(L)$	3,91	4,36	4,4
$\kappa_2(U)$	$6{,}03\ 10^{3}$	$7{,}07\ 10^{15}$	$> 10^{30}$

[1] Los números de condición espectrales de las matrices J, L y U han sido calculados haciendo uso de la aritmética de precisión variable del Symbolic Math Toolbox de MATLAB.

3. Resultados para los polinomios de Bessel con parámetro 1/2.

	n=10	n=50	n=100
forb	$2{,}7\ 10^{-15}$	$2{,}02\ 10^{-14}$	$1{,}05\ 10^{-13}$
forg	$4{,}96\ 10^{-16}$	$1{,}23\ 10^{-15}$	$1{,}65\ 10^{-15}$
FORb	$1{,}11\ 10^{-16}$	$1{,}11\ 10^{-16}$	$1{,}11\ 10^{-16}$
FORg	$1{,}39\ 10^{-17}$	$1{,}39\ 10^{-17}$	$1{,}39\ 10^{-17}$
maxL	0,23	0,23	0,23
$\kappa_2(J)$	$1{,}52\ 10^{9}$	$6{,}44\ 10^{78}$	$1{,}56\ 10^{187}$
$\kappa_2(L)$	1,34	1,34	1,34
$\kappa_2(U)$	$1{,}59\ 10^{9}$	$6{,}7\ 10^{78}$	$1{,}58\ 10^{187}$

De los resultados previos surgen las siguientes observaciones. El cálculo numérico de los errores forward en norma muestra que el Algoritmo 3.1.2 aplicado a los ejemplos específicos considerados produce errores forward relativos $O(\mathbf{u})$. Esto ocurre también para los errores forward en componentes, salvo en el caso de los polinomios de Bessel, donde aparece una dependencia moderada de la dimensión del problema. Por otro lado, es bien sabido que la factorización LU sin pivote no es backward estable en general, especialmente cuando el factor de crecimiento es grande [44, Lemma 9.6]. Pero, incluso cuando el factor de crecimiento es pequeño, pueden aparecer errores forward grandes en los factores L, U, porque la cota usual del número de condición en norma de la factorización LU es (ver [44, Sección 9.11])

$$\chi(J) = \|L^{-1}\|_2 \|U^{-1}\|_2 \|J\|_2.$$

Esta cota $\chi(J)$ del número de condición de la factorización LU puede ser mejorada en una forma casi óptima [67] del modo siguiente $(\text{mín}_{\text{D diagonal}}\, \kappa_2(LD))\kappa_2(U)$ para el factor L y $\kappa_2(L)(\text{mín}_{\text{D diagonal}}\, \kappa_2(DU))$ para el factor U. Si consideramos los valores de $\kappa_2(L)$ y $\kappa_2(U)$ que aparecen en los tres ejemplos anteriores, se observa que en todos ellos, uno de los factores L o U está mal condicionado y, por tanto, deberían esperarse errores forward grandes en el factor correspondiente. Más aún, en dos de los ejemplos (Laguerre y Jacobi), dado que no todas las entradas l_i de la matriz L son, en valor absoluto, menores que uno, es necesario pivotar para asegurar la backward estabilidad de la factorización LU. Finalmente, el segundo paso del algoritmo (multiplicación UL) tampoco es backward estable.

Estos hechos nos llevan a esperar, de forma natural, errores forward grandes en los experimentos realizados con los polinomios de Laguerre, Jacobi y Bessel. Sin embargo, ése no es el caso. Por tanto, nuestro objetivo es desarrollar un análisis estructurado de estabilidad que explique éstos y otros ejemplos. Es importante resaltar que, aunque en los tres ejemplos específicos tratados en esta sección y en muchos otros, los errores forward de la transformación de Darboux son de orden la precisión del ordenador, esto no siempre es así. Por ejemplo, en la Sección 9 presentamos algunos ejemplos para los que la transformación de Darboux aplicada a los polinomios de Bessel es calculada con errores forward muy grandes. Por tanto, es necesario desarrollar cotas fiables que permitan conocer la magnitud del error forward.

Las observaciones previas muestran que el análisis de estabilidad del Algoritmo 3.1.2 no es trivial, siendo una de las principales razones el que la estructura del problema matemático no permite las estrategias de pivotaje.

3.1.4. Análisis del error backward

En esta sección suponemos que los elementos de la matriz mónica de Jacobi $J(B, G)$ son números reales en punto flotante. Esta suposición puede parecer no aceptable para los problemas que estamos tratando. Consideremos, por ejemplo, los tres ejemplos analizados en la sección previa. En esos ejemplos, los elementos de $J(B, G)$ se calculan usando las bien conocidas expresiones para las familias clásicas de polinomios ortogonales (ver Sec. 1.3). Por tanto, necesariamente aparecen errores de redondeo en los parámetros de entrada B y G del Algoritmo 3.1.2. Si estos errores en las entradas cambian significativamente el valor exacto de la transformación de Darboux, entonces puede ocurrir que los errores producidos específicamente por el Algoritmo 3.1.2 no expliquen los errores forward obtenidos. Sin embargo, como demostraremos en la Sección 3.1.5 (ver Observación 3.1.7), los errores forward que surgen de pequeñas perturbaciones relativas en componentes de B y G, son de magnitudes semejantes a los errores forward que surgen del Algoritmo 3.1.2 aplicado a números en punto flotante. Así, nuestra suposición acerca de que las entradas son números en punto flotante puede hacerse sin afectar a la aplicabilidad de nuestro análisis, pero simplifica en cierta medida los desarrollos siguientes.

En el análisis de la estabilidad, usamos el modelo estándar de aritmética en punto flotante:

$$fl(x \text{ op } y) = (x \text{ op } y)(1+\delta) = \frac{x \text{ op } y}{1+\eta}, \quad |\delta|, |\eta| \leq \mathbf{u},$$

donde x e y son números en punto flotante, op $= +, -, *, /$ y $\mathbf{u}$ es la unidad de redondeo del ordenador. Más aún,

$$fl(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(1+\delta) = \frac{\sqrt{x}}{1+\eta}, \quad |\delta|, |\eta| \leq \mathbf{u}.$$

Por otro lado, el valor absoluto de una matriz A o de un vector v se denotan por $|A|$ y $|v|$, respectivamente.

Comenzamos dando un resultado de estabilidad para la factorización LU sin pivote de matrices mónicas de Jacobi. Aunque en [44] aparecen resultados más generales para matrices tridiagonales, el siguiente teorema mejora ligeramente esos resultados teniendo en cuenta que los elementos en la superdiagonal (es decir, los elementos en las posiciones $(i, i+1)$) son unos.

Teorema 3.1.2 *Si el Algoritmo 3.1.1 se aplica a la matriz mónica de Jacobi de orden n $J(B,G)$, los factores calculados $\hat{L}$, $\hat{U}$ verifican*

$$J(B+\Delta B, G+\Delta G) = \hat{L}\hat{U}, \quad |\Delta B| \leq \mathbf{u}|diag(\hat{U})|, \quad |\Delta G| \leq \mathbf{u}|G|.$$

Demostración.
Para las cantidades calculadas, tenemos

$$\hat{l}_i = \frac{G_i}{\hat{u}_i}(1+\delta_i), \quad |\delta_i| \leq \mathbf{u}.$$

Por tanto, $|G_i - \hat{u}_i\hat{l}_i| \leq |G_i|\mathbf{u}$, lo que prueba el teorema para las entradas en la subdiagonal, G. Por otro lado,

$$\hat{u}_i(1+\epsilon_i) = B_i - \hat{l}_{i-1}, \quad |\epsilon_i| \leq \mathbf{u}.$$

Entonces, $|B_i - \hat{u}_i - \hat{l}_{i-1}| \leq |\hat{u}_i|\mathbf{u}$, lo cual prueba el teorema. □

A continuación consideramos el segundo paso de la transformación de Darboux, i.e., la multiplicación de U por L. La demostración del siguiente teorema es inmediata.

Teorema 3.1.3 *Sean U y L matrices como las que aparecen en (3.5). Sea $J(b,g) = UL$ el producto exacto de U por L, donde estamos usando la notación de la Sección 3.1.3. Sea $J(\hat{b},\hat{g})$ el producto de U por L calculado, entonces*

$$|b-\hat{b}| \leq \mathbf{u}|\hat{b}|, \quad y \quad |g-\hat{g}| \leq \mathbf{u}|\hat{g}|,$$

lo que, en notación matricial, implica:

$$J(\hat{b}+\Delta\hat{b}, \hat{g}+\Delta\hat{g}) = UL, \quad con \quad |\Delta\hat{b}| \leq \mathbf{u}|\hat{b}| \quad y \quad |\Delta\hat{g}| \leq \mathbf{u}|\hat{g}|.$$

A continuación damos el resultado de estabilidad para la transformación de Darboux.

Teorema 3.1.4 *Dada una matriz mónica de Jacobi de orden n, $J(B,G)$, sea $J(b,g)$ su transformada de Darboux de orden $n-1$. Si $J(\hat{b},\hat{g})$, $\hat{L}$ y $\hat{U}$ son las matrices obtenidas mediante el Algoritmo 3.1.2, entonces*

$$J(B+\Delta B, G+\Delta G) = \hat{L}\hat{U}, \quad |\Delta B| \leq \mathbf{u}|diag(\hat{U})|, \quad |\Delta G| \leq \mathbf{u}|G|,$$
$$J(\hat{b}+\Delta\hat{b}, \hat{g}+\Delta\hat{g}) = (\hat{U}\hat{L})_{n-1}, \quad |\Delta\hat{b}| \leq \mathbf{u}|\hat{b}|, \ |\Delta\hat{g}| \leq \mathbf{u}|\hat{g}|.$$

Demostración. Es suficiente considerar los Teoremas 3.1.2 y 3.1.3. □

Obsérvese que el Teorema 3.1.4 afirma que la transformada de Darboux calculada $J(\hat{b},\hat{g})$ es casi la transformada de Darboux exacta de $J(B+\Delta B, G+\Delta G)$. Por tanto, concluímos que el Algoritmo 3.1.2 será *estable en componentes en el sentido mixto forward-backward* [44, p. 7] si $|\hat{u}_i| = O(|B_i|)$, $1 \leq i \leq n$.

En el caso particular en que la matriz mónica de Jacobi $J(B,G)$ está asociada a una medida positiva con soporte en $(0,\infty)$, el Algoritmo 3.1.2 es estable en componentes. El siguiente lema prueba esta afirmación.

Lema 3.1.1 *Sea $J(B,G)$ una matriz mónica de Jacobi de orden n asociada a una medida positiva con soporte en $(0,\infty)$. Entonces, la factorización LU de $J(B,G)$ es backward estable en componentes.*

Demostración. Dado que $J(B,G)$ está asociada a una medida positiva, $G_i > 0$, $i = 1 : n-1$. Entonces, existe una matriz diagonal D tal que $J_s(B,\sqrt{G}) = D\ J(B,G)\ D^{-1}$. Más aún, $J_s(B,G)$ es definida positiva porque la medida tiene su soporte en $(0,\infty)$. Si $J(B,G) = LU$ denota la factorización LU única de $J(B,G)$, tomando en cuenta que

$$J_s(B,\sqrt{G}) = (DLD^{-1})diag(U)(DLD^{-1})^T,$$

tenemos que $u_i > 0$ y, en consecuencia, $l_i > 0$, para todo $i \geq 1$. Por tanto, dado que $B_i = u_i + l_{i-1}$,

$$u_i \leq B_i.$$

□

Observación 3.1.2 *Los polinomios de Laguerre son ortogonales con respecto a una medida positiva con soporte en $(0,\infty)$, pero no ocurre así con los polinomios de Jacobi y de Bessel. A continuación mostramos que la factorización LU de la matriz mónica de Jacobi asociada a* ***los polinomios de Jacobi*** *de parámetros $1, -1/2$ no es backward estable en componentes. Por el Teorema 3.1.2,*

$$\frac{|\Delta B_i|}{|B_i|} \leq \mathbf{u}\frac{|\hat{u}_i|}{|B_i|}, \quad \frac{|\Delta G_i|}{|G_i|} \leq \mathbf{u}.$$

*Entonces, si "*errback*" denota* $\max_{i=1:n}\{1, \frac{|\hat{u}_i|}{|B_i|}\}$, *para los polinomios de Jacobi de parámetros 1, $-1/2$, es decir, los considerados en la sección previa, obtenemos*

	n=10	*n=50*	*n=100*	*n=400*	*n=1000*
errback	7,07 10^2	1,64 10^4	6,5 10^4	1,03 10^6	6,44 10^6

Los resultados previos demuestran que la transformación de Darboux no es estable en componentes para los polinomios de Jacobi. Sin embargo, los errores forward obtenidos para los parámetros $1, -1/2$ son de orden $\mathbf{u}$ *(ver tabla en la Subsección 3.1.3.2). Por tanto, para explicar estos errores es necesario encontrar el número de condición en componentes con respecto al tipo de perturbaciones que surgen en el análisis del error backward.*

3.1.5. Condicionamiento

A partir de ahora analizamos la sensibilidad de la transformación de Darboux a las perturbaciones de los datos iniciales, i.e., la matriz mónica de Jacobi $J(B,G)$. Consideramos dos tipos de perturbaciones:

- Perturbaciones asociadas al error backward encontrado en el Teorema 3.1.4.
- Perturbaciones relativas en componentes en B y G, i.e., $|\Delta B| \leq \epsilon |B|$ y $|\Delta G| \leq \epsilon |G|$, con ϵ pequeño.

En ambos casos, la superdiagonal de unos permanece invariante.

Medimos la sensibilidad del problema mediante el concepto de número de condición relativo en componentes. De hecho, dado que consideramos dos tipos diferentes de perturbaciones, definimos dos números de condición diferentes.

Definición 3.1.5 *Sea $J(b, g)$ la transformada de Darboux de orden $(n-1)$ de una matriz mónica de Jacobi de orden n, $J(B, G)$, y sea $J(b + \Delta b, g + \Delta g)$ la transformada de Darboux de orden $(n-1)$ de la matriz mónica de Jacobi de orden n, $J(B+\Delta B, G+\Delta G)$. Sea $J(B, G) = LU$ la factorización LU única de $J(B, G)$. El número de condición relativo en componentes de la transformación de Darboux de la matriz mónica de Jacobi $J(B, G)$ con respecto a las perturbaciones asociadas al error backward se define como sigue*

$$cond_B(J(B,G)) := \lim_{\epsilon \to 0} \sup \left\{ \max_k \left\{ \left| \frac{\Delta b_k}{\epsilon b_k} \right|, \left| \frac{\Delta g_k}{\epsilon g_k} \right| \right\} : \ |\Delta B| \leq \epsilon |diag(U)|, \ |\Delta G| \leq \epsilon |G| \right\}.$$

Definición 3.1.6 *Sea $J(b, g)$ la transformada de Darboux de orden $(n-1)$ de una matriz mónica de Jacobi de orden n, $J(B, G)$, y sea $J(b + \Delta b, g + \Delta g)$ la transformada de Darboux de orden $(n-1)$ de la matriz mónica de Jacobi de orden n, $J(B + \Delta B, G + \Delta G)$. El número de condición relativo en componentes de la transformación de Darboux de la matriz mónica de Jacobi $J(B, G)$ con respecto a perturbaciones en componentes se define del modo siguiente*

$$cond_C(J(B,G)) := \lim_{\epsilon \to 0} \sup \left\{ \max_k \left\{ \left| \frac{\Delta b_k}{\epsilon b_k} \right|, \left| \frac{\Delta g_k}{\epsilon g_k} \right| \right\} : \ |\Delta B| \leq \epsilon |B|, \ |\Delta G| \leq \epsilon |G| \right\},$$

donde todo cociente $x/0$ es considerado cero si $x = 0$ e infinito en cualquier otro caso.

En los números de condición dados en las dos definiciones previas, la B en $cond_B$ significa "error absoluto" y la C en $cond_C$ viene de "componentes".

Observación 3.1.3 *En las dos definiciones previas* $\max_k \left\{ \left| \frac{\Delta b_k}{\epsilon b_k} \right|, \left| \frac{\Delta g_k}{\epsilon g_k} \right| \right\}$ *denota*

$$\max \left\{ \left| \frac{\Delta b_1}{\epsilon b_1} \right|, \ldots, \left| \frac{\Delta b_{n-1}}{\epsilon b_{n-1}} \right|, \left| \frac{\Delta g_1}{\epsilon g_1} \right|, \ldots, \left| \frac{\Delta g_{n-2}}{\epsilon g_{n-2}} \right| \right\}.$$

Es bien conocido que los errores forward producidos por un algoritmo pueden ser acotados por el producto del error backward y por el número de condición. Teniendo en cuenta la Definición 3.1.5 y el Teorema 3.1.4, es fácil conseguir la siguiente cota del error forward producido por el algoritmo que implementa la transformación de Darboux.

Lema 3.1.2 *Sea $J(b, g)$ la transformada de Darboux exacta de $J(B, G)$ y sea $J(\hat{b}, \hat{g})$ su transformada de Darboux calculada a partir del Algoritmo 3.1.2, entonces*

$$\max_k \left\{ \left| \frac{b_k - \hat{b}_k}{b_k} \right|, \left| \frac{g_k - \hat{g}_k}{g_k} \right| \right\} \leq \mathbf{u}(1 + cond_B(J(B, G))) + O(\mathbf{u}^2).$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Definición de número de condición y el Teorema 3.1.4,

$$\left| \frac{\hat{b} - b}{b} \right| - \left| \frac{\Delta \hat{b}}{b} \right| \leq \left| \frac{\hat{b} + \Delta \hat{b} - b}{b} \right| \leq \mathbf{u} \; cond_B(J(B, G)).$$

Entonces,

$$\left| \frac{\hat{b} - b}{b} \right| \leq \mathbf{u} \; cond_B(J(B, G)) + \left| \frac{\Delta \hat{b}}{b} \right| \leq \mathbf{u} \; cond_B(J(B, G)) + \mathbf{u} \left| \frac{\hat{b}}{b} \right|.$$

Teniendo en cuenta que $\left| \frac{\hat{b}}{b} \right| = \left| \frac{\hat{b} - b + b}{b} \right|$,

$$\left| \frac{\hat{b} - b}{b} \right| \leq \mathbf{u} \; \left[cond_B(J(B, G)) + \left| \frac{\hat{b} - b}{b} \right| + 1 \right].$$

Por tanto,

$$\left| \frac{\hat{b} - b}{b} \right| (1 - \mathbf{u}) \leq \mathbf{u} \; \left[cond_B(J(B, G)) + 1 \right].$$

Un razonamiento semejante es válido para el vector g y el resultado se obtiene de forma inmediata. □

Nótese que es necesario sumar 1 a $cond_B(J(B, G))$ ya que el Teorema 3.1.4 es un resultado de error mixto forward-backward.

En la próxima subsección damos algunos resultados auxiliares que son necesarios para encontrar expresiones explícitas de cotas confiables de los números de condición dados en las Definiciones 3.1.5 y 3.1.6. En la Subsección 3.1.5.2 obtenemos esas expresiones así como una relación entre ambas cotas que, esencialmente, demuestra que $cond_C(J(B, G))$ y $cond_B(J(B, G))$ tienen magnitudes semejantes.

3.1.5.1. Resultados auxiliares

Esta sección contiene algunos lemas que son necesarios para demostrar los resultados más importantes de este capítulo.

Sean $J(B,G)$ y $J(B+\Delta B, G+\Delta G)$ matrices mónicas de Jacobi tales que existe su factorización LU sin pivote y sea

$$J(B,G) = LU,$$

$$J(B+\Delta B, G+\Delta G) = (L+\Delta L)(U+\Delta U).$$

Además, las correspondientes transformadas de Darboux se denotan por $J(b,g)$ y $J(b+\Delta b, g+\Delta g)$.

Teniendo en cuenta el Algoritmo 3.1.1 y la Subsección 3.1.3.1, debe recordarse que, para la matriz perturbada,

$$u_1 + \Delta u_1 = B_1 + \Delta B_1, \tag{3.9}$$

$$l_k + \Delta l_k = \frac{G_k + \Delta G_k}{u_k + \Delta u_k}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \tag{3.10}$$

$$u_{k+1} + \Delta u_{k+1} = B_{k+1} + \Delta B_{k+1} - l_k - \Delta l_k, \quad 1 \leq k \leq n-2. \tag{3.11}$$

Más aún, teniendo en cuenta el Algoritmo 3.1.2,

$$b_k + \Delta b_k = u_k + \Delta u_k + l_k + \Delta l_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \tag{3.12}$$

$$g_k + \Delta g_k = (u_{k+1} + \Delta u_{k+1})(l_k + \Delta l_k), \quad 1 \leq k \leq n-2. \tag{3.13}$$

Nuestro primer objetivo es encontrar expresiones para los elementos Δu_k y Δl_k en términos de los elementos de ΔB y ΔG. Los dos lemas siguientes son ejemplos particulares de lemas equivalentes dados en [11]. Las demostraciones de ambos resultados son triviales. En el resto de la sección no consideramos los términos de segundo orden en ϵ ya que los números de condición $cond_B(J(B,G))$ y $cond_C(J(B,G))$ están definidos en el límite cuando $\epsilon \to 0$.

Observación 3.1.4 *En lo que sigue, suponemos que todo término que contenga u_0, l_0, G_0 ó B_0 es cero. Más aún, $\Delta u_0 = \Delta l_0 = \Delta B_0 = \Delta G_0 = 0$.*

Lema 3.1.3 *El siguiente resultado es correcto a primer orden*

$$\Delta l_k = l_k \left(\frac{\Delta G_k}{G_k} - \frac{\Delta u_k}{u_k} \right), \quad 1 \leq k \leq n-1, \tag{3.14}$$

$$\Delta u_k = \Delta B_k - \Delta l_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \tag{3.15}$$

Demostración.

$$\Delta l_k = \frac{G_k + \Delta G_k}{u_k + \Delta u_k} - l_k.$$

Entonces, a primer orden,

$$\Delta l_k = \frac{G_k}{u_k}(1 + \frac{\Delta G_k}{G_k} - \frac{\Delta u_k}{u_k}) - \frac{G_k}{u_k}.$$

Para probar (3.15) basta considerar que $u_k = B_k - l_{k-1}$. $\square$

Lema 3.1.4 *La siguiente relación de recurrencia se obtiene a primer orden:*

$$\Delta u_k = \Delta B_k - \frac{\Delta G_{k-1}}{u_{k-1}} + \frac{l_{k-1}}{u_{k-1}}\Delta u_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Demostración. El resultado se obtiene inmediatamente cuando (3.14) es sustituído en (3.15). $\square$

En el siguiente lema se obtiene una expresión explícita para Δu_k a partir de la relación de recurrencia dada en el lema previo.

Lema 3.1.5 *La siguiente expresión se obtiene a primer orden*

$$\Delta u_k = \Delta B_k - \frac{\Delta G_{k-1}}{u_{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\Delta B_i - \frac{\Delta G_{i-1}}{u_{i-1}} \right) \prod_{j=i}^{k-1} \frac{l_j}{u_j}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Demostración. El resultado previo se obtiene aplicando inducción a la expresión que aparece en el Lema 3.1.4. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es encontrar expresiones para los elementos Δb_k y Δg_k en términos de Δu_k.

Lema 3.1.6 *Las siguientes ecuaciones son válidas a primer orden.*

$$\Delta b_k = \Delta u_k + \Delta l_k, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$\Delta g_k = l_k \Delta u_{k+1} + u_{k+1}\Delta l_k, \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

Demostración. A partir de (3.12), se obtiene el primer resultado de forma inmediata. Por otro lado, tomando en cuenta (3.13), se obtiene el segundo resultado a primer orden.

$\square$

A partir del Lema 3.1.6 es posible obtener una expresión para $\frac{\Delta b_k}{b_k}$ y $\frac{\Delta g_k}{g_k}$ en términos de $\frac{\Delta u_k}{u_k}$. En lo que sigue, para todo número a

$$\delta a := \frac{\Delta a}{a}.$$

Lema 3.1.7

$$\delta b_k = \frac{l_k}{u_k + l_k}\delta G_k + \frac{u_k - l_k}{u_k + l_k}\delta u_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \tag{3.16}$$

$$\delta g_k = \left(1 + \frac{l_k}{u_{k+1}}\right)\delta B_{k+1} + \left(1 - \frac{l_k}{u_{k+1}}\right)(\delta G_k - \delta u_k), \quad 1 \leq k \leq n-2. \tag{3.17}$$

Demostración. A partir del Lema 3.1.6 y considerando que $b_k = u_k + l_k$,

$$\delta b_k = \frac{u_k}{u_k + l_k}\delta u_k + \frac{l_k}{u_k + l_k}\delta l_k. \tag{3.18}$$

Entonces, teniendo presente la expresión para Δl_k en términos de Δu_k dada en el Lema 3.1.3

$$\delta b_k = \frac{u_k}{u_k + l_k}\delta u_k + \frac{l_k}{u_k + l_k}(\delta G_k - \delta u_k),$$

y (3.16) se obtiene de forma inmediata.

De nuevo a partir del Lema 3.1.6, y teniendo en cuenta que $g_k = l_k u_{k+1}$, obtenemos

$$\delta g_k = \delta u_{k+1} + \delta l_k = \delta u_{k+1} + \delta G_k - \delta u_k. \tag{3.19}$$

Entonces, por el Lema 3.1.4, es posible expresar δg_k sólo en términos de δu_k,

$$\delta g_k = \delta G_k + \left(1 + \frac{l_k}{u_{k+1}}\right)\delta B_{k+1} - \frac{l_k}{u_{k+1}}(\delta G_k - \delta u_k) - \delta u_k,$$

y se llega al resultado buscado. □

Con el objetivo de encontrar una expresión explícita para $cond_B(J(B,G))$ y $cond_C(J(B,G))$, es necesario encontrar una cota de $|\delta b_k|$ y $|\delta g_k|$. Primero consideraremos el tipo de perturbaciones asociadas al error backward, que aparece en la definición de $cond_B(J(B,G))$.

Lema 3.1.8 *Si se verifica que* $|\Delta B_k| \leq \epsilon |u_k|$, $|\Delta G_k| \leq \epsilon |G_k|$ *para* $1 \leq k \leq n-1$, *entonces, a primer orden*

$$|\delta u_k| \leq \epsilon \left[1 + \left|\frac{l_{k-1}}{u_k}\right| + \sum_{i=1}^{k-1}\left(1 + \left|\frac{l_{i-1}}{u_i}\right|\right)\prod_{j=i}^{k-1}\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right|\right]. \tag{3.20}$$

O, equivalentemente,

$$|\delta u_k| \leq \epsilon \left[1 + 2\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-1}\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right|\right]. \tag{3.21}$$

DEMOSTRACIÓN. A partir del Lema 3.1.5, obtenemos

$$\frac{\Delta u_k}{u_k} = \frac{\Delta B_k}{u_k} - \frac{\Delta G_{k-1}}{u_k u_{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\Delta B_i}{u_i} - \frac{\Delta G_{i-1}}{u_i u_{i-1}} \right) \prod_{j=i}^{k-1} \frac{l_j}{u_{j+1}},$$

lo cual implica (3.20). Algunos cálculos complementarios nos llevan al segundo resultado. □

Definición 3.1.7 *Para* $1 \leq k \leq n-1$,

$$cond_B(u_k) := 1 + \left| \frac{l_{k-1}}{u_k} \right| + \sum_{i=1}^{k-1} \left(1 + \left| \frac{l_{i-1}}{u_i} \right| \right) \prod_{j=i}^{k-1} \left| \frac{l_j}{u_{j+1}} \right| = 1 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-1} \left| \frac{l_j}{u_{j+1}} \right|.$$

Es decir, $cond_B(u_k)$ *denota la cota de* $|\delta u_k|$ *dividida por* ϵ.

Ahora obtenemos una cota de δb_k y δg_k teniendo en cuenta las perturbaciones asociadas al error backward dado en el Teorema 3.1.4.

Lema 3.1.9 *Si se verifica que* $|\Delta B_k| \leq \epsilon |u_k|$, $|\Delta G_k| \leq \epsilon |G_k|$ *para* $1 \leq k \leq n-1$, *entonces, a primer orden,*

$$|\delta b_k| \leq \epsilon \left\{ \left| \frac{l_k}{u_k + l_k} \right| + \left| \frac{u_k - l_k}{u_k + l_k} \right| cond_B(u_k) \right\}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$|\delta g_k| \leq \epsilon \left\{ 1 + \left| 1 - \frac{l_k}{u_{k+1}} \right| (1 + cond_B(u_k)) \right\}, \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

DEMOSTRACIÓN. Los resultados se obtienen fácilmente a partir de la Definición 3.1.7 y del Lema 3.1.7.

□

Observación 3.1.5 *Por simplicidad, denotamos mediante* $cond_B(b_k)$ *y* $cond_B(g_k)$ *las cotas de* $|\delta b_k|$ *y* $|\delta g_k|$ *divididas por* ϵ, *i.e.,*

$$cond_B(b_k) := \left| \frac{l_k}{u_k + l_k} \right| + \left| \frac{u_k - l_k}{u_k + l_k} \right| cond_B(u_k), \tag{3.22}$$

$$cond_B(g_k) := 1 + \left| 1 - \frac{l_k}{u_{k+1}} \right| (1 + cond_B(u_k)). \tag{3.23}$$

Ahora consideramos perturbaciones en componentes como en la Definición 3.1.6 y obtenemos enunciados similares a los Lemas 3.1.8 y 3.1.9.

Definición 3.1.8 *Para* $1 \leq k \leq n-1$,

$$cond_C(u_k) := \left|1 + \frac{l_{k-1}}{u_k}\right| + \left|\frac{l_{k-1}}{u_k}\right| + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\left|1 + \frac{l_{i-1}}{u_i}\right| + \left|\frac{l_{i-1}}{u_i}\right|\right)\prod_{j=i}^{k-1}\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right|.$$

Lema 3.1.10 *Si se cumple que* $|\Delta B_k| \leq \epsilon |B_k|$, $|\Delta G_k| \leq \epsilon |G_k|$ *para* $1 \leq k \leq n-1$ *entonces, a primer orden,*

$$|\delta u_k| \leq \epsilon \; cond_C(u_k).$$

Demostración. La demostración es semejante a la demostración del Lema 3.1.8. □

Lema 3.1.11 *Si se verifica que* $|\Delta B_k| \leq \epsilon |B_k|$, $|\Delta G_k| \leq \epsilon |G_k|$ *para* $1 \leq k \leq n-1$, *entonces, a primer orden,*

$$|\delta b_k| \leq \epsilon \left\{ \left|\frac{l_k}{u_k + l_k}\right| + \left|\frac{u_k - l_k}{u_k + l_k}\right| cond_C(u_k) \right\},$$

$$|\delta g_k| \leq \epsilon \left\{ \left|1 + \frac{l_k}{u_{k+1}}\right| + \left|1 - \frac{l_k}{u_{k+1}}\right| [1 + cond_C(u_k)] \right\}.$$

Demostración. La demostración es semejante a la demostración del Lema 3.1.9. □

Observación 3.1.6 *Considerando las cotas obtenidas en el lema anterior, denotamos por* $cond_C(b_k)$ *y* $cond_C(g_k)$ *las cotas de* $|\delta b_k|$ *y* $|\delta g_k|$, *correspondientes a las perturbaciones en componentes, divididas por* ϵ, *es decir,*

$$cond_C(b_k) := \left|\frac{l_k}{u_k + l_k}\right| + \left|\frac{u_k - l_k}{u_k + l_k}\right| cond_C(u_k), \tag{3.24}$$

$$cond_C(g_k) := \left|1 + \frac{l_k}{u_{k+1}}\right| + \left|1 - \frac{l_k}{u_{k+1}}\right| [1 + cond_C(u_k)]. \tag{3.25}$$

3.1.5.2. Números de condición y relación entre sus magnitudes

En esta subsección, damos expresiones explícitas de cotas confiables de los números de condición $cond_B(J(B,G))$ y $cond_C(J(B,G))$, probamos que ambas cotas tienen magnitudes semejantes y, finalmente, también mostramos cómo calcular las cotas de los números de condición con coste $O(n)$ flops. Del hecho de que ambas cotas de los números de condición tengan magnitudes semejantes, también se deduce la estabilidad forward del Algoritmo 3.1.2.

Teniendo en cuenta las Definiciones 3.1.5 y 3.1.6, así como los resultados de la Subsección 3.1.5.1, dada una matriz mónica de Jacobi $J(B,G)$,

$$cond_B(J(B,G)) \leq \max\{cond_B(b_{n-1}), \max_{1 \leq k \leq n-2}\{cond_B(b_k), cond_B(g_k)\}\}, \tag{3.26}$$

$$cond_C(J(B,G)) \leq \max\{cond_C(b_{n-1}), \max_{1\leq k\leq n-2}\{cond_C(b_k), cond_C(g_k)\}\}, \quad (3.27)$$

donde $cond_B(b_k)$ y $cond_B(g_k)$ han sido definidos en (3.22) y (3.23), respectivamente, así como $cond_C(b_k)$ y $cond_C(g_k)$ han sido definidos en (3.24) y (3.25), respectivamente.

No hemos podido probar que las desigualdades que aparecen en (3.26) y (3.27) sean igualdades, i.e., que existan perturbaciones que cumplan las condiciones de las Definiciones 3.1.5 y 3.1.6 para las que las desigualdades en los Lemas 3.1.9 y 3.1.11 sean igualdades. Por tanto, no hemos encontrado expresiones para los verdaderos números de condición de la transformación de Darboux, $cond_B(J(B,G))$ y $cond_C(J(B,G))$. Las cotas que aparecen en (3.26) y (3.27) las denotamos por

$$bcond_B(J(B,G)) := \max\{cond_B(b_{n-1}), \max_{1\leq k\leq n-2}\{cond_B(b_k), cond_B(g_k)\}\} \quad (3.28)$$

$$bcond_C(J(B,G)) := \max\{cond_C(b_{n-1}), \max_{1\leq k\leq n-2}\{cond_C(b_k), cond_C(g_k)\}\} \quad (3.29)$$

Los experimentos numéricos que aparecen en la Sección 3.1.9 demuestran que la cota $bcond_B(J(B,G))$ es una buena aproximación de $cond_B(J(B,G))$ y que refleja realmente la sensibilidad del problema. Por tanto, es justo pensar en $bcond_B(J(B,G))$ y $bcond_C(J(B,G))$ como números de condición. También queremos señalar que, en algunos casos en que los signos de u_k y l_k guardan ciertas relaciones especiales, es fácil ver que $cond_B(J(B,G)) = bcond_B(J(B,G))$ y $cond_C(J(B,G)) = bcond_C(J(B,G))$. Finalmente, es interesante señalar que en la Sección 3.2 se dan expresiones explícitas de los números de condición para la factorización LU sin pivote de matrices tridiagonales generales.

El siguiente lema nos permitirá probar que $bcond_B(J(B,G))$ y $bcond_C(J(B,G))$ tienen magnitudes semejantes.

Lema 3.1.12

$$\frac{1}{2}cond_C(b_k) \leq cond_B(b_k) \leq 2\, cond_C(b_k), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$\frac{1}{2}cond_C(g_k) \leq cond_B(g_k) \leq 2\, cond_C(g_k), \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

Demostración. A fin de probar que $cond_C(b_k) \leq 2\, cond_B(b_k)$, basta aplicar la desigualdad triangular a $cond_C(b_k)$. Por otro lado, para todo número real a, $|1+a| \geq 1-|a|$. Apliquemos esta desigualdad a $cond_C(b_k)$ para probar que $cond_B(b_k) \leq 2\, cond_C(b_k)$.

Una expresión alternativa para $cond_B(g_k)$ es

$$cond_B(g_k) = 1 + \left|1 - \frac{l_k}{u_{k+1}}\right| + \left|1 - \frac{l_k}{u_{k+1}}\right| cond_B(u_k). \quad (3.30)$$

Observemos que, para todo número real a, $|1+a| \leq 2+|1-a|$. Al aplicar este resultado así como la desigualdad triangular a $cond_C(g_k)$, se prueba que $cond_C(g_k) \leq 2\, cond_B(g_k)$. Compárese la cota de $cond_C(g_k)$ con (3.30).

También podemos obtener la siguiente expresión alternativa para $cond_C(g_k)$

$$cond_C(g_k) = \left|1+\frac{l_k}{u_{k+1}}\right| + \left|1-\frac{l_k}{u_{k+1}}\right| + \left|1-\frac{l_k}{u_{k+1}}\right| cond_C(u_k). \tag{3.31}$$

Entonces, teniendo en consideración (3.31) y que, para todo número real a, $|1+a|+|1-a| \geq 2$ y $|1+a| \geq 1-|a|$, es fácil probar que $2\, cond_C(g_k) \geq cond_B(g_k)$. □

Como una consecuencia del lema previo, obtenemos el siguiente teorema que es uno de los más importantes en este capítulo.

Teorema 3.1.5 *Dada una matriz mónica de Jacobi $J(B,G)$,*

$$\frac{1}{2} bcond_C(J(B,G)) \leq bcond_B(J(B,G)) \leq 2\, bcond_C(J(B,G)).$$

Observación 3.1.7 *Como ya hemos señalado, los experimentos numéricos de la Sección 3.1.9 demuestran que las cotas $bcond_B(J(B,G))$ y $bcond_C(J(B,G))$ realmente reflejan la sensibilidad de la transformación de Darboux. Por tanto, a partir del Teorema 3.1.5, podemos deducir la estabilidad forward del Algoritmo 3.1.2 para calcular la transformada de Darboux de una matriz mónica de Jacobi $J(B,G)$. Por el Lema 3.1.2*

$$\max_k \left\{ \left|\frac{b_k-\hat{b}_k}{b_k}\right|, \left|\frac{g_k-\hat{g}_k}{g_k}\right| \right\} \leq \mathbf{u}\, [bcond_B(J(B,G))+1] + O(\mathbf{u}^2) \leq$$

$$\leq \mathbf{u}\, [2\, bcond_C(J(B,G))+1] + O(\mathbf{u}^2).$$

El significado de la desigualdad anterior es que los errores forward en componentes producidos por el Algoritmo 3.1.2 son de magnitudes semejantes a los producidos por un algoritmo backward estable en componentes. De acuerdo con la definición que aparece en [44, p.9], esto significa que el Algoritmo 3.1.2 es forward estable. Así, los errores forward del Algoritmo 3.1.2 son los "mejores que cabría esperar" teniendo en cuenta la sensibilidad del problema.

Más aún, el Teorema 3.1.5 garantiza que el análisis de estabilidad que hemos desarrollado sigue siendo válido cuando las entradas del Algoritmo 3.1.2, B y G, no son números en coma flotante (recuérdense los comentarios en el primer párrafo de la Sección 3.1.4) sino que son calculadas con errores en componentes de orden $\mathbf{u}$. En este caso, los errores forward relativos en componentes obtenidos en el cálculo de la transformación de Darboux son, teniendo en cuenta los términos a primer orden en $\mathbf{u}$, la suma de dos términos: $\mathbf{u}\, bcond_C(J(B,G))$ que viene de los errores en B y G, más $\mathbf{u}\,(1+bcond_B(J(B,G)))$, que viene de los errores *producidos por el Algoritmo 3.1.2. Entonces, una cota sensible del error global es* $3\mathbf{u}(1 + bcond_B(J(B,G)))$*, lo que implica que, salvo factores numéricos no esenciales,* $bcond_B(J(B,G))$ *es la cantidad que gobierna los errores forward.*

El argumento anterior puede extenderse trivialmente al caso en que B *y* G *son calculadas con error forward en componentes acotado por el producto de una constante conocida por* $\mathbf{u}$.

A efectos prácticos, es importante demostrar que $bcond_B(J(B,G))$ puede calcularse con bajo costo.

Lema 3.1.13 *Las cantidades* $cond_B(u_k)$, $1 \leq k \leq n-1$, *dadas en la Definición 3.1.7 satisfacen la siguiente relación de recurrencia*

$$cond_B(u_1) = 1, \quad cond_B(u_k) = 1 + \left|\frac{l_{k-1}}{u_k}\right| (1 + cond_B(u_{k-1})).$$

Demostración. Basta sustituir la última expresión que aparece en la Definición 3.1.7 en la ecuación anterior. □

Entonces, teniendo en cuenta (3.22), (3.23) y (3.28) así como el Lema 3.1.13, el costo para calcular $bcond_B(J(B,G))$ es $14n - 22$ flops. Obsérvese que, dado que el Algoritmo 3.1.2 tiene $2(n-1)$ parámetros de entrada y $2n-3$ salidas, no es posible encontrar un método para estimar los errores forward con costo computacional menor que O(n).

3.1.6. Casos particulares

A continuación aplicamos los resultados obtenidos en la Sección 3.1.5 a dos tipos especiales de matrices mónicas de Jacobi:

1. Las matrices mónicas de Jacobi con subdiagonal G positiva, i.e., matrices asociadas a polinomios ortogonales con respecto a una medida positiva.

2. Matrices mónicas de Jacobi diagonalmente dominantes por filas y columnas.

Para las matrices mónicas de Jacobi con G positiva, probamos que el número de condición $cond_B(J(B,G))$ sólo depende de los cocientes $\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right|$ ya que, para toda j, $\left|\frac{u_j - l_j}{u_j + l_j}\right| \leq 1$ y $\left|\frac{l_j}{u_j + l_j}\right| \leq 1$. Para matrices mónicas de Jacobi diagonalmente dominantes por filas y columnas, sin embargo, probamos que $\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right| \leq 1$ para toda j y, por tanto, el correspondiente número de condición depende de los otros dos tipos de cocientes. Entonces, concluimos que, para las matrices mónicas de Jacobi diagonalmente dominantes por filas y columnas con G positiva, la transformación de Darboux está muy bien condicionada y se obtienen errores forward pequeños. Más aún, dado que el Algoritmo 3.1.1, para matrices diagonalmente dominantes, es backward estable en componentes [44, Teorema 9.13], se deduce que la transformación de Darboux en este caso es estable en componentes en el sentido mixto forward-backward.

3.1.6.1. Matriz mónica de Jacobi asociada a una medida positiva

Consideremos el caso especial en que una matriz mónica de Jacobi $J(B,G)$ está asociada a una medida positiva. Entonces, $G_k > 0$, para toda $k \geq 1$. Dado que $G_k = u_k l_k$, entonces u_k y l_k tienen el mismo signo. Por tanto,

$$\left|\frac{u_k - l_k}{u_k + l_k}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{l_k}{u_k + l_k}\right| \leq 1,$$

y las expresiones para $cond_B(b_k)$ y $cond_B(g_k)$ pueden ser acotadas del modo siguiente:

$$cond_B(b_k) \leq 2 + 2\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-1}\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right|, \tag{3.32}$$

$$cond_B(g_k) = 1 + \left|1 - \frac{l_k}{u_{k+1}}\right|\left(2 + 2\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-1}\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right|\right). \tag{3.33}$$

Las ecuaciones (3.32) y (3.33) muestran que, en el caso de medidas positivas, $cond_B(J(B,G))$ está acotado por una función de los cocientes $\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right|$. Así, si $\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right| \leq 1$, para toda $j \geq 1$,

$$cond_B(J(B,G)) \leq \max\{2n-2, 4n-7\}.$$

3.1.6.2. Matrices mónicas de Jacobi diagonalmente dominantes

Definición 3.1.9 *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz A es diagonalmente dominante por filas si*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad \textit{para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Diremos que la matriz A es diagonalmente dominante por columnas si

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad \textit{para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Supongamos que la matriz mónica de Jacobi $J(B, G)$ es diagonalmente dominante por filas y columnas simultáneamente. Entonces,

$$|B_j| > 1,\ |B_j| > |G_{j-1}|, \quad \text{para todo } j \geq 1, \tag{3.34}$$

$$|u_j| > 1,\ |u_j| > |G_j|, \quad \text{para todo } j \geq 1. \tag{3.35}$$

Como una consecuencia inmediata de (3.35)

$$|l_j| = \left| \frac{G_j}{u_j} \right| < 1, \quad j \geq 1. \tag{3.36}$$

Más aún, a partir de (3.35) y (3.36),

$$\left| \frac{l_j}{u_{j+1}} \right| < 1, \quad j \geq 1. \tag{3.37}$$

Entonces,

$$cond_B(u_k) \leq 2k - 1 \quad \text{y} \quad cond_B(g_k) \leq 4k + 1.$$

Por tanto, los elementos g_k, con $1 \leq k \leq n - 2$, se calculan mediante el Algoritmo 3.1.2 con un error forward “pequeño”. Por otro lado,

$$cond_B(b_k) = \left| \frac{l_k}{u_k + l_k} \right| + (2k - 1) \left| \frac{u_k - l_k}{u_k + l_k} \right|. \tag{3.38}$$

En el caso particular en que l_k y u_k tengan el mismo signo para toda k, i.e., cuando la medida es positiva,

$$cond_B(b_k) \leq 2k.$$

Entonces, bajo esta restricción, la matriz completa $J(\hat{b}, \hat{g})$ se calcula mediante el Algoritmo 3.1.2 con un error forward “pequeño”. Esto significa que la transformación de Darboux está muy bien condicionada para matrices diagonalmente dominantes por filas y columnas asociadas a medidas positivas.

3.1.7. Estimación del número de condición para algunas familias de polinomios ortogonales clásicos

Esta sección tiene una marcada orientación teórica. En ella presentamos algunas consideraciones analíticas relativas al valor del número de condición de la transformación de Darboux de familias clásicas de polinomios ortogonales. Esto nos permite explicar los buenos resultados obtenidos en los experimentos numéricos que aparecen en la Subsección 3.1.3.2 para los polinomios de Laguerre y de Bessel. Demostramos que para los polinomios de Laguerre, independientemente del valor del parámetro α o del orden n de la correspondiente matriz mónica de Jacobi, el número de condición $cond_B(J(B, G))$ está acotado por 3. Esto significa que la transformación de Darboux para los polinomios de Laguerre es estable (ver el Lema 3.1.1) y además, el Algoritmo 3.1.2 produce errores forward pequeños. Para los polinomios de Bessel con parámetro α positivo, probamos que el número de condición de la transformación de Darboux está acotado por un polinomio cuadrático en n. Más aún, para valores suficientemente grandes de $|\alpha|$, probamos que $bcond_B(J(B,G))$ tiende a 3. También hacemos algunas observaciones sobre experimentos numéricos aplicados a los polinomios de Bessel con valores negativos de α en los que $bcond_B(J(B,G))$ toma valores grandes. El comportamiento analítico del número de condición de los polinomios de Jacobi no ha sido estudiado. Basados en experimentos numéricos, podemos decir que $bcond_B(J(B,G))$ no toma valores grandes. Por ejemplo, para matrices mónicas de Jacobi de orden 100, usando métodos de búsqueda directa [44, Capítulo 26], no hemos encontrado ejemplos en los que $bcond_B(J(B,G))$ sea más grande que 10^5. Más aún, para valores suficientemente grandes de uno de los parámetros que definen los polinomios de Jacobi, se puede probar que $bcond_B(J(B,G))$ tiende a 3 como ocurre con los polinomios de Bessel. También hemos encontrado un ejemplo para el que la correspondiente matriz mónica de Jacobi no tiene factorización LU, ($\alpha = 17$ y $\beta = 40$).

3.1.7.1. Polinomios de Laguerre

Vimos en la Subsección 1.3.2 que los polinomios de Laguerre constituyen una familia uniparamétrica y que, para cada valor del parámetro, la correspondiente sucesión de polinomios es ortogonal con respecto a una medida positiva cuyo soporte es $(0,\infty)$. Por tanto, podemos aplicarles los resultados obtenidos en la Sección 3.1.6.1. Además, los polinomios mónicos de Laguerre de parámetro $\alpha > -1$ verifican la relación de recurrencia a tres términos dada en (1.14), teniendo en cuenta que, de acuerdo a la notación empleada en este capítulo, $\beta_n = B_{n+1}$ y $\gamma_n = G_n$.

Lema 3.1.14 *Los polinomios mónicos de Laguerre de parámetro $\alpha > -1$ verifican*

$$L_n^\alpha(0) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (i+\alpha), \quad \textit{para todo } n \geq 1.$$

Demostración. El resultado se obtiene por inducción sobre n y considerando la relación de recurrencia, dada en (1.14). □

Sea $J = LU$ la factorización LU de la matriz mónica de Jacobi asociada a los polinomios de Laguerre de parámetro α. Teniendo en cuenta los Lemas 2.2.1 y 3.1.14, en el siguiente lema damos una expresión explícita de los elementos u_j de la diagonal principal de U, y de los elementos l_j de la subdiagonal de L, en términos de j y el parámetro α.

Lema 3.1.15 *Para los polinomios de Laguerre de parámetro α, se verifica*

$$u_j = j + \alpha, \quad l_j = j, \quad \textit{para todo } j.$$

Nuestro objetivo en esta sección es dar una cota ajustada de $cond_B(J(B,G))$ cuando $J(B,G)$ es la matriz mónica de Jacobi de orden n asociada a los polinomios de Laguerre de parámetro α. En principio, daremos una expresión explícita de $cond_B(u_k)$, $cond_B(b_k)$ y $cond_B(g_k)$ (recordemos la Definición 3.1.7, (3.22), (3.23) y (3.28)) teniendo en cuenta el Lema 3.1.15. Para ello, necesitamos los siguientes resultados, que se obtienen de forma inmediata

$$\frac{l_j}{u_{j+1}} = \frac{j}{j+1+\alpha}, \quad \frac{l_j}{u_j+l_j} = \frac{j}{2j+\alpha}, \quad \frac{u_j-l_j}{u_j+l_j} = \frac{\alpha}{2j+\alpha}. \tag{3.39}$$

Lema 3.1.16 *Para $k \geq 1$,*

$$cond_B(u_k) = \frac{2k+\alpha}{2+\alpha}.$$

Demostración. Por inducción sobre k, probamos que

$$\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-1}\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right| = \frac{k-1}{2+\alpha}.$$

Entonces, teniendo en cuenta la Definición 3.1.7, se obtiene el resultado. □

Lema 3.1.17

$$cond_B(b_k) = \frac{k}{2k+\alpha} + \frac{|\alpha|}{2+\alpha}, \quad cond_B(g_k) = \frac{3\alpha+4}{2+\alpha}.$$

Demostración. Basta considerar (3.22), (3.23), el Lema 3.1.16 así como (3.39). □

Teorema 3.1.6 *Si $J(B,G)$ es la matriz mónica de Jacobi de orden n asociada a los polinomios de Laguerre de parámetro α*

$$cond_B(J(B,G)) \leq 3.$$

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema 3.1.17, puede probarse de forma inmediata que $cond_B(b_k) \leq 3$ y $cond_B(g_k) \leq 3$ para todo k y α. Entonces, considerando (3.26), se obtiene el resultado. □

Como una consecuencia de los desarrollos realizados en esta subsección, podemos afirmar que los errores producidos por el Algoritmo 3.1.2 son óptimos en el caso de los polinomios de Laguerre. En primer lugar, es estable en componentes en el sentido mixto forward-backward (ver el Teorema 3.1.4 y el Lema 3.1.1) y, en segundo lugar, el Lema 3.1.2 y el Teorema 3.1.6 garantizan que el error forward es menor que $4\mathbf{u} + O(\mathbf{u}^2)$. Además, estos resultados son independientes de n.

3.1.7.2. Polinomios generalizados de Bessel

En la Subsección 1.3.4 se mostró que los polinomios de Bessel son ortogonales con respecto a una medida con signo y que verifican la relación de recurrencia dada en (1.18). En esta subsección, $\{Q_n^\alpha\}$ denota la sucesión de polinomios de Bessel de parámetro α para evitar confusiones con la notación elegida para los elementos de la diagonal principal de las matrices mónicas de Jacobi.

Lema 3.1.18 *Los polinomios de Bessel de parámetro α verifican*

$$Q_k^\alpha(0) = \frac{2^k}{\prod_{i=k+1}^{2k}(i+\alpha)}, \quad k \geq 0.$$

Demostración. El resultado se obtiene por inducción sobre k y teniendo en cuenta la relación de recurrencia dada en (1.18). □

Supongamos que $J = LU$ denota la factorización LU de la matriz mónica de Jacobi asociada a la sucesión de polinomios de Bessel de parámetro α. En el siguiente lema damos una expresión explícita de u_j y l_j en términos de j y el parámetro α. Este resultado es, de nuevo, una simple consecuencia del Lema 2.2.1, en particular, de (2.1).

Lema 3.1.19

$$u_j = \frac{-2(j+\alpha)}{(2j-1+\alpha)(2j+\alpha)}, \quad l_j = \frac{2j}{(2j+\alpha)(2j+1+\alpha)}, \quad \textit{para todo } j \geq 1.$$

A fin de estimar una cota de $cond_B(J(B,G))$, donde $J(B,G)$ es la matriz mónica de Jacobi de orden n asociada a los polinomios de Bessel de parámetro α, es necesario acotar los cocientes

$$\left|\frac{l_k}{u_{k+1}}\right|, \quad \left|\frac{l_k}{u_k+l_k}\right|, \quad \left|\frac{u_k-l_k}{u_k+l_k}\right|.$$

Esto puede hacerse fácilmente cuando el parámetro α toma valores positivos.

Lema 3.1.20 *Si $\alpha > 0$, $\left|\frac{l_k}{u_{k+1}}\right| \leq 1$ para todo $k \geq 1$.*

Demostración.
Considerando el Lema 3.1.19, obtenemos

$$\left|\frac{l_k}{u_{k+1}}\right| = \left|\frac{-k(2k+2+\alpha)}{(2k+\alpha)(k+1+\alpha)}\right|. \tag{3.40}$$

Entonces, $\left|\frac{l_k}{u_{k+1}}\right| \leq 1$ si y solo si

$$\frac{\alpha^2+\alpha(4k+1)+4k(k+1)}{(2k+\alpha)(k+1+\alpha)} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\alpha(\alpha+2k+1)}{(2k+\alpha)(k+1+\alpha)} \geq 0.$$

Pero es fácil ver que ambas desigualdades son ciertas para todo $k \geq 1$ y $\alpha > 0$. □

Si $J(b,g)$ denota la transformada de Darboux de orden $n-1$ de la matriz mónica de Jacobi de orden n asociada a los polinomios de Bessel de parámetro $\alpha > 0$, teniendo en cuenta el Lema 3.1.20, se obtiene

$$cond_B(b_k) \leq \left|\frac{l_k}{u_k + l_k}\right| + \left|\frac{u_k - l_k}{u_k + l_k}\right|(2k-1), \quad cond_B(g_k) \leq 4k+1. \tag{3.41}$$

En los siguientes lemas, damos una acotación de los cocientes que aparecen en la expresión anterior de $cond_B(b_k)$, es decir,

$$\left|\frac{l_k}{u_k + l_k}\right|, \quad \left|\frac{u_k - l_k}{u_k + l_k}\right|.$$

Lema 3.1.21 *Si $\alpha > 0$,*

$$\left|\frac{l_k}{u_k + l_k}\right| \leq k.$$

Demostración. Por el Lema 3.1.19

$$\frac{l_k}{u_k + l_k} = \frac{k(2k-1+\alpha)}{-\alpha^2 - (2k+1)\alpha - 2k}, \tag{3.42}$$

y el enunciado se sigue de manera inmediata. □

Lema 3.1.22 *Si $\alpha > 0$,*

$$\left|\frac{u_k - l_k}{u_k + l_k}\right| \leq 2k.$$

Demostración. El siguiente resultado se obtiene de forma similar al lema anterior sin más que tener en cuenta que

$$\left|\frac{u_k - l_k}{u_k + l_k}\right| = \frac{\alpha^2 + (4k+1)\alpha + 4k^2}{\alpha^2 + (2k+1)\alpha + 2k} \ . \tag{3.43}$$

□

Considerando los Lemas 3.1.21 y 3.1.22 así como (3.41), es fácil obtener una cota de $cond_B(J(B,G))$, cuando $J(B,G)$ es la matriz mónica de Jacobi de orden n asociada a los polinomios de Bessel de parámetro α.

Teorema 3.1.7 *Si $\alpha > 0$ y $J(B,G)$ denota la matriz mónica de Jacobi de orden n asociada a los polinomios de Bessel de parámetro α,*

$$cond_B(J(B,G)) \leq 4n^2 - 9n + 5.$$

Cuando el parámetro α es negativo, es posible encontrar ejemplos en los que $bcond_B(J(B,G))$ es muy grande. Por ejemplo, para $\alpha = -94/7$ y $n = 100$, $bcond_B(J(B,G)) = 6{,}32 \cdot 10^{18}$. Para más detalles, ver la Sección 3.1.9.

La situación es completamente diferentes si consideramos $|\alpha|$ suficientemente grande.

Teorema 3.1.8 *Si $J(B,G)$ es la matriz mónica de Jacobi de orden n asociada a los polinomios de Bessel de parámetro α,*

$$\lim_{\alpha\to\infty} bcond_B(J(B,G)) = 3, \qquad \lim_{\alpha\to-\infty} bcond_B(J(B,G)) = 3.$$

Demostración. Obsérvese que, a partir de (3.40), (3.42) y (3.43),

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left|\frac{l_j}{u_{j+1}}\right| = 0, \quad \lim_{\alpha\to\infty}\left|\frac{l_j}{u_j + l_j}\right| = 0, \quad \lim_{\alpha\to\infty}\left|\frac{u_j - l_j}{u_j + l_j}\right| = 1,$$

y los mismos resultados se obtienen cuando consideramos el límite $\alpha \to -\infty$. Entonces, teniendo en cuenta (3.22), (3.23) y la Definición 3.1.7,

$$\lim_{\alpha\to\infty} cond_B(b_k) = 1, \quad \lim_{\alpha\to\infty} cond_B(g_k) = 3$$

y el resultado se obtiene de forma inmediata. □

3.1.8. Transformación de Darbox para matrices de Jacobi simétricas y definidas positivas

En esta sección analizamos numéricamente la transformación de Darboux simétrica (ver Sección 1.7). Consideramos una medida positiva μ cuyo soporte está contenido en $(0,\infty)$ así como la matriz de Jacobi asociada J_s (ver (3.2)). Por el Corolario 1.2.1, esta matriz es definida positiva y, por tanto, existe su factorización de Cholesky y su transformada de Darboux simétrica. En la Sección 2.3, probamos que la aplicación de la transformación de Darboux simétrica a la matriz de Jacobi asociada a una medida positiva con soporte en $(0,\infty)$ calcula la matriz de Jacobi asociada a la medida $xd\mu$. Una demostración alternativa de este resultado puede encontrarse en [47].

Es bien sabido que el algoritmo usual para calcular la factorización de Cholesky es un algoritmo backward estable en norma y que, para matrices tridiagonales, es backward estable en componentes [44]. Por otro lado, los experimentos numéricos muestran que, para matrices finitas, el número de condición espectral de $J_s(B,\sqrt{G})$, $\kappa_2(J_s(B,\sqrt{G}))$, puede ser mucho más pequeño que $\kappa_2(J(B,G))$. Teniendo en cuenta que, en esta sección, haremos uso de la notación introducida en la Sección 3.1.3, mostramos en la siguiente tabla como ejemplo ambos números de condición para los polinomios de Laguerre con parámetro 1/10. Aquí n denota el orden de la matriz.

	n=10	n=50	n=100
$\kappa_2(J)$	5,4 10^7	4,46 10^{64}	1,39 10^{158}
$\kappa_2(J_s)$	3,58 10^2	8,3 10^3	3,3 10^4

En estas condiciones, es natural cuestionarse si, en el caso de medidas positivas con soporte en $(0,\infty)$, podemos esperar calcular la matriz de Jacobi asociada a la medida $xd\mu$ con mayor precisión que la correspondiente matriz mónica de Jacobi. En esta sección demostramos que esto no es cierto y que, de hecho, ambos algoritmos son estables en el sentido mixto forward-backward y los correspondientes números de condición tienen magnitudes similares (Teorema 3.1.13), lo cual implica que debemos esperar errores forward semejantes.

Sea $J(B,G)$ (ver (3.3)) la matriz mónica de Jacobi de orden n asociada a una medida positiva μ cuyo soporte es un subconjunto de $(0,\infty)$. Consideremos la correspondiente matriz de Jacobi de orden n, $J_s(B,\sqrt{G})$. Por el Lema 2.2.3, sabemos que ambas matrices son semejantes. Consideremos la transformación de Darboux simétrica aplicada a $J_s(B,\sqrt{G})$, i.e.,

$$J_s(B,\sqrt{G}) = LL^t, \quad J_s(b,\sqrt{g}) = (L^tL)_{n-1}.$$

Es obvio que $J_s(b,\sqrt{g})$ es, también, una matriz tridiagonal definida positiva. Esta matriz es la submatriz principal de orden $n-1$ de la matriz de Jacobi asociada a $xd\mu$ [37, 47]. En lo que sigue, denotamos las matrices de Jacobi por $J_s(B,C)$, suponiendo que las entradas de C son todas positivas.

El código de MATLAB que calcula la factorización de Cholesky de $J_s(B,C)$ viene dado en el siguiente algoritmo.

Algoritmo 3.1.3 *Dada una matriz de Jacobi definida positiva $J_s(B,C) \in R^{n\times n}$, este algoritmo calcula su factorización de Cholesky.*

```
l(1,1)=sqrt(B(1))
for i=1:n-1
   l(i+1,i)=C(i)/l(i,i)
   l(i+1,i+1)=sqrt(B(i+1)-l(i+1,i)^2)
end
```

El siguiente algoritmo calcula la transformada de Darboux simétrica de una matriz de Jacobi, $J_s(B,C)$.

Algoritmo 3.1.4 *Dada una matriz de Jacobi definida positiva $J_s(B,C) \in R^{n\times n}$, este algoritmo calcula su transformada de Darboux simétrica de orden $n-1$, $J_s(b,c) \in R^{(n-1)\times(n-1)}$.*

```
l(1,1)=sqrt(B(1))
for i=1:n-2
     l(i+1,i)=C(i)/l(i,i)
     b(i)=l(i,i)^2 + l(i+1,i)^2
     l(i+1,i+1)=sqrt(B(i+1)-l(i+1,i)^2)
     c(i)=l(i+1,i+1)l(i+1,i)
end
l(n,n-1)=C(n-1)/l(n-1,n-1)
b(n-1)=l(n-1,n-1)^2 + l(n,n-1)^2
```

El costo computacional del Algoritmo 3.1.4 es $7n-11$ flops, que es casi el doble del costo del Algoritmo 3.1.2 (ver Sección 3.1.3).

3.1.8.1. Análisis del error backward

Los tres resultados siguientes son equivalentes a los Teoremas 3.1.2, 3.1.3 y 3.1.4 obtenidos para la transformación de Darboux, pero el hecho de que la matriz $J_s(B,C)$ sea definida positiva implica, en este caso, la estabilidad perfecta en componentes. Recuérdese que obtuvimos un resultado semejante para matrices mónicas de Jacobi asociadas a medidas positivas cuyo soporte es un subconjunto de $(0,\infty)$ (ver Lema 3.1.1 y el Teorema 3.1.4). En esta sección, se supone que los elementos de $J_s(B,C)$ son números reales en punto flotante. Observaciones semejantes a las que aparecen al comienzo de la Sección 3.1.4 y en la Observación 3.1.7 siguen siendo válidas en este caso.

Teorema 3.1.9 *Sea $J_s(B,C)$ una matriz de Jacobi definida positiva y de orden n. Si $\hat{L}$ es el factor calculado por el Algoritmo 3.1.3, entonces se tiene*

$$J_s(B+\Delta B, C+\Delta C)=\hat{L}\hat{L}^t, \quad |\Delta B| \leq \frac{3\mathbf{u}+3\mathbf{u}^2+\mathbf{u}^3}{1-3\mathbf{u}-3\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^3}|B|, \quad |\Delta C|\leq \mathbf{u}|C|.$$

Demostración. Para las cantidades calculadas, obtenemos

$$\hat{l}_{11}(1+\epsilon_1)=\sqrt{B_1}, \quad |\epsilon_1|\leq \mathbf{u},$$

por tanto,

$$|B_1-\hat{l}_{11}^2|\leq (2\mathbf{u}+\mathbf{u}^2)\hat{l}_{11}^2.$$

Para $i=2:n-1$,

$$\hat{l}_{ii}(1+\epsilon_i)=\sqrt{\frac{B_i-\hat{l}_{i,i-1}^2(1+\delta_i)}{(1+\eta_i)}}, \quad |\epsilon_i|,|\delta_i|,|\eta_i|\leq \mathbf{u},$$

$$\hat{l}_{ii}^2(1+2\epsilon_i+\epsilon_i^2)(1+\eta_i)=B_i-\hat{l}_{i,i-1}^2(1+\delta_i),$$

$$B_i-\hat{l}_{i,i-1}^2-\hat{l}_{ii}^2=\hat{l}_{i,i-1}^2\delta_i+\hat{l}_{ii}^2(2\epsilon_i+\eta_i+2\epsilon_i\eta_i+\epsilon_i^2+\epsilon_i^2\eta_i).$$

Entonces, se tiene

$$|B_i - \hat{l}^2_{i,i-1} - \hat{l}^2_{ii}| \leq \hat{l}^2_{i,i-1}\mathbf{u} + \hat{l}^2_{ii}(3\mathbf{u} + 3\mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3) \leq (3\mathbf{u} + 3\mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3)(\hat{l}^2_{i,i-1} + \hat{l}^2_{ii}).$$

Finalmente, para $i = 1 : n-1$

$$\hat{l}_{i+1,i} = \frac{C_i}{\hat{l}_{ii}}(1+\delta_i), \quad \text{y} \quad |C_i - \hat{l}_{ii}\hat{l}_{i+1,i}| \leq \mathbf{u}|C_i|.$$

Los resultados anteriores prueban que

$$J_s(B+\Delta B, C+\Delta C) = \hat{L}\hat{L}^t, \quad |\Delta B| \leq (3\mathbf{u}+3\mathbf{u}^2+\mathbf{u}^3)|diag(\hat{L}\hat{L}^t)|, \quad |\Delta C| \leq \mathbf{u}|C|.$$

Pero,

$$|diag(\hat{L}\hat{L}^t)| \leq |B| + |\Delta B| \leq |B| + (3\mathbf{u} + 3\mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3)|diag(\hat{L}\hat{L}^t)|.$$

Por tanto,

$$|diag(\hat{L}\hat{L}^t)| \leq \frac{|B|}{1 - 3\mathbf{u} - 3\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^3},$$

y el resultado buscado se deduce fácilmente. □

Para el segundo paso de la transformación de Darboux simétrica, i.e., $J_s(b,c) = (L^tL)_{n-1}$, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.10 *Sea L una matriz triangular inferior y bidiagonal. Sea $J_s(b,c) = L^tL$ el producto exacto de L^t por L y sea $J_s(\hat{b},\hat{c})$ el producto de L^t por L calculado. Entonces,*

$$|b - \hat{b}| \leq \frac{2\mathbf{u}}{1-\mathbf{u}}|\hat{b}|, \quad y \quad |c - \hat{c}| \leq \mathbf{u}|\hat{c}|,$$

que, en notación matricial, implica

$$J_s(\hat{b} + \Delta\hat{b}, \hat{c} + \Delta\hat{c}) = (L^tL), \quad |\Delta\hat{b}| \leq \frac{2\mathbf{u}}{1-\mathbf{u}}|\hat{b}|, \quad |\Delta\hat{c}| \leq \mathbf{u}|\hat{c}|.$$

Demostración. De

$$\hat{b}_k(1+\epsilon_k) = l^2_{kk}(1+\delta_k) + l^2_{k+1,k}(1+\eta_k), \quad |\epsilon_k|, |\delta_k|, |\eta_k| \leq \mathbf{u},$$

se sigue

$$|\hat{b}_k - l^2_{kk} - l^2_{k+1,k}| \leq \mathbf{u}(|\hat{b}_k| + l^2_{kk} + l^2_{k+1,k}).$$

Esto significa que

$$|b_k - \hat{b}_k| \leq \mathbf{u}(|\hat{b}_k| + b_k) \leq \mathbf{u}(2|\hat{b}_k| + |b_k - \hat{b}_k|),$$

y el resultado se deduce de forma inmediata.

Por otro lado,

$$\hat{c}_k(1+\zeta_k) = l_{k+1,k}l_{k+1,k+1}, \quad |\zeta_k| \leq \mathbf{u}.$$

$$|\hat{c}_k - l_{k+1,k}l_{k+1,k+1}| \leq \mathbf{u}|\hat{c}_k|.$$

□

Por tanto, teniendo en cuenta los Teoremas 3.1.9 y 3.1.10, es fácil probar el resultado principal de estabilidad para la transformación de Darboux simétrica.

Teorema 3.1.11 *Dada una matriz de Jacobi definida positiva de orden* n*,* $J_s(B, C)$*, sea* $J_s(b, c)$ *su transformada de Darboux simétrica de orden* $n-1$*. Si* $J_s(\hat{b}, \hat{c})$ *y* $\hat{L}$ *son las matrices calculadas por el Algoritmo 3.1.4, entonces*

$$J_s(B+\Delta B, C+\Delta C) = \hat{L}\hat{L}^t, \quad |\Delta B| \leq \frac{3\mathbf{u}+3\mathbf{u}^2+\mathbf{u}^3}{1-3\mathbf{u}-3\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^3}|B|, \quad |\Delta C| \leq \mathbf{u}|C|,$$

$$J_s(\hat{b}+\Delta\hat{b}, \hat{c}+\Delta\hat{c}) = (\hat{L}^t\hat{L})_{n-1}, \quad |\Delta\hat{b}| \leq \frac{2\mathbf{u}}{1-\mathbf{u}}|\hat{b}|, \quad |\Delta\hat{c}| \leq \mathbf{u}|\hat{c}|.$$

Obsérvese que hemos probado que la transformación de Darboux simétrica es estable en componentes en el sentido mixto forward-backward.

3.1.8.2. Condicionamiento de la transformación de Darboux simétrica

En esta sección definimos el número de condición relativo en componentes con respecto a las perturbaciones en componentes asociadas a la transformación de Darboux simétrica. Además, se obtiene una buena cota de dicho número de condición. Obsérvese que, en este caso, el Teorema 3.1.11 garantiza que éste es también el número de condición asociado al error backward. Este hecho simplifica el análisis con respecto al que se hizo en la Sección 3.1.5.

Definición 3.1.10 *Sea* $J_s(b, c)$ *la transformada de Darboux simétrica de orden* $n-1$ *de una matriz de Jacobi de orden* n*,* $J_s(B, C)$*, y sea* $J_s(b+\Delta b, c+\Delta c)$ *la transformada de Darboux simétrica de orden* $n-1$ *de la matriz de Jacobi de orden* n*,* $J_s(B+\Delta B, C+\Delta C)$*. El número de condición relativo en componentes para la transformación de Darboux simétrica de la matriz* $J_s(B, C)$ *con respecto a perturbaciones en componentes se define mediante*

$$cond_s(J_s(B,C)) := \lim_{\epsilon\to 0}\sup\left\{\max_k\left\{\left|\frac{\Delta b_k}{\epsilon\, b_k}\right|, \left|\frac{\Delta c_k}{\epsilon\, c_k}\right|\right\} : \ |\Delta B| \leq \epsilon|B|, \ |\Delta C| \leq \epsilon|C|\right\}.$$

Considerando la definición previa y el Teorema 3.1.11 es posible acotar el error forward en términos del número de condición.

Lema 3.1.23 *Sean* $J_s(b, c)$ *y* $J_s(\hat{b}, \hat{c})$*, respectivamente, la transformada de Darboux simétrica de* $J_s(B, C)$ *exacta y la calculada por el Algoritmo 3.1.4. Entonces,*

$$\max_k\left\{\left|\frac{b_k-\hat{b}_k}{b_k}\right|, \left|\frac{c_k-\hat{c}_k}{c_k}\right|\right\} \leq 3\ \mathbf{u}\ (1+cond_s(J_s(B,C))) + O(\mathbf{u}^2).$$

DEMOSTRACIÓN.
La demostración es similar a la del Lema 3.1.2. □

Para obtener una expresión explícita de $cond_s(J_s(B, C))$, realizamos desarrollos similares a los que aparecen en la Sección 3.1.5. Consideremos una perturbación definida positiva $J_s(B+\Delta B, C+\Delta C)$ de una matriz de Jacobi definida positiva $J_s(B,C)$, y supongamos que L y $L+\Delta L$ son los correspondientes factores de Cholesky. Omitimos la mayoría de las demostraciones por ser similares a las que aparecen en la Sección 3.1.5.

Lema 3.1.24 *Los siguientes resultados son válidos a primer orden.*

$$\Delta l_{k+1,k} = l_{k+1,k}\left(\frac{\Delta C_k}{C_k} - \frac{\Delta l_{kk}}{l_{kk}}\right), \quad 1 \le k \le n-1.$$

$$\Delta l_{kk} = \frac{\Delta B_k}{2l_{kk}} - \frac{l_{k,k-1}}{l_{kk}}\Delta l_{k,k-1}, \quad 1 \le k \le n-1.$$

De este lema, a primer orden, se deduce que

$$\frac{\Delta l_{kk}}{l_{kk}} = \frac{\Delta B_k}{2l_{kk}^2} - \frac{l_{k,k-1}^2}{l_{kk}^2}\left(\frac{\Delta C_{k-1}}{C_{k-1}} - \frac{\Delta l_{k-1,k-1}}{l_{k-1,k-1}}\right). \tag{3.44}$$

Lema 3.1.25 *Las siguientes expresiones para las variaciones relativas son correctas a primer orden.*

$$\delta l_{11} = \frac{\delta B_1}{2},$$

$$\delta l_{kk} = \frac{\Delta B_k}{2l_{kk}^2} - \frac{l_{k,k-1}^2}{l_{kk}^2}\delta C_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\Delta B_i}{2l_{i,i}^2} - \frac{l_{i,i-1}^2}{l_{ii}^2}\delta C_{i-1}\right)\prod_{j=i}^{k-1}\frac{l_{j+1,j}^2}{l_{j+1,j+1}^2}, \quad 1 \le k \le n-1.$$

Lema 3.1.26 *Si se verifica $|\Delta B_k| \le \epsilon|B_k|$, $|\Delta C_k| \le \epsilon|C_k|$ para $1 \le k \le n-1$, entonces, a primer orden*

$$|\delta l_{kk}| \le \epsilon\left[\frac{1}{2} + \frac{3l_{k,k-1}^2}{2l_{kk}^2} + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{3l_{i,i-1}^2}{2l_{ii}^2}\right)\prod_{j=i}^{k-1}\frac{l_{j+1,j}^2}{l_{j+1,j+1}^2}\right].$$

Observación 3.1.8 *La cota de $|\delta l_{kk}|$ dada en el lema anterior también puede expresarse de la forma siguiente.*

$$|\delta l_{kk}| \le \epsilon\left(\frac{1}{2} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-1}\frac{l_{j+1,j}^2}{l_{j+1,j+1}^2}\right). \tag{3.45}$$

Definición 3.1.11 *Para $1 \le k \le n-1$*

$$cond_s(l_{kk}) := \frac{1}{2} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-1}\frac{l_{j+1,j}^2}{l_{j+1,j+1}^2}.$$

El siguiente lema da una fórmula recursiva para calcular $cond_s(l_{kk})$.

Lema 3.1.27 *Para* $1 \leq k \leq n-1$,

$$cond_s(l_{11}) = \frac{1}{2}, \quad cond_s(l_{kk}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{l_{k,k-1}^2}{l_{kk}^2}\right) + \frac{l_{k,k-1}^2}{l_{kk}^2}[1 + cond_S(l_{k-1,k-1})].$$

Lema 3.1.28 *Las siguientes ecuaciones son correctas a primer orden,*

$$\Delta b_k = 2l_{kk}\Delta l_{kk} + 2l_{k+1,k}\Delta l_{k+1,k}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$\Delta c_k = l_{k+1,k}\Delta l_{k+1,k+1} + l_{k+1,k+1}\Delta l_{k+1,k}, \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

Lema 3.1.29

$$\delta b_k = \frac{2l_{k+1,k}^2}{l_{kk}^2 + l_{k+1,k}^2}\delta C_k + 2\frac{l_{kk}^2 - l_{k+1,k}^2}{l_{kk}^2 + l_{k+1,k}^2}\delta l_{kk}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$\delta c_k = \frac{l_{k+1,k+1}^2 + l_{k+1,k}^2}{2l_{k+1,k+1}^2}\delta B_{k+1} + \left(1 - \frac{l_{k+1,k}^2}{l_{k+1,k+1}^2}\right)(\delta C_k - \delta l_{kk}), \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

Entonces, teniendo en cuenta la Observación 3.1.8 y el Lema 3.1.29,

Teorema 3.1.12 *Si se verifica que* $|\Delta B_k| \leq \epsilon |B_k|$, $|\Delta C_k| \leq \epsilon |C_k|$ *para* $1 \leq k \leq n-1$, *entonces, a primer orden*

$$|\delta b_k| \leq \epsilon \left[\frac{2l_{k+1,k}^2}{l_{kk}^2 + l_{k+1,k}^2} + 2\frac{|l_{kk}^2 - l_{k+1,k}^2|}{l_{kk}^2 + l_{k+1,k}^2}\, cond_s(l_{kk})\right], \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$|\delta c_k| \leq \epsilon \left[\frac{1}{2} + \frac{l_{k+1,k}^2}{2l_{k+1,k+1}^2} + \left|1 - \frac{l_{k+1,k}^2}{l_{k+1,k+1}^2}\right|(1 + cond_s(l_{kk}))\right], \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

Denotamos

$$cond_s(b_k) := \frac{2l_{k+1,k}^2}{l_{kk}^2 + l_{k+1,k}^2} + 2\frac{|l_{kk}^2 - l_{k+1,k}^2|}{l_{kk}^2 + l_{k+1,k}^2}\, cond_s(l_{kk}),$$

i.e., $cond_s(b_k)$ es la cota de $|\delta b_k|$ dividida por ϵ. De forma semejante,

$$cond_s(c_k) := \frac{1}{2} + \frac{l_{k+1,k}^2}{2l_{k+1,k+1}^2} + \left|1 - \frac{l_{k+1,k}^2}{l_{k+1,k+1}^2}\right|(1 + cond_s(l_{kk})),$$

es la cota de $|\delta c_k|$ dividida por ϵ. Entonces, teniendo en cuenta la Definición 3.1.10,

$$cond_s(J_s(B,C)) \leq \max\{cond_s(b_{n-1}), \max_{1\leq k\leq n-2}\{cond_s(b_k), cond_s(c_k)\}\}. \quad (3.46)$$

No hemos podido probar que la desigualdad que aparece en (3.46) es una igualdad, i.e., que existen pertubaciones que verifican las condiciones de la Definición 3.1.10 de modo que las desigualdades en el Teorema 3.1.12 se convierten en igualdades.
Por tanto, no hemos encontrado expresiones para el verdadero número de condición de la transformación de Darboux simétrica, $cond_s(J_s(B,C))$. Denotaremos la cota que aparece en (3.46) por

$$bcond_s(J_s(B,C)) := \max\{cond_s(b_{n-1}), \max_{1\le k\le n-2}\{cond_s(b_k), cond_s(c_k)\}\}. \quad (3.47)$$

Ahora, comparemos $bcond_s(J_s(B,C))$ ($C=\sqrt{G}$) y $bcond_B(J(B,G))$, definido en (3.28). Teniendo en cuenta los Lemas 3.1.2 y 3.1.23, es obvio que los números de condición controlan los errores forward. Entonces, la comparación de ambos números de condición implica la comparación de los errores forward obtenidos, respectivamente, de la aplicación de la transformación de Darboux a una matriz mónica de Jacobi $J(B,G)$ y la aplicación de la transformación de Darboux simétrica a la matriz de Jacobi asociada a $J(B,G)$ cuando la medida es positiva y tiene su soporte en $(0,\infty)$. No tenemos expresiones para $cond_s(J_s(B,C))$ o $cond_B(J(B,G))$. Por tanto, nos vemos obligados a comparar las cotas $bcond_s(J_s(B,C))$ y $bcond_B(J(B,G))$. Es importante señalar que hemos realizado experimentos numéricos semejantes a los que aparecen en la Sección 3.1.9 para el caso de la transformación de Darboux simétrica. Estos experimentos han demostrado que $bcond_s(J_s(B,C))$ es una aproximación confiable del verdadero número de condición $cond_s(J_s(B,C))$ del mismo modo que $bcond_B(J(B,G))$ es una aproximación confiable de $cond_B(J(B,G))$.

Teorema 3.1.13 *Sean $J(B,G)$ y $J_s(B,C)$ ($C=\sqrt{G}$), respectivamente, la matriz mónica de Jacobi y la matriz de Jacobi asociadas a una familia de polinomios ortogonales con respecto a una medida positiva con soporte en $(0,\infty)$, entonces*

$$\frac{1}{2}\, bcond_B(J(B,G)) \le bcond_s(J_s(B,C)) \le 2\, bcond_B(J(B,G)).$$

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema 2.2.3, una expresión alternativa de $cond_s(b_k)$ y $cond_s(c_k)$ es

$$cond_s(b_k) = \frac{2l_k}{u_k+l_k} + \frac{|u_k-l_k|}{u_k+l_k}\left(1+4\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-1}\frac{l_j}{u_{j+1}}\right),$$

$$cond_s(c_k) = \frac{1}{2} + \frac{l_k}{2u_{k+1}} + \left|1-\frac{l_k}{u_{k+1}}\right|\left(\frac{3}{2}+2\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-1}\frac{l_j}{u_{j+1}}\right).$$

Ahora comparamos las expresiones anteriores con (3.22) y (3.23) y es trivial obtener

$$\frac{1}{2}cond_B(b_k) \le cond_s(b_k) \le 2\, cond_B(b_k).$$

Por otro lado, dado que, para todo número real a, $|1+a| \leq 2+|1-a|$, se sigue

$$cond_s(c_k) \leq cond_B(g_k).$$

Más aún, dado que $|1+a|+|1-a| \geq 2$, para todo número real a,

$$cond_s(c_k) \geq \frac{1}{2} cond_B(g_k).$$

$\square$

Observación 3.1.9 *Teniendo en cuenta el teorema previo así como los Lemas 3.1.2 y 3.1.23, podemos decir que*

- *Las cotas de los números de condición* $bcond_s(J_s(B,C))$ *y* $bcond_B(J(B,G))$ *tienen magnitudes semejantes.*
- *Las cotas de los errores forward en componentes asociados a la transformación de Darboux y la transformación de Darboux simétrica tienen magnitudes semejantes.*

Las anteriores observaciones nos permiten afirmar que, en el caso de medidas positivas con soporte en $(0,\infty)$*, la precisión con que la transformación de Darboux calcula* $J(B,G)$ *es la misma que la precisión con que la transformación de Darboux simétrica calcula* $J_s(B,C)$*. Más aún, se obtienen errores backward en componentes de orden* $\mathbf{u}$ *en ambos casos.*

Por otro lado, obsérvese que el costo computacional del Algoritmo 3.1.4 es $7n-11$ *flops mientras que el costo del Algoritmo 3.1.2 es* $4n-6$ *flops. Tomando en cuenta el Lema 3.1.27 y la definición de* $bcond_s(J_s(B,C))$*, el costo de calcular* $bcond_s(J_s(B,C))$ *es* $19n-25$ *flops comparado con los* $14n-22$ *flops de calcular* $bcond_B(J(B,G))$*. Esto nos lleva a pensar que, a menos que se necesiten específicamente los parámetros de la relación de recurrencia que verifican los polinomios ortonormales, la transformación de Darboux (no simétrica) es más eficiente computacionalmente que la simétrica.*

3.1.9. Experimentos numéricos

Finalmente, concluímos esta sección con un conjunto de experimentos numéricos. En la Sección 3.1.5 estudiamos ampliamente el condicionamiento de la transformación de Darboux sin parámetro en su versión sin shift. El principal resultado de esa sección establece que el Algoritmo 3.1.2 para calcular la transformación de Darboux es forward estable teniendo en cuenta que $bcond_B(J(B,G))$ y $bcond_C(J(B,G))$ son magnitudes semejantes (Teorema 3.1.5 y Observación 3.1.7). Sin embargo, hemos comparado solamente las cotas de los verdaderos números de condición y el lector puede mantener la duda acerca de la fiabilidad de nuestro resultado. Por esta razón, incluimos esta sección con la finalidad de que una amplia variedad de experimentos numéricos pueda reforzar nuestra afirmación de estabilidad forward. Más aún, estos experimentos muestran que $bcond_B(J(B,G))$ es una buena aproximación del verdadero número de condición ya que se verá que $\mathbf{u}(1 + bcond_B(J(B,G)))$ es una medida fiable de los errores forward en componentes (recordemos el Lema 3.1.2).

En el primer grupo de experimentos comparamos los errores forward obtenidos de dos formas distintas: 1) aplicando el Algoritmo 3.1.2 a ciertas matrices mónicas de Jacobi y comparando con los resultados exactos, 2) perturbando de forma aleatoria cada entrada B_i y G_i obteniendo $\tilde{B}_i$ y $\tilde{G}_i$ de modo que $|B_i - \tilde{B}_i| \leq 5\mathbf{u}|B_i|$, $|G_i - \tilde{G}_i| \leq 5\mathbf{u}|G_i|$. Después aplicamos el algoritmo de forma exacta a los datos pertubados y comparamos con los resultados exactos. Los experimentos han sido realizados usando MATLAB 5.3 ($\mathbf{u} = 1{,}11\ 10^{-16}$). A fin de simular la aplicación exacta del algoritmo, hemos utilizado la aritmética de precisión variable del Symbolic Math toolbox de MATLAB considerando 64 dígitos decimales de precisión. Hemos analizado los siguientes casos:

1. Matrices mónicas de Jacobi de dimensión 100×100 asociadas a los polinomios de Bessel con parámetros $\alpha = -101/7 + k^2$, donde $1 \leq k \leq 20$. En la tabla que se incluye a continuación, este experimento se denota como "Bessel".

2. Matrices mónicas de Jacobi de dimensión 100×100 asociadas a los polinomios de Jacobi con parámetros $\alpha = -19/10+k$, $\beta = (-9+k)/10$, donde $1 \leq k \leq 20$. En la tabla, este experimento se denota como "Jacobi".

3. Matrices mónicas de Jacobi de dimensión 100×100 asociadas a los polinomios de Laguerre con parámteros $\alpha = -19/10 + k$, donde $1 \leq k \leq 20$. En la tabla, este experimento se denota como "Laguerre".

4. Matrices mónicas de Jacobi de dimensión 100×100 tales que los elementos en las diagonales B y G son números aleatorios distribuidos según una normal. También hemos considerado 20 matrices diferentes. En la tabla, este experimento se denota como "Random1".

5. Matrices mónicas de Jacobi de dimensión 100×100 tales que los elementos en las diagonales B y G son números aleatorios distribuidos según una normal y multiplicados por $10^{5*randn}$ donde $randn$ denota un número aleatorio extraído de una distribución normal. También hemos considerado 20 matrices diferentes en este caso. En la tabla, este experimento se denota como "Random2".

En el segundo grupo de experimentos comparamos el error forward producido por el Algoritmo 3.1.2, con la cota $\mathbf{u}(1+bcond_B(J(B,G)))$, utilizando los mismos ejemplos considerados en el primer grupo de experimentos.

Denotamos por $vm1$ el vector con los máximos errores forward en componentes obtenidos por la vía 1) y $vm2$ denota el vector con los máximos errores forward obtenidos por la vía 2). De forma más precisa, el máximo error forward es $\text{máx}\{forb, forg\}$ donde $forb$ y $forg$ fueron definidos en (3.7).

	Bessel	Jacobi	Laguerre	Random1	Random2
máx($vm1$)	$2{,}3\ 10^{2}$	$6{,}97\ 10^{-13}$	$4{,}43\ 10^{-16}$	$3{,}04\ 10^{-11}$	$1{,}43\ 10^{-13}$
mín($vm1$)	$3{,}28\ 10^{-16}$	$8{,}96\ 10^{-16}$	$2{,}15\ 10^{-16}$	$2{,}54\ 10^{-15}$	$2{,}18\ 10^{-16}$
máx($vm2$)	$2{,}59\ 10^{2}$	$1{,}02\ 10^{-11}$	$8{,}48\ 10^{-15}$	$4{,}02\ 10^{-10}$	$6{,}89\ 10^{-12}$
mín($vm2$)	$4{,}76\ 10^{-15}$	$1{,}07\ 10^{-14}$	$4{,}22\ 10^{-15}$	$3{,}51\ 10^{-14}$	$4{,}38\ 10^{-15}$
máx($vm1./vm2$)	3,94	5,32	7,003	$2{,}74\ 10^{-1}$	$1{,}74\ 10^{-1}$
media($vm1./vm2$)	$3{,}12\ 10^{-1}$	$3{,}84\ 10^{-1}$	$4{,}31\ 10^{-2}$	$6{,}69\ 10^{-2}$	$5{,}95\ 10^{-2}$
mín($vm1./vm2$)	$4{,}44\ 10^{-2}$	$1{,}20\ 10^{-2}$	$2{,}54\ 10^{-2}$	$1{,}21\ 10^{-2}$	$6{,}12\ 10^{-3}$

La quinta fila de la tabla anterior muestra que los errores forward producidos por el Algoritmo 3.1.2 son, a lo más, relativamente superiores a los errores producidos mediante la perturbación de los datos, y las filas sexta y séptima muestran que, frecuentemente, son más pequeños. Esto significa que el Algoritmo 3.1.2 es forward estable, como predijeron los resultados teóricos de la Sección 3.1.5. También es interesante observar que el experimento con los polinomios de Bessel ofrece un amplio rango de valores de los errores forward $[3{,}28\ 10^{-16},\ 2{,}3\ 10^{2}]$. De hecho, cuando el parámetro toma los valores negativos, i.e., $\{-94/7, -73/7, -38/7\}$ obtenemos

Bessel	α=-94/7	α=-73/7	α=-38/7
$vm1$	$7{,}03\ 10^{1}$	$2{,}30\ 10^{2}$	$4{,}71\ 10^{-4}$
$vm2$	$1{,}78\ 10^{1}$	$2{,}59\ 10^{2}$	$7{,}65\ 10^{-3}$

Estos resultados muestran que el Algoritmo 3.1.2 es forward estable incluso cuando aparecen errores forward grandes. Esto es importante ya que el análisis que aparece en la Sección 3.1.5 sólo proporciona cotas de error a primer orden (Lema 3.1.2). En vista de estos resultados, uno podría pensar que estas salidas correspondientes a los errores forward en componentes podrían verse mejoradas de forma notable al considerar errores forward en norma. Sin embargo, aunque los errores en norma son ciertamente menores, están muy lejos de ser del orden de la precisión del ordenador. En la siguiente tabla incluímos los errores forward en norma (3.8) que denotamos como $mn1$ y $mn2$, respectivamente, para los polinomios de Bessel con parámetros $\{-94/7, -73/7, -38/7\}$:

Bessel	α=-94/7	α=-73/7	α=-38/7
$mn1$	$2{,}95\ 10^{-3}$	$3{,}24\ 10^{-3}$	$1{,}32\ 10^{-8}$
$mn2$	$2{,}12\ 10^{-3}$	$3{,}53\ 10^{-3}$	$6{,}24\ 10^{-7}$

A pesar de los buenos resultados obtenidos en los experimentos anteriores, aún falta por comprobar que la cota $bcond_B(J(B,G))$ del verdadero número de condición realmente refleja la sensibilidad del problema y, por tanto, es útil para acotar el error forward. En la siguiente tabla comparamos la cota del error forward (obtenida del Lema 3.1.2) y los errores forward reales. De nuevo, consideramos los ejemplos utilizados anteriormente. Aquí

$$fm := \frac{\text{máx}\{forb, forg\}}{\mathbf{u}(1 + bcond_B(J(B,G)))}.$$

	Bessel	Jacobi	Laguerre	Random1	Random2
máx$\{fm\}$	3.69	1,88 10^{-1}	1.46	5,098 10^{-1}	6,14 10^{-1}
media$\{fm\}$	5,86 10^{-1}	7,29 10^{-2}	6,18 10^{-1}	1,66 10^{-1}	1,74 10^{-1}
mín$\{fm\}$	2,9 10^{-2}	1,98 10^{-2}	5,19 10^{-1}	5,6 10^{-2}	1,53 10^{-2}

Los resultados de la tabla anterior muestran que $bcond_B(J(B,G))$ es una buena aproximación de $cond_B(J(B,G))$ ya que la cota $\mathbf{u}(1+bcond_B(J(B,G)))$ es tan sólo un poco más grande que los errores forward producidos por el Algoritmo 3.1.2 en un amplio conjunto de ejemplos.

La presencia de valores de fm ligeramente mayores que 1 puede explicarse por el hecho de que no han sido considerados los errores que surgen de calcular los datos de entrada B y G, y aunque son de la misma magnitud (ver Observación 3.1.7), los errores forward pueden verse incrementados por un factor 3.

3.2. Estabilidad y condicionamiento de la factorización LU sin pivote de matrices tridiagonales

En esta sección estudiamos la estabilidad y condicionamiento de la factorización LU sin pivote de matrices tridiagonales generales. Como ya comentamos al inicio de este capítulo, en el caso particular en que la matriz tridiagonal es una matriz mónica de Jacobi J, los factores L y U que se obtienen, contienen los parámetros de relaciones algebraicas entre la sucesión de polinomios $\{P_n\}$, asociada a la matriz J, y la sucesión $\{P_n^*\}$ de polinomios núcleo. Sin embargo, el contenido de esta sección es de aplicación mucho más amplia ya que la factorización LU sin pivote tiene una gran importancia por sí misma en el ámbito del Algebra Lineal Numérica. De ahí, que los desarrollos se hagan en un contexto general.

3.2.1. Introducción.

La factorización LU es una de las factorizaciones matriciales más importantes que aparecen en Análisis Numérico [38]. Tradicionalmente, la factorización LU ha sido aplicada a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, mientras que en la resolución de problemas espectrales se ha preferido el uso de factorizaciones ortogonales debido a sus excelentes propiedades de estabilidad [38]. Sin embargo, en la última década, la factorización LU ha sido utilizada para resolver problemas espectrales estructurados [26], [61]. Para la mayoría de las aplicaciones relacionadas con la resolución de sistemas lineales es el error backward y no el error forward de la factorización LU lo que importa, y para la aplicación de LU al cálculo de valores singulares con alta precisión relativa lo que se necesita es calcular los factores LU con errores forward pequeños [26]. La cuestión acerca de cuán grandes son los errores forward puede responderse combinando errores backward con una adecuada teoría de perturbaciones de la factorización LU. Esta sección presenta una teoría de perturbaciones en componentes fuertemente estructurada de la factorización LU sin pivote de matrices tridiagonales. Aunque el uso de estrategias de pivotaje es común para estabilizar el algoritmo Gaussiano para la factorización LU, en el caso de matrices tridiagonales puede ser necesario preservar la estructura del problema en algunos escenarios. Por ejemplo, para resolver el problema tridiagonal no simétrico de autovalores con algoritmos tipo *qd* [61], o en muchos de los problemas relacionados con polinomios ortogonales que aparecen en esta tesis. Esto impide el uso de pivotaje.

La sensibilidad de la factorización LU de matrices generales ha sido estudiada por otros autores. Barrlund presentó un análisis en norma [5], Sun dió un análisis en componentes [69], y Stewart introdujo un desarrollo perturbativo a primer orden, así como cotas de los términos de segundo orden [68, 67]. Estos autores obtuvieron cotas superiores para la perturbación de los factores LU. Expresiones de los números de condición en norma, i.e., cotas superiores óptimas de primer orden de los factores LU han sido presentadas por Chang y Paige en [21]. En este capítulo, mejoramos y extendemos los resultados anteriores para el caso de matrices tridiagonales haciendo uso de la estructura del problema. Más aún, por primera vez en este problema, trabajamos con dos tipos diferentes de perturbaciones en componentes de la matriz tridiagonal: perturbaciones relativas pequeñas de cada entrada de la matriz, y perturbaciones pequeñas de cada entrada del tipo que aparece en el análisis del error backward del algoritmo usual para la factorización LU. Demostramos que los números de condición con respecto a estos dos tipos de perturbaciones son de la misma magnitud, lo cual implica que el algoritmo usual para calcular la factorización LU es *forward estable* de acuerdo a la definición que aparece en [44, p. 9]. Encontramos expresiones explícitas de estos números de condición que pueden ser calculados en $6n$ flops para una matriz $n \times n$.

La referencia [22, §4.2] no se ocupa de la factorización LU pero está relacionada con este trabajo ya aborda el condicionamiento de la factorización de Cholesky de matrices tridiagonales definidas positivas. En particular, se demuestra que los números de condición para perturbaciones pequeñas en norma bajo perturbaciones generales y tridiagonales son de la misma magnitud. Sin embargo, en ese trabajo no se considera la factorización LU ni se analizan los números de condición en componentes, tareas que se realizan en nuestro trabajo. Además, nosotros comparamos dos tipos de números de condición estructurados. Los resultados de nuestro trabajo pueden ser extendidos a números de condición respecto a perturbaciones pequeñas en norma y a la factorización de Cholesky pero en esta memoria no nos ocuparemos de esa tarea.

3.2.2. Notación y Algoritmo.

Introducimos ahora la notación usada en el resto de la sección así como el Algoritmo 3.2.1 que es el algoritmo clásico para la factorización LU tridiagonal.

Consideremos la matriz tridiagonal de orden n,

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Por simplicidad, usaremos frecuentemente la siguiente notación

$$\text{tridiag}[c, a, b] := T,$$
$$c = [c_1, ..., c_{n-1}]^T, \; a = [a_1, ..., a_n]^T, \; b = [b_1, ..., b_{n-1}]^T.$$

Las primeras $n-1$ submatrices principales de T son no singulares si y solo si T tiene factorización LU única, $T = LU$, donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_n \end{bmatrix}.$$

También usaremos una notación simplificada para las matrices bidiagonales L y U:

$$\text{bidiagl}[l, ones] := L, \quad \text{bidiagu}[u, b] := U,$$
$$l = [l_1, ..., l_{n-1}]^T, \quad u = [u_1, ..., u_n]^T, \quad b = [b_1, ..., b_{n-1}]^T.$$

El código MATLAB que calcula las matrices L y U es:

Algoritmo 3.2.1 *Dada la matriz tridiagonal* $T = \text{tridiag}[c, a, b]$*, este algoritmo calcula la factorización LU sin pivote de* T*.*

```
u(1)=a(1)
for i=1:n-1
   l(i)=c(i)/u(i)
   u(i+1)=a(i+1)-l(i)*b(i)
end
```

El coste computacional del Algoritmo 3.2.1 es $3(n-1)$ flops.

3.2.3. Análisis del error backward

En esta subsección, presentamos dos teoremas relativos a los errores backward del algoritmo 3.2.1: el primero, Teorema 3.2.1, presenta una ligera mejora del resultado backward usual para LU tridiagonal [44, § 9.6] al tener en cuenta que las entradas de U en las posiciones $(i, i+1)$ son exactamente b_i. Más aún, este teorema muestra que el error backward en componentes en las posiciones $(i+1, i)$ está acotado por $\mathbf{u}$; el segundo, Teorema 3.2.2, es un resultado de error mixto *forward-backward*, es decir, un teorema en el que tanto las entradas como las salidas tienen que ser perturbadas para obtener una factorización LU exacta. Este último resultado es nuevo, según lo que nosotros conocemos, pero resultados semejantes han sido demostrados para la factorización simétrica LDL^T [27, Teorema 4.4.5], o para un paso del algoritmo *dqds* [31, 61].

En lo que sigue, supondremos que los elementos de la matriz tridiagonal T son números reales en punto flotante. Los mismos resultados que probaremos para matrices tridiagonales reales se cumplen para matrices complejas con el coste de incrementar las cotas por un factor entero pequeño [44, § 3.6].

En el análisis de estabilidad usaremos el modelo de error convencional para la aritmética en punto flotante (ver Sección 3.1.4). Supondremos la ausencia de "overflow", "underflow", o división por cero. Finalmente, la norma $\|A\|$ de una matriz A denota la "norma del máximo": $\|A\| = \text{máx}_{ij} |a_{ij}|$. Es bien sabido que esta norma no es consistente, pero para matrices "sparse"(o huecas) es una elección simple y apropiada.

Teorema 3.2.1 *Si el Algoritmo 3.2.1 se aplica a la matriz tridiagonal de orden n, $T = \text{tridiag}[c, a, b]$ entonces, los factores L, U calculados, $\widehat{L} = \text{bidiagl}[\hat{l}, ones]$ y $\widehat{U} = \text{bidiagu}[\hat{u}, b]$, satisfacen*

$$\text{tridiag}[c + \Delta c, a + \Delta a, b] = \widehat{L}\widehat{U}, \quad |\Delta c| \leq \mathbf{u}\,|c|,\ |\Delta a| \leq \mathbf{u}\,\text{diag}(|\widehat{L}||\widehat{U}|),$$

donde $\text{diag}(|\widehat{L}||\widehat{U}|)$ *denota la diagonal principal de* $|\hat{L}||\hat{U}|$.

Demostración. Para las cantidades calculadas, se tiene

$$\hat{l}_i = \frac{c_i}{\hat{u}_i}(1 + \varepsilon_i), \quad |\varepsilon_i| \leq \mathbf{u}.$$

Por tanto, $|c_i - \hat{u}_i \hat{l}_i| \leq |c_i|\mathbf{u}$, lo cual prueba el teorema para las entradas $(i+1, i)$.

Más aún,

$$\hat{u}_{i+1}(1 + \delta_i) = a_{i+1} - \hat{l}_i b_i (1 + \eta_i), \quad |\delta_i| \leq \mathbf{u},\ |\eta_i| \leq \mathbf{u}.$$

Entonces, $|a_{i+1} - \hat{u}_{i+1} - \hat{l}_i b_i| \leq (|\hat{u}_{i+1}| + |\hat{l}_i b_i|)\mathbf{u}$, lo cual prueba el teorema. $\square$

Como ocurre con el resultado estándar para la factorización LU, el teorema previo no implica el resultado ideal $|\Delta c| \leq \mathbf{u}\,|c|$, $|\Delta a| \leq \mathbf{u}\,|a|$ (ver [44, § 9.6], sobre tipos especiales de matrices para las que estas relaciones ideales se verifican). Sin embargo, un resultado de este tipo puede obtenerse si la salida del Algoritmo 3.2.1 se perturba también. En este sentido, el Teorema 3.2.2 prueba que el Algoritmo 3.2.1 es *estable en el sentido mixto forward-backward* o, en la terminología de [44, p. 7], *numéricamente estable*. Obsérvese que el Algoritmo 3.2.1 toma como entradas $\{c, a, b\}$, es decir, las tres diagonales de la matriz tridiagonal T, y produce las salidas en punto flotante $\{\hat{u}, \hat{l}\}$. En el Teorema 3.2.2, introducimos tres vectores ideales $\tilde{c}$, $\tilde{\hat{u}}$ y $\tilde{\hat{l}}$, de modo que, en aritmética exacta, el Algoritmo 3.2.1 generaría los vectores $\{\tilde{\hat{u}}, \tilde{\hat{l}}\}$ a partir de $\{\tilde{c}, a, b\}$. Entonces, probamos que $\tilde{c}$, $\tilde{\hat{u}}$ y $\tilde{\hat{l}}$ son pequeñas perturbaciones relativas en componentes de c, $\hat{u}$ y $\hat{l}$, respectivamente.

Teorema 3.2.2 *Sean* $\widehat{L} = \text{bidiagl}[\hat{l}, ones]$ *y* $\widehat{U} = \text{bidiagu}[\hat{u}, b]$ *los factores* L *y* U *calculados por el Algoritmo 3.2.1 aplicado a la matriz tridiagonal de orden* n, $T = \text{tridiag}[c, a, b]$, *entonces, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\{c, a, b\} \arrow[r, "\textit{LU calculada}"] \arrow[d, "\text{Cambio relativo } 3\mathbf{u} \text{ en c}"'] & \{\hat{u}, \hat{l}\} \\
\{\tilde{c}, a, b\} \arrow[r, "\textit{LU exacta}"'] & \{\tilde{\hat{u}}, \tilde{\hat{l}}\} \arrow[u, "\text{Cambio relativo } \mathbf{u} \text{ en } \tilde{\hat{u}} \text{ y } \tilde{\hat{l}}"']
\end{tikzcd}$$

donde, para todo i, $\tilde{c}_i$ *se obtiene a partir de* c_i *mediante un cambio relativo menor que* $3\mathbf{u}$, *y* $\tilde{\hat{u}}_i$ *(resp.* $\tilde{\hat{l}}_i$*) se obtiene a partir de* $\hat{u}_i$ *(resp.* $\hat{l}_i$*) mediante un cambio relativo inferior a* $\mathbf{u}$.

Observación 3.2.1 *En este teorema, por simplicidad,se ignoran los términos* $O(\mathbf{u}^2)$.

DEMOSTRACIÓN. Las cantidades calculadas satisfacen

$$\hat{l}_i = \frac{c_i}{\hat{u}_i(1+\epsilon_i)}, \quad |\epsilon_i| \leq \mathbf{u}, \tag{3.48}$$

$$\hat{u}_{i+1}(1+\delta_i) = a_{i+1} - b_i \hat{l}_i (1+\eta_i), \quad |\delta_i| \leq \mathbf{u}, \quad |\eta_i| \leq \mathbf{u}. \tag{3.49}$$

Definiendo

$$\tilde{c}_i := c_i \frac{(1+\delta_{i-1})(1+\eta_i)}{1+\epsilon_i},$$

$$\tilde{\hat{l}}_i := \hat{l}_i(1+\eta_i) \quad \text{y} \quad \tilde{\hat{u}}_i := \hat{u}_i(1+\delta_{i-1}),$$

se deducen las siguientes relaciones exactas a partir de (3.48) y (3.49)

$$\tilde{\hat{l}}_i = \frac{\tilde{c}_i}{\tilde{\hat{u}}_i}, \quad \text{y} \quad \tilde{\hat{u}}_{i+1} = a_{i+1} - b_i \tilde{\hat{l}}_i.$$

□

El Teorema 3.2.2 puede reescribirse en una forma más familiar que muestra que el Algoritmo 3.2.1 es estable en componentes en el sentido mixto forward-backward o simplemente, estable:

$$T + \Delta T = (\hat{L} + \Delta\hat{L})(\hat{U} + \Delta\hat{U}), \quad |\Delta T| \leq 3\mathbf{u}\,|T|,\ |\Delta\hat{L}| \leq \mathbf{u}\,|\hat{L}|,\ |\Delta\hat{U}| \leq \mathbf{u}\,|\hat{U}|.$$

El Teorema 3.2.2 también indica que el Algoritmo 3.2.1 no es backward estable, como se probó en el Teorema 3.2.1. Sin embargo, produce salidas con errores de magnitudes semejantes a las producidas por un método backward estable, i.e., el Algoritmo 3.2.1 es *forward estable* de acuerdo con [44, p. 9]. Sin embargo, aún no podemos estimar la magnitud de los errores. Para ello es necesario multiplicar el error backward por un *número de condición* apropiado.

3.2.4. Condicionamiento: componentes vs. componentes.

Una de las reglas más útiles en Algebra Lineal Numérica dice que el error forward producido por un algoritmo puede acotarse por el error backward multiplicado por el número de condición. En la sección previa hemos analizado los errores backward; ahora estudiaremos la sensibilidad de la factorización LU tridiagonal sin pivote. Analizamos el cambio relativo en componentes de los factores L y U bajo dos tipos de perturbaciones en componentes. En concreto, se definen dos números de condición de la factorización LU (Definición 4.2.1), expresados en una forma explícitamente calculable (ver Teorema 3.2.3 y Definiciones 3.2.2 y 3.2.3), se demuestra que son de la misma magnitud (ver Teorema 3.2.4), y, finalmente, se prueba que son invariantes bajo semejanzas diagonales (Teorema 3.2.5).

Sea $T = \text{tridiag}[c, a, b]$ una matriz tridiagonal. Consideraremos dos tipos de perturbaciones de la matriz T:

- Perturbaciones asociadas al error backward encontrado en el Teorema 3.2.1. Esto implica que el vector b no es perturbado.

- Perturbaciones relativas en componentes en c y a, i.e., $|\Delta c| \leq \epsilon|c|$ y $|\Delta a| \leq \epsilon|a|$, con ϵ pequeño, y b no perturbado, ya que el Teorema 3.2.2 mantiene b fijo [2].

Como ya hemos comentado en la sección anterior, la sensibilidad de un problema se mide usando el concepto de número de condición, es decir, el cociente entre el cambio relativo en la solución y el cambio relativo en los datos. En nuestro caso, el análisis del error backward motiva la medición en componentes del cambio en los datos (matriz T), pero podemos medir el cambio relativo de los factores L y

[2] Con el coste de complicar algo el análisis, es posible considerar perturbaciones $|\Delta b| \leq \epsilon|b|$ del vector b. Esto puede incrementar los números de condición que vamos a definir en un factor 2 a lo más. Obsérvese que si T es una matriz de números reales que tiene que ser almacenada en un ordenador, entonces aparecen errores de redondeo de magnitud $\mathbf{u}$ en b.

U en componentes o en norma. En esta subsección, consideraremos el cambio en componentes y en la siguiente, se considerará el cambio en norma.

Dado que consideramos dos tipos diferentes de perturbaciones, definimos también dos números de condición diferentes:

Definición 3.2.1 *Sean*

$$T = \text{tridiag}[c, a, b] = \text{bidiagl}[l, ones]\, \text{bidiagu}[u, b] = LU$$

y

$$\text{tridiag}[c + \Delta c, a + \Delta a, b] = \text{bidiagl}[l + \Delta l, ones]\, \text{bidiagu}[u + \Delta u, b]$$

las factorizaciones LU únicas de dos matrices tridiagonales de orden n. Definimos los números de condición

$$cond_B(T) := \lim_{\epsilon \to 0} \sup \left\{ \max_k \left\{ \frac{|\Delta u_k|}{\epsilon |u_k|}, \frac{|\Delta l_k|}{\epsilon |l_k|} \right\} : |\Delta a| \leq \epsilon\, \text{diag}(|L||U|),\ |\Delta c| \leq \epsilon |c| \right\}$$

y

$$cond_C(T) := \lim_{\epsilon \to 0} \sup \left\{ \max_k \left\{ \frac{|\Delta u_k|}{\epsilon |u_k|}, \frac{|\Delta l_k|}{\epsilon |l_k|} \right\}\ :\ |\Delta a| \leq \epsilon\, |a|,\ |\Delta c| \leq \epsilon\, |c| \right\},$$

donde todo cociente $x/0$ es considerado cero si $x = 0$ e infinito en cualquier otro caso.

Observación 3.2.2 *En la definición anterior debe sobreentenderse que*

$$\max_k \left\{ \frac{|\Delta u_k|}{\epsilon |u_k|}, \frac{|\Delta l_k|}{\epsilon |l_k|} \right\} = \max \left\{ \frac{|\Delta u_1|}{\epsilon |u_1|}, \ldots, \frac{|\Delta u_n|}{\epsilon |u_n|}, \frac{|\Delta l_1|}{\epsilon |l_1|}, \ldots, \frac{|\Delta l_{n-1}|}{\epsilon |l_{n-1}|} \right\}.$$

Esta notación abreviada será usada con frecuencia en el resto de la sección.

Observación 3.2.3 *La suposición de que la factorización LU de T es única implica que $u_k \neq 0$, para $1 \leq k \leq n-1$. Nótese que $l_k = 0$ si y solo si $c_k = 0$, lo cual nos lleva a $\Delta c_k = 0$, $l_k + \Delta l_k = 0$ y $\Delta l_k = 0$. Este hecho complica algo las expresiones de los números de condición que obtendremos. A lo largo de esta sección utilizamos el convenio de que todo cociente del tipo $x/0$ vale cero si $x = 0$ e infinito en otro caso.*

Observación 3.2.4 *Resulta claro, a partir de la definición 3.2.1, cómo definir números de condición independientes para L y para U. También resulta obvio, a partir de los siguientes desarrollos, cómo obtener expresiones explícitas de esos números de condición y cómo calcularlos por separado.*

Nótese que $cond_B(T)$ y $cond_C(T)$ son números de condición "locales" que pueden usarse para estimar los errores forward a primer orden en ϵ. Así, $\mathbf{u}\, cond_B(T)$

es, por el Teorema 3.2.1, una cota superior a primer orden del máximo error relativo en componentes de la salida del Algoritmo 3.2.1. Lo mismo ocurre esencialmente con $3\mathbf{u}\, cond_C(T)$ por el Teorema 3.2.2, porque la perturbación en la salida que aparece en este teorema cambia, a lo sumo, el último dígito. La observación anterior sugiere, aunque no prueba, que $cond_B(T)$ y $cond_C(T)$ deberían ser de la misma magnitud, o en caso contrario, una de las cotas previas sería mucho más grande que la otra. Esto será probado en el Teorema 3.2.4. Finalmente, obsérvese que $|\Delta a| \leq \mathbf{u}\, \mathrm{diag}(|\widehat{L}||\widehat{U}|)$ aparece en el Teorema 3.2.1, mientras que $|\Delta a| \leq \epsilon\, \mathrm{diag}(|L||U|)$ aparece en la definición de $cond_B(T)$. Sin embargo, esto no provoca ninguna diferencia dado que, en esta definición, $\epsilon \to 0$.

El resto de esta subsección está organizado como sigue: en la Subsección 3.2.4.1 daremos algunos resultados auxiliares que nos conducirán, en la Subsección 3.2.4.2, a la expresión explícita de ambos números de condición, así como a probar que son de la misma magnitud. Esto unido al hecho de que los números de condición pueden ser calculados en $6n$ flops son algunos de los resultados más importantes de esta sección. En la Subsección 3.2.4.3 probaremos que ambos números de condición son invariantes bajo transformaciones diagonales.

3.2.4.1. Resultados auxiliares.

La notación introducida en la Definición 3.2.1 será usada a lo largo de esta subsección. El principal objetivo es obtener expresiones de las componentes de los vectores Δl y Δu en función de las componentes de Δa y Δc. Teniendo en cuenta que los números de condición son definidos en el límite $\epsilon \to 0$, los términos de segundo orden en ϵ no se consideran. Debería recordarse que

$$u_1 + \Delta u_1 = a_1 + \Delta a_1, \tag{3.50}$$

$$l_i + \Delta l_i = \frac{c_i + \Delta c_i}{u_i + \Delta u_i}, \quad i = 1 : n-1, \tag{3.51}$$

$$u_{i+1} + \Delta u_{i+1} = a_{i+1} + \Delta a_{i+1} - (l_i + \Delta l_i) b_i, \quad i = 1 : n-1. \tag{3.52}$$

Estas expresiones se obtienen al expresar las sentencias del Algoritmo 3.2.1 para los elementos de la matriz perturbada.

Observación 3.2.5 *En lo que sigue, suponemos que todo término que contenga u_0, l_0, c_0, a_0 ó b_0 es cero. Más aún, $\Delta u_0 = \Delta l_0 = \Delta c_0 = \Delta a_0 = 0$.*

En el siguiente lema y en el resto de los resultados de esta sección, nos centramos en el cambio de u_k. El cambio de l_k se obtiene a partir del cambio de u_k y del cambio en los datos usando (3.51).

Lema 3.2.1 *La siguiente relación de recurrencia se obtiene a primer orden:*

$$\Delta u_k = \Delta a_k - \frac{b_{k-1}}{u_{k-1}} (\Delta c_{k-1} - l_{k-1} \Delta u_{k-1}), \quad 1 \leq k \leq n, \tag{3.53}$$

y además,

$$\Delta l_k = l_k \left(\frac{\Delta c_k}{c_k} - \frac{\Delta u_k}{u_k} \right), \quad 1 \leq k \leq n-1. \tag{3.54}$$

Demostración. Como $u_1 = a_1$, entonces $\Delta u_1 = \Delta a_1$. Más aún, a primer orden,

$$l_k + \Delta l_k = \frac{c_k + \Delta c_k}{u_k + \Delta u_k} = \frac{c_k}{u_k} \left(1 + \frac{\Delta c_k}{c_k} - \frac{\Delta u_k}{u_k} \right) = l_k \left(1 + \frac{\Delta c_k}{c_k} - \frac{\Delta u_k}{u_k} \right),$$

obteniéndose

$$\Delta l_k = l_k \left(\frac{\Delta c_k}{c_k} - \frac{\Delta u_k}{u_k} \right) = \frac{\Delta c_k}{u_k} - \frac{l_k}{u_k} \Delta u_k. \tag{3.55}$$

Por otro lado,

$$\Delta u_{k+1} = \Delta a_{k+1} - b_k \Delta l_k \tag{3.56}$$

se sigue de (3.52). Si reemplazamos (3.55) en (3.56), se deduce

$$\Delta u_{k+1} = \Delta a_{k+1} - \frac{b_k}{u_k} \Delta c_k + \frac{b_k l_k}{u_k} \Delta u_k.$$

□

En el lema 3.2.1 se presenta una relación de recurrencia para Δu_k. En el lema 3.2.2 se obtiene una expresión explícita de Δu_k a partir de la relación de recurrencia.

Lema 3.2.2 *La siguiente expresión se obtiene a primer orden.*

$$\Delta u_k = \Delta a_k - \frac{b_{k-1}}{u_{k-1}} \Delta c_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\Delta a_i - \frac{b_{i-1}}{u_{i-1}} \Delta c_{i-1} \right) \prod_{j=i}^{k-1} \frac{b_j l_j}{u_j}, \quad k \geq 1,$$

donde suponemos que la suma en la expresión de Δu_1 vale cero.

Demostración. El Lema 3.2.1 produce el resultado para $k = 1, 2$, y la demostración del resultado general se sigue fácilmente por inducción. □

Para encontrar una expresión explícita de $cond_B(T)$ y $cond_C(T)$ es necesario conseguir una cota de $|\delta u_k|$ y $|\delta l_k|$. En primer lugar, consideramos las perturbaciones asociadas al error backward que aparecen en la definición de $cond_B(T)$. Para simplificar el enunciado de algunos resultados, definimos la siguiente cantidad:

Definición 3.2.2 *Para $k = 1 : n$*

$$cond_B(u_k) := 1 + \frac{2|l_{k-1} b_{k-1}|}{|u_k|} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(1 + \frac{2|l_{i-1} b_{i-1}|}{|u_i|} \right) \prod_{j=i}^{k-1} \left| \frac{b_j l_j}{u_{j+1}} \right|.$$

Lema 3.2.3 *Si se verifica que* $|\Delta a_k| \leq \epsilon(|u_k| + |l_{k-1}b_{k-1}|)$ *y* $|\Delta c_k| \leq \epsilon|c_k|$ *para* $k \geq 1$*, entonces a primer orden,*

$$\left|\frac{\Delta u_k}{u_k}\right| \leq \epsilon\, cond_B(u_k), \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$\left|\frac{\Delta l_k}{l_k}\right| \leq \begin{cases} \epsilon\,(1 + cond_B(u_k)) & si\ c_k \neq 0, \\ 0 & si\ c_k = 0, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Demostración. Basta con tomar valores absolutos en la expresión de Δu_k que aparece en el Lema 3.2.2, aplicar la desigualdad triangular y dividir por $|u_k|$. El resultado para Δl_k se deduce de (3.54) y del hecho de que $c_k = 0$ implica que $l_k = 0$ y $\Delta l_k = 0$. □

Observación 3.2.6 *Es fácil probar que* $cond_B(u_k)$ *puede reescribirse en la forma más compacta*

$$cond_B(u_k) = 1 + 3\sum_{i=1}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-1}\left|\frac{b_j l_j}{u_{j+1}}\right|. \tag{3.57}$$

En el siguiente lema, aparece una fórmula recurrente para el cálculo de $cond_B(u_k)$ que será usada para estimar el costo de calcular $cond_B(T)$.

Lema 3.2.4

$$cond_B(u_1) = 1, \quad cond_B(u_k) = 1 + \left|\frac{b_{k-1}l_{k-1}}{u_k}\right|(2 + cond_B(u_{k-1})), \quad k = 2:n.$$

A continuación, consideramos las perturbaciones en componentes que aparecen en la definición de $cond_C(T)$. Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 3.2.3 *Para* $k = 1:n$

$$\begin{aligned} cond_C(u_k) \;:=\; & \left|1 + \frac{l_{k-1}b_{k-1}}{u_k}\right| + \left|\frac{l_{k-1}b_{k-1}}{u_k}\right| \\ & + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\left|1 + \frac{l_{i-1}b_{i-1}}{u_i}\right| + \left|\frac{l_{i-1}b_{i-1}}{u_i}\right|\right)\prod_{j=i}^{k-1}\left|\frac{l_j b_j}{u_{j+1}}\right|. \end{aligned}$$

Lema 3.2.5 *Si se verifica que* $|\Delta a_k| \leq \epsilon|a_k|$ *y* $|\Delta c_k| \leq \epsilon|c_k|$*, para* $k \geq 1$*, entonces a primer orden*

$$\left|\frac{\Delta u_k}{u_k}\right| \leq \epsilon\, cond_C(u_k), \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$\left|\frac{\Delta l_k}{l_k}\right| \leq \begin{cases} \epsilon\,(1 + cond_C(u_k)) & si\ c_k \neq 0, \\ 0 & si\ c_k = 0, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es similar a la del Lema 3.2.3. Para obtener las expresiones finales recuérdese que $a_k = u_k + l_{k-1}b_{k-1}$. □

A continuación se da la correspondiente relación de recurrencia para $cond_C(u_k)$.

Lema 3.2.6

$$cond_C(u_1) = 1,$$

$$cond_C(u_k) = \left|1 + \frac{l_{k-1}b_{k-1}}{u_k}\right| + \left|\frac{l_{k-1}b_{k-1}}{u_k}\right| (1 + cond_C(u_{k-1})), \quad k = 2 : n.$$

3.2.4.2. Números de condición y relaciones entre sus magnitudes

El objetivo de esta subsección es encontrar expresiones explícitas de los números de condición $cond_B(T)$ y $cond_C(T)$, así como probar que tienen la misma magnitud.

Necesitaremos distinguir entre el caso $c_k \neq 0$ y $c_k = 0$. Por ello introducimos la siguiente definición

$$\overline{\delta}_{c_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } c_k \neq 0, \\ 0 & \text{si } c_k = 0, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

A partir de la Definición 3.2.1 y los Lemas 3.2.3 y 3.2.5, resulta obvio que

$$cond_B(T) \leq \text{máx}\{\max_{1\leq k\leq n-1}\{\overline{\delta}_{c_k} + cond_B(u_k)\}, cond_B(u_n)\}, \tag{3.58}$$

$$cond_C(T) \leq \text{máx}\{\max_{1\leq k\leq n-1}\{\overline{\delta}_{c_k} + cond_C(u_k)\}, cond_C(u_n)\}. \tag{3.59}$$

Nótese que $cond_B(u_1) = cond_C(u_1) = 1$ y, por tanto, las cotas anteriores para ambos números de condición son mayores que 1. De hecho, vamos a probar que esas cotas son, precisamente, los números de condición.

Teorema 3.2.3 *Sea*

$$T = \text{tridiag}[c, a, b] = \text{bidiagl}[l, ones]\,\text{bidiagu}[u, b] = LU$$

la factorización LU de la matriz tridiagonal de orden n, T, entonces

$$cond_B(T) = \text{máx}\{\max_{1\leq k\leq n-1}\{\overline{\delta}_{c_k} + cond_B(u_k)\}, cond_B(u_n)\},$$

$$cond_C(T) = \text{máx}\{\max_{1\leq k\leq n-1}\{\overline{\delta}_{c_k} + cond_C(u_k)\}, cond_C(u_n)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos el resultado para $cond_B(T)$. La demostración para $cond_C(T)$ es análoga paso a paso. Tenemos que probar que es posible elegir perturbaciones, Δc_i, para $i = 1 : n-1$, y Δa_i, para $i = 1 : n$, que convierten en igualdad la desigualdad en (3.58), y que son del tipo que aparece en $cond_B(T)$ en la Definición 3.2.1. De hecho, las perturbaciones van a ser elegidas de modo que todas las desigualdades que aparecen en el Lema 3.2.3 se transformen en igualdades a primer orden. Esto implica la igualdad en (3.58).

Las cotas superiores de $|\Delta u_k/u_k|$ y $|\Delta l_k/l_k|$ que aparecen en el Lema 3.2.3 fueron obtenidas a partir de (3.54) y del Lema 3.2.2, usando la desigualdad triangular e imponiendo que $|\Delta a_k| = \epsilon(|u_k| + |l_{k-1}b_{k-1}|)$ y $|\Delta c_k| = \epsilon|c_k|$, para $k \geq 1$. Por tanto, el valor absoluto de las perturbaciones ya está fijado. Sólo tenemos que fijar sus signos de modo que no aparezcan cancelaciones en la ecuación del Lema 3.2.2 y en (3.54). Teniendo en cuenta que el Lema 3.2.2 es equivalente a la relación de recurrencia (3.53), comprobamos que no se producen cancelaciones en (3.53) y (3.54).

El signo de $\Delta a_1 = \Delta u_1$ se elige aleatoriamente. Supongamos que los signos de Δa_j, para $j = 1 : k-1$, y Δc_j, para $j = 1 : k-2$, han sido elegidos de modo que no ocurran cancelaciones en Δu_j, para $j = 1 : k-1$. Nótese que el signo de Δu_{k-1} queda fijado mediante esta selección. Entonces resulta evidente a partir de (3.53) que los signos de Δa_k y Δc_{k-1} pueden ser seleccionados para evitar cancelación en Δu_k. Este procedimiento iterativo da los signos de Δa_j, para $j = 1 : n$, y Δc_j, para $j = 1 : n-1$, de modo que no se producen cancelaciones al calcular Δu_j, para $j = 1 : n$. En particular, no hay cancelación en las expresiones $(\Delta c_j - l_j \Delta u_j)$ para $j = 1 : n-1$, lo cual implica que no hay cancelación en las expresiones (3.55) para Δl_j, $j = 1 : n-1$. $\square$

Observación 3.2.7 *El teorema previo, junto con las Definiciones 3.2.2 y 3.2.3, proporciona expresiones explícitas de* $cond_B(T)$ *y* $cond_C(T)$ *que pueden ser útiles para propósitos teóricos. Sin embargo, para calcular esos números de condición, es preferible usar los Lemas 3.2.4 y 3.2.6. Además,* $cond_B(T)$ *y* $cond_C(T)$ *pueden ser calculados con coste* $6n-7$ *y* $7n-8$ *flops, respectivamente, más* $(n-1)$ *comparaciones para determinar el máximo.*

Observación 3.2.8 *Obsérvese que* $cond_B(u_k)$ *y* $cond_C(u_k)$ *son números de condición relativos para* u_k*. Esto se deduce de la demostración del Teorema 3.2.3. Los correspondientes números de condición para* l_k *son* $1+cond_B(u_k)$ *y* $1+cond_C(u_k)$*, si* $c_k \neq 0$.

Las expresiones que hemos obtenido para $cond_B(T)$ y $cond_C(T)$ están escritas en función de los elementos de L y U. Sería preferible expresar esos números de condición usando sólo los datos del problema, i.e., los elementos de T. Sin embargo, eso no parece posible y, debemos señalar que, hasta ahora, todas las cotas de teoría de perturbaciones obtenidas para la factorización LU de matrices generales, llevan implícitamente la L y la U [5, 21, 68, 67, 69]. Los números de condición pueden considerarse funciones de las cantidades $l_{k-1}b_{k-1}/u_k$, para $k = 2 : n$, y estas cantidades pueden ser expresadas también del modo siguiente

$$\frac{l_{k-1}b_{k-1}}{u_k} = \frac{a_k}{u_k} - 1,$$

lo cual significa que si $0 \leq (a_k/u_k) \leq 2$ para todo k, entonces el valor de $cond_B(T)$ está acotado por $3n-2$, teniendo en cuenta la Observación 3.2.6, y $cond_C(T)$ es de magnitud semejante. Sin embargo, $cond_B(T)$ y $cond_C(T)$ pueden ser moderados aunque no se verifique $0 \leq (a_k/u_k) \leq 2$ para algún k. Obsérvese también que un crecimiento importante en los elementos de u_k con respecto a a_k no conlleva valores grandes de los números de condición.

Ahora, emprendemos la tarea de comparar las magnitudes de los números de condición $cond_B(T)$ y $cond_C(T)$.

Lema 3.2.7 *Para $1 \leq k \leq n$,*

$$cond_C(u_k) \leq cond_B(u_k) \leq 3\, cond_C(u_k).$$

DEMOSTRACIÓN. De las Definiciones 3.2.2 y 3.2.3, se obtiene

$$cond_C(u_k) \leq cond_B(u_k).$$

Nótese que, para todo número real a, se verifica $|1+a| + |a| \geq 1 - |a| + |a| = 1$. Entonces,

$$cond_C(u_k) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-1} \left| \frac{b_j l_j}{u_{j+1}} \right|,$$

y, por la Observación 3.2.6,

$$3\, cond_C(u_k) \geq 3 + 3 \sum_{i=1}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-1} \left| \frac{b_j l_j}{u_{j+1}} \right| \geq cond_B(u_k).$$

□

Como una consecuencia del lema previo, se obtiene uno de los resultados más relevantes de este capítulo.

Teorema 3.2.4 *Para toda matriz tridiagonal T de orden n que tenga factorización LU única*

$$cond_C(T) \leq cond_B(T) \leq 3\, cond_C(T).$$

Terminamos esta subsección señalando que el Teorema 3.2.4 implica, incluso en la ausencia del Teorema 3.2.2, que el Algoritmo 3.2.1 para calcular la factorización LU sin pivote de matrices tridiagonales es *forward estable* en el sentido de [44, p. 9]:

$$\max_i \left\{ \frac{|\hat{l}_i - l_i|}{|l_i|}, \frac{|\hat{u}_i - u_i|}{|u_i|} \right\} \leq \mathbf{u}\, cond_B(T) + O(\mathbf{u}^2) \leq 3\, \mathbf{u}\, cond_C(T) + O(\mathbf{u}^2).$$

Entonces, la magnitud de los errores forward en la salida del Algoritmo 3.2.1 es "la mejor que cabría esperar".

3.2.4.3. Invarianza de los números de condición bajo semejanzas diagonales

El siguiente teorema establece que los números de condición introducidos en la Definición 3.2.1 no cambian bajo semejanzas diagonales.

Teorema 3.2.5 *Sea T una matriz tridiagonal de orden n con factorización LU única, y sean D_1 y D_2 matrices diagonales no singulares, entonces*

$$cond_B(T) = cond_B(D_1TD_2) \quad \text{y} \quad cond_C(T) = cond_C(D_1TD_2).$$

Demostración. Sean $T = \text{tridiag}[c, a, b]$ y $T^D = D_1TD_2 = \text{tridiag}[c^D, a^D, b^D]$ las matrices tridiagonales en consideración, y sean $d_k^{(1)}$ y $d_k^{(2)}$ los elementos de la diagonal principal de D_1 y D_2, respectivamente. Obsérvese que $c_k = 0$ si y solo si $c_k^D = 0$. Por el Teorema 3.2.3 y las Definiciones 3.2.2 y 3.2.3, es obvio que el teorema queda probado si demostramos que las cantidades $l_{k-1}b_{k-1}/u_k$, para $k = 2 : n$, no cambian bajo semejanzas diagonales. Para probar esto, nótese que si $T = LU$ es la factorización LU de T, entonces $T^D = (D_1LD_1^{-1})(D_1UD_2) \equiv L^DU^D$ es la factorización LU de T^D. Entonces, los elementos de U^D y L^D son

$$u_k^D = u_k d_k^{(1)} d_k^{(2)} \quad \text{y} \quad l_k^D = l_k \frac{d_{k+1}^{(1)}}{d_k^{(1)}}, \quad k \geq 1.$$

Teniendo en cuenta que $b_k^D = b_k d_k^{(1)} d_{k+1}^{(2)}$, se obtiene

$$\frac{l_{k-1}^D b_{k-1}^D}{u_k^D} = \frac{l_{k-1}b_{k-1}}{u_k}.$$

□

3.2.5. Condicionamiento: normas vs. componentes.

Esta sección corre paralela a la Sección 3.2.4. La diferencia está en que el cambio en los factores L y U es medido en norma, aunque consideramos los mismos dos tipos de perturbaciones en componentes que en la sección previa. El análisis del error backward del Algoritmo 3.2.1 fija el tipo de perturbaciones que hemos considerado, pero es bien conocido que, para muchas aplicaciones, es suficiente tener errores forward relativos pequeños en *norma*. En esta situación, los dos números de condición que definimos son también de la misma magnitud pero no son invariantes bajo semejanzas diagonales. Introducimos a continuación los nuevos números de condición.

Definición 3.2.4 *Sean*

$$T = \text{tridiag}[c, a, b] = LU$$

y

$$T + \Delta T = \text{tridiag}[c + \Delta c, a + \Delta a, b] = (L + \Delta L)(U + \Delta U)$$

las factorizaciones LU únicas de dos matrices tridiagonales de orden n. Definimos los números de condición

$$\begin{aligned} ncond_B(T) \;&:=\; \lim_{\epsilon \to 0} \sup \left\{ \text{máx} \left\{ \frac{\|\Delta U\|}{\epsilon \|U\|}, \frac{\|\Delta L\|}{\epsilon \|L\|} \right\} : |\Delta a| \leq \epsilon \, \text{diag}(|L||U|), \right. \\ &\qquad\qquad \left. |\Delta c| \leq \epsilon |c| \right\}, \end{aligned}$$

$$ncond_C(T) := \lim_{\epsilon \to 0} \sup \left\{ \text{máx} \left\{ \frac{\|\Delta U\|}{\epsilon \|U\|}, \frac{\|\Delta L\|}{\epsilon \|L\|} \right\} \, : \, |\Delta a| \leq \epsilon \, |a|, \, |\Delta c| \leq \epsilon \, |c| \right\}.$$

En las definiciones previas puede usarse cualquier tipo de norma, sin embargo, por simplicidad, nos centraremos en la “norma del máximo”definida en la Observación 3.1.1. Esta sección corre paralela a la Sección 3.2.4, excepto por el hecho de que los números de condición $ncond_B$ y $ncond_C$ no son invariantes bajo semejanzas diagonales. Por esta razón, omitiremos la mayoría de los comentarios y demostraciones. Es importante observar que

$$ncond_B(T) \leq cond_B(T) \quad \text{y} \quad ncond_C(T) \leq cond_C(T).$$

Entonces, pueden existir matrices para las que el Algoritmo 3.2.1 produzca errores relativos en norma pequeños pero errores en componentes grandes. Este hecho queda ilustrado en la Sección 3.2.7.

3.2.5.1. Resultados auxiliares para los errores absolutos

Primero consideramos perturbaciones asociadas al error backward.

Lema 3.2.8 *Si se verifica que $|\Delta a_k| \leq \epsilon(|u_k| + |l_{k-1} b_{k-1}|)$ y $|\Delta c_k| \leq \epsilon |c_k|$ para $k \geq 1$, entonces, a primer orden*

$$|\Delta u_k| \leq \epsilon \; ncond_B(u_k), \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$|\Delta l_k| \leq \epsilon \, |l_k| \left(1 + \frac{ncond_B(u_k)}{|u_k|} \right) \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

donde $ncond_B(u_k)$, $1 \leq k \leq n$, queda definido mediante la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} ncond_B(u_1) \;&=\; |u_1|, \\ ncond_B(u_k) \;&=\; |u_k| + |b_{k-1} l_{k-1}| \left(2 + \frac{ncond_B(u_{k-1})}{|u_{k-1}|} \right). \end{aligned} \tag{3.60}$$

Más aún, se verifica la siguiente expresión explícita para $1 \leq k \leq n$:

$$ncond_B(u_k) = |u_k| + 2 \, |l_{k-1} b_{k-1}| + \sum_{i=1}^{k-1} (|u_i| + 2 \, |l_{i-1} b_{i-1}|) \prod_{j=i}^{k-1} \left| \frac{b_j l_j}{u_j} \right|. \tag{3.61}$$

Demostración. La demostración se obtiene aplicando desigualdades triangulares a las expresiones de los Lemas 3.2.1 y 3.2.2, de forma semejante a las demostraciones de los Lemas 3.2.3 y 3.2.4. De hecho, si en estos dos lemas $|u_k| cond_B(u_k)$ se sustituye por $ncond_B(u_k)$, se deduce inmediatamente el Lema 3.2.8. □

A continuación, presentamos, sin demostración, el resultado correspondiente para pequeñas perturbaciones en componentes.

Lema 3.2.9 *Si se verifica $|\Delta a_k| \leq \epsilon |a_k|$ y $|\Delta c_k| \leq \epsilon |c_k|$ para $k \geq 1$, entonces a primer orden*

$$|\Delta u_k| \leq \epsilon \, ncond_C(u_k), \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$|\Delta l_k| \leq \epsilon \, |l_k| \left(1 + \frac{ncond_C(u_k)}{|u_k|}\right) \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

donde $ncond_C(u_k)$, $1 \leq k \leq n$, se define mediante la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} ncond_C(u_1) &= |u_1|, \\ ncond_C(u_k) &= |u_k + b_{k-1} l_{k-1}| + |b_{k-1} l_{k-1}| \left(1 + \frac{ncond_C(u_{k-1})}{|u_{k-1}|}\right) \end{aligned} \tag{3.62}$$

Además, se verifica la siguiente expresión explícita para $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} ncond_C(u_k) &= |u_k + l_{k-1} b_{k-1}| + |l_{k-1} b_{k-1}| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left(|u_i + l_{i-1} b_{i-1}| + |l_{i-1} b_{i-1}|\right) \prod_{j=i}^{k-1} \left|\frac{b_j l_j}{u_j}\right| . \end{aligned} \tag{3.63}$$

3.2.5.2. Números de condición y su equivalencia

Por simplicidad, definamos para $1 \leq k \leq n-1$:

$$ncond_B(l_k) := |l_k| \left(1 + \frac{ncond_B(u_k)}{|u_k|}\right),$$

$$ncond_C(l_k) := |l_k| \left(1 + \frac{ncond_C(u_k)}{|u_k|}\right).$$

La demostración del siguiente teorema es la misma que la del Teorema 3.2.3.

Teorema 3.2.6 *Sea*

$$T = \text{tridiag}[c, a, b] = \text{bidiagl}[l, ones] \, \text{bidiagu}[u, b] = LU$$

la única factorización LU de la matriz tridiagonal de orden n, T, entonces

$$ncond_B(T) = \text{máx} \left\{ \frac{\text{máx}_{1 \leq k \leq n}\{ncond_B(u_k)\}}{\text{máx}_k\{|u_k|, |b_k|\}}, \frac{\text{máx}_{1 \leq k \leq n-1}\{ncond_B(l_k)\}}{\text{máx}_k\{|l_k|, 1\}} \right\},$$

$$ncond_C(T) = \text{máx} \left\{ \frac{\text{máx}_{1 \leq k \leq n}\{ncond_C(u_k)\}}{\text{máx}_k\{|u_k|, |b_k|\}}, \frac{\text{máx}_{1 \leq k \leq n-1}\{ncond_C(l_k)\}}{\text{máx}_k\{|l_k|, 1\}} \right\}.$$

Observación 3.2.9 *Las relaciones de recurrencia (3.60) y (3.62) pueden ser usadas para calcular $ncond_B(T)$ y $ncond_C(T)$ con coste $7(n-1)$ y $8(n-1)$ flops, respectivamente, además de $5n-6$ comparaciones para determinar los máximos.*

Finalmente, demostramos que las magnitudes de $ncond_B(T)$ y $ncond_C(T)$ son semejantes:

Teorema 3.2.7 *Dada cualquier matriz tridiagonal T de orden n con factorización LU única*

$$ncond_C(T) \leq ncond_B(T) \leq 3\, ncond_C(T).$$

Demostración. Como en el caso del Teorema 3.2.4, si probamos

$$ncond_C(u_k) \leq ncond_B(u_k) \leq 3\, ncond_C(u_k), \tag{3.64}$$

entonces, se deduce el Teorema 3.2.7. Si se aplica la desigualdad triangular a (3.63) entonces se obtiene la primera desigualdad de (3.64). Obsérvese que, para cualesquiera números reales x e y, se verifica $|x| + 2|y| \leq |x+y| + 3|y| \leq 3(|x+y| + |y|)$. Si esta desigualdad se aplica a (3.61) entonces obtenemos la segunda desigualdad de (3.64). □

Argumentos semejantes a los realizados al final de la Subsección 3.2.4.2 son aplicables a los errores forward relativos en norma producidos por el Algoritmo 3.2.1 teniendo en cuenta el resultado previo.

3.2.6. Factorización LU de matrices tridiagonales diagonalmente dominantes

En esta sección se considera una importante clase de matrices tridiagonales para las que la factorización LU puede ser calculada con pequeños errores backward y forward en componentes.

Es bien sabido que el algoritmo usual para calcular la factorización LU sin pivote es backward estable en norma cuando se aplica a matrices diagonalmente dominantes por filas o columnas [44, Teorema 9.9]. En el caso de matrices tridiagonales diagonalmente dominantes, el Algoritmo 3.2.1 es backward estable en componentes [44, Teorema 9.13]. No es necesario decir que esto no implica que la salida del Algoritmo 3.2.1 tenga errores forward pequeños. Sin embargo, esto es lo que ocurre si la matriz es simultáneamente diagonalmente dominante por filas *y* columnas y, además, los valores absolutos de las entradas en las posiciones $(i, i+1)$ no están ordenados en orden decreciente. Esto se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.8 *Sea $T = \mathrm{tridiag}[c, a, b]$ una matriz tridiagonal y sea $T = LU$ su única factorización LU. Si T es diagonalmente dominante por filas y columnas y $\max_i\{\left|\frac{b_{i-1}}{b_i}\right|\} \leq 1$ entonces*

$$cond_B(T) \leq 3n-2.$$

Demostración. Si T es diagonalmente dominante por filas entonces $|u_i| \geq |b_i|$, y si T es diagonalmente dominante por columnas, entonces $|l_i| \leq 1$. Por tanto,

$$\left|\frac{b_i l_i}{u_{i+1}}\right| \leq \left|\frac{b_i}{b_{i+1}}\right| \leq 1.$$

Entonces, teniendo en cuenta la Observación 3.2.6,

$$cond_B(u_i) \leq 1 + 3(i-1).$$

El resultado se sigue a partir del Teorema 3.2.3. □

La condición $\max_i\{\left|\frac{b_{i-1}}{b_i}\right|\} \leq 1$ es necesaria. No es difícil encontrar matrices tridiagonales diagonalmente dominantes para las que esta condición no se verifica y $cond_B(T)$ toma valores grandes. El conjunto de matrices que verifican $\max_i\{\left|\frac{b_{i-1}}{b_i}\right|\} \leq 1$ incluye el caso de matrices tridiagonales cuyas entradas en las posiciones $(i, i+1)$ son todas iguales a 1. Este caso aparece con frecuencia en problemas asociados con polinomios ortogonales (matrices mónicas de Jacobi) [32, 33, 15], y en problemas espectrales [61], ya que toda matriz tridiagonal con $b_i \neq 0$, $i = 1 : n-1$, es semejante a una de esas matrices.

3.2.7. Ejemplos numéricos

Los ejemplos numéricos que presentamos en esta sección tienen tres objetivos. En primer lugar, queremos mostrar que los números de condición que hemos definido anteriormente proporcionan una medida fiable de los errores forward en la salida del Algoritmo 3.2.1. En segundo lugar, algunos ejemplos muestran que no hay relación entre el tamaño de los errores backward y forward. De hecho, es posible tener errores backward grandes y errores forward pequeños y viceversa. Para terminar, se presenta un ejemplo en el que los errores forward son grandes en componentes pero pequeños en norma. Esto justifica los desarrollos de la Sección 3.2.5.

En estos experimentos comparamos la salida del Algoritmo 3.2.1 obtenida en aritmética finita con MATLAB 5.3 ($\mathbf{u} = 1{,}11 \times 10^{-16}$), con la salida calculada por el Symbolic Math Toolbox de MATLAB con aritmética de precisión variable de 32 dígitos decimales significativos. Más aún, presentamos resultados separados para los factores L y U, tanto con relación a los errores como a los números de condición. Recordemos en este punto los comentarios que aparecen en la Observación 3.2.4.

Usaremos la siguiente notación: ./ denota, como en MATLAB, la división componente a componente; las letras con sombrero denotan cantidades calculadas con MATLAB, y las letras sin sombrero denotan cantidades calculadas con el Symbolic Math Toolbox. La entrada del algoritmo es la representación en punto flotante de una matriz tridiagonal $T = \text{tridiag}[c, a, b]$, tanto en MATLAB como en el Symbolic Math Toolbox. Los números de condición se obtienen usando los factores calculados $\widehat{L}$ y $\widehat{U}$. Consideraremos las siguientes cantidades:

- errback= $\mathbf{u} \cdot \text{máx}(1, \text{máx}(\text{diag}(|\hat{L}||\hat{U}|)./|a|)$. Esto es, por el Teorema 3.2.1, el máximo error backward en componentes teórico.
- forwardu=$\text{máx}_i(|u_i - \hat{u}_i|/|u_i|)$. Error forward en componentes de U.
- forwardl=$\text{máx}_i(|l_i - \hat{l}_i|/|l_i|)$. Error forward en componentes de L.
- nforwardu $= \|U - \hat{U}\|/\|U\|$. Error forward en norma de U.
- nforwardl $= \|L - \hat{L}\|/\|L\|$. Error forward en norma de L.
- condu $= \text{máx}_{1\leq k\leq n}(cond_B(u_k))$. Número de condición en componentes de U.
- condl $= \text{máx}_{1\leq k\leq n-1}(1 + cond_B(u_k))$. Número de condición en componentes de L. Consideramos matrices con $c_k \neq 0$ para todo k.
- ncondu $= \text{máx}_{1\leq k\leq n}\{ncond_B(u_k)\}/\,\text{máx}_k\{|u_k|, |b_k|\}$. Número de condición en norma de U.
- ncondl $= \text{máx}_{1\leq k\leq n-1}\{ncond_B(l_k)\}/\,\text{máx}_k\{|l_k|, 1\}$. Número de condición en norma de L.

Es importante recordar, al leer los siguientes experimentos, que el producto de $\mathbf{u}$ por un número de condición es, a primer orden, una cota superior del correspondiente error forward. Recuérdense los comentarios al final de la Subsección 3.2.4.2.

3.2.7.1. Ejemplo 1.

En este experimento hemos generado 100 matrices tridiagonales aleatorias de orden 100. Los elementos de las matrices siguen una distribución normal con media cero y varianza diez. Para cada matriz de esta muestra calculamos las razones (forwardu/$\mathbf{u}$ condu) y (forwardl/$\mathbf{u}$ condl). Si estas razones son muy pequeñas, entonces los números de condición sobreestiman los errores reales. En nuestro experimento los valores mínimos y medios para estas cantidades son: mín(forwardu/$\mathbf{u}$ condu) = 0,01, media(forwardu/$\mathbf{u}$ condu) = 0,07, mín(forwardl/$\mathbf{u}$ condl) = 0,01 y media(forwardl/$\mathbf{u}$ condl) = 0,07. Esto significa que los números de condición que hemos estudiado sobreestiman el error forward en componentes máximo, a lo más, por un factor de 100, y, en media, por un factor de 14.

3.2.7.2. Ejemplo 2.

Analizamos el caso de una matriz tridiagonal simétrica y definida positiva T. Las propiedades de esta matriz garantizan la estabilidad backward en componentes del Algoritmo 3.2.1 [44, Teorema 9.12]. En este ejemplo $cond_B(T)$ y

$ncond_B(T)$ son grandes.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{1-2\cdot 10^{-10}} & 0 \\ \sqrt{1-2\cdot 10^{-10}} & 1 & \sqrt{4\cdot 10^{-10}-10^{-13}} \\ 0 & \sqrt{4\cdot 10^{-10}-10^{-13}} & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos los siguientes resultados

errback	1.11e-16
forwardu	3.31e-004
condu	5.998e+013
forwardl	8.27e-008
condl	1.5e+010
nforwardu	1.65e-007
ncondu	3.e+010
nforwardl	8.27e-008
ncondl	1.5e+010

3.2.7.3. Ejemplo 3.

Ahora, consideramos el caso de una matriz tridiagonal con factorización LU backward estable y tal que los módulos de los elementos de la subdiagonal de L son menores que uno, i.e., el pivote parcial no produce ninguna permutación de filas. Incluso en este caso, $cond_B(T)$ y $ncond_B(T)$ son grandes.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}\cdot 10^{8} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{2}{3}+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 10^{8} & 2\cdot 10^{9} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{10}} & 2+2\sqrt{\frac{7}{10}}\cdot 10^{9} \end{bmatrix}.$$

Los valores exactos de los elementos no triviales del factor L son: $l_1 = \sqrt{1/2}$ y $l_2 = \sqrt{7/10}$. Los resultados en este caso son

errback	1.11e-16
forwardu	3.12e+001
condu	4.61e+017
forwardl	3.73e-008
condl	5.51e+008
nforwardu	3.12e-008
ncondu	4.62e+008
nforwardl	3.12e-008
ncondl	4.62e+008

3.2.7.4. Ejemplo 4.

Analizamos ahora el ejemplo de una matriz tridiagonal con error backward grande y números de condición pequeños.

$$T = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{2}\,(\sqrt{5}+10^{-14}) & \sqrt{3}\cdot 10^{-14} & \sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{3}\,(1+10^{-12}) & \sqrt{5}\,10^{-12} \end{bmatrix}.$$

Los resultados obtenidos para esta matriz son

errback	4.97e-002
forwardu	1.45e-016
condu	7.00
forwardl	1.99e-016
condl	5.00
nforwardu	1.15e-016
ncondu	6.92
nforwardl	1.99e-016
ncondl	2.00

3.2.7.5. Ejemplo 5.

El último ejemplo es un caso en que el número de condición $cond_B(T)$ es grande pero $ncond_B(T)$ es pequeño. Este hecho se refleja en la magnitud de los errores forward. Las tres diagonales de $T = \text{tridiag}[c, a, b]$ son:

$$c = [10^{15}\cdot\sqrt{1-2\cdot 10^{-10}}\,,\; 2\cdot 10^{-15}\cdot\sqrt{4\cdot 10^{-10}-10^{-13}}\,]^T,$$

$$a = [10^{15}\,,\; 1\,,\; \frac{10^{-3}}{2} + 4\cdot 10^{-15} - 10^{-18}\,]^T,$$

$$b = [\sqrt{1-2\cdot 10^{-10}}\,,\; \sqrt{4\cdot 10^{-10}-10^{-13}}\,]^T.$$

Los resultados son:

errback	1.11e-016
forwardu	8.27e-008
condu	1.5e+010
forwardl	8.27e-008
condl	1.5e+010
nforwardu	1.66e-032
ncondu	1
nforwardl	1.65e-017
ncondl	3

Capítulo 4

Perturbaciones polinómicas de funcionales bilineales y el problema de simetrización

En el apartado sobre el álgebra de funcionales lineales descrito en el Capítulo 1 (Sección 1.1), definimos el funcional lineal $\pi\mathbf{L}$, donde π es un polinomio y $\mathbf{L}$ es un funcional lineal. Decimos que el funcional $\pi\mathbf{L}$ es una perturbación polinómica de $\mathbf{L}$. En este capítulo retomamos este tema considerando el caso más general de perturbaciones polinómicas de funcionales bilineales.

En particular, vimos que el funcional $\mathbf{xL}$ está vinculado al proceso de simetrización de funcionales lineales (Sección 1.4). Recordemos también que, en el contexto matricial, el funcional lineal $\mathbf{xL}$ está estrechamente relacionado con la transformación de Darboux sin parámetro (Teorema 2.3.1). En lo que sigue analizaremos la vinculación de ciertas perturbaciones polinómicas de funcionales bilineales con el proceso de simetrización y transformaciones tipo Darboux.

Observemos que, en el campo más amplio de los funcionales bilineales, la matriz de momentos pierde la estructura de Hankel y ya no es posible hablar de relación de recurrencia a tres términos asociada a una sucesión de polinomios mónicos ortogonales. Desaparece la figura de la matriz mónica de Jacobi y, en su lugar, consideramos la matriz de Hessenberg inferior asociada al operador multiplicación por x (Sección 1.5). En el contexto del problema general de simetrización prestaremos especial atención a aquellas matrices de Hessenberg tales que alguna de sus potencias es una matriz a bandas. Estas matrices aparecen en el estudio de relaciones de recurrencia de orden superior. Nuestro análisis completa algunos resultados obtenidos en [29].

4.1. Perturbaciones no simétricas de funcionales bilineales simétricos

Sea $\mathbf{L}$ un funcional bilineal casi-definido y simétrico (Definición 1.6.1). Al hablar de perturbaciones polinómicas de $\mathbf{L}$, consideraremos los siguientes casos:

- El funcional perturbado es bilineal pero no es simétrico. Esta situación puede darse si perturbamos sólo uno de los argumentos del funcional $\mathbf{L}$, es decir, consideramos el funcional $\tilde{\mathbf{L}}$ obtenido mediante

  $$\tilde{\mathbf{L}}(p,q) := \mathbf{L}(\pi p, q), \quad \text{ó} \quad \tilde{\mathbf{L}}(p,q) := \mathbf{L}(p, \pi q),$$

  donde π denota un polinomio. O bien cuando multiplicamos ambos argumentos del funcional $\mathbf{L}$ por polinomios distintos.

  $$\tilde{\mathbf{L}}(p,q) := \mathbf{L}(\pi_1 p, \pi_2 q).$$

  A este tipo de perturbaciones las llamaremos perturbaciones polinómicas no simétricas.

- El funcional perturbado es bilineal y simétrico. Si perturbamos ambos argumentos del funcional $\mathbf{L}$ multiplicándolos por el mismo polinomio, es decir,

  $$\tilde{\mathbf{L}}(p,q) := \mathbf{L}(\pi p, \pi q),$$

  obtenemos otro funcional bilineal y simétrico. Sin embargo, como veremos, ésta no es la única forma de lograrlo. A este tipo de perturbaciones las llamaremos simétricas.

4.1.1. Perturbaciones no simétricas que afectan a sólo uno de los argumentos de L

Estudiamos en esta subsección perturbaciones polinómicas no simétricas que afectan a sólo uno de los argumentos de un funcional bilineal casi-definido y simétrico $\mathbf{L}$. En particular, analizamos los dos casos estándar siguientes,

$$\mathbf{U}_1(p,q) := \mathbf{L}((x-\alpha)p, q), \tag{4.1}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\mathbf{U}_2(p,q) := \mathbf{L}(p, (x-\alpha)q). \tag{4.2}$$

Observación 4.1.1 *Obsérvese que, en general, los funcionales bilineales* $\mathbf{U}_1$ *y* $\mathbf{U}_2$ *no son simétricos si* $\mathbf{L}$ *es simétrico. Veamos un ejemplo.*

Supongamos que

$$\mathbf{L}(p,q) = \int_{\mathbb{R}} pq\,d\mu_0 + \int_{\mathbb{R}} p'q'\,d\mu_1 = \mathbf{L}(q,p).$$

Entonces, para $\alpha = 0$,

$$\mathbf{U}_1(p,q) = \mathbf{L}(xp,q) = \int_{\mathbb{R}} xpq d\mu_0 + \int_{\mathbb{R}} (p+xp')q' d\mu_1 \neq \mathbf{U}_1(q,p).$$

$$\mathbf{U}_2(p,q) = \mathbf{L}(p,xq) = \int_{\mathbb{R}} xpq d\mu_0 + \int_{\mathbb{R}} p'(q+xq') d\mu_1 \neq \mathbf{U}_2(q,p).$$

En primer lugar, analizaremos la perturbación que genera el funcional $\mathbf{U_1}$. Para ello, suponemos que $\{P_n\}$ denota la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a $\mathbf{L}$ y que H es la matriz de Hessenberg asociada a $\{P_n\}$, es decir,

$$xv_p = Hv_p, \tag{4.3}$$

donde $v_p = [P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots]^t$ denota el vector columna cuyos elementos son los polinomios P_n. Suponemos además que $P_n(\alpha) \neq 0$ para todo n.

Lema 4.1.1 *Si* $\mathbf{L}$ *es un funcional bilineal simétrico y* $\{P_n\}$ *es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a* $\mathbf{L}$*, entonces,*

$$L(v_p, v_p^t) = D_p,$$

donde D_p *es una matriz diagonal.*

Demostración. La demostración es inmediata teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de la sucesión $\{P_n\}$. □

Lema 4.1.2 *Sea* $\mathbf{U_1}(v_p, v_p^t)$ *la matriz de momentos modificados (Definición 1.1.1) asociada a* $\mathbf{U_1}$ *con respecto a* $\{P_n\}$*. Entonces*

$$\mathbf{U}_1(v_p, v_p^t) = (H - \alpha I)D_p,$$

$$\mathbf{U}_1((x-\alpha)v_p, v_p^t) = (H - \alpha I)^2 D_p.$$

Demostración. Por definición del funcional $\mathbf{U_1}$,

$$\mathbf{U_1}(v_p, v_p^t) = \mathbf{L}((x-\alpha)v_p, v_p^t).$$

Teniendo en cuenta (4.3), se deduce que $(x-\alpha)v_p = (H-\alpha I)v_p$. Entonces, por el Lema 4.1.1

$$\mathbf{U_1}(v_p, v_p^t) = \mathbf{L}((H-\alpha I)v_p, v_p^t) = (H-\alpha I)D_p.$$

El segundo resultado se obtiene de forma similar. □

Dado que el funcional $\mathbf{U_1}$ no es simétrico, no podemos hablar de sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{U_1}$. A continuación definimos una propiedad de ortogonalidad más débil, la ortogonalidad por la izquierda, que nos permitirá asociar al funcional $\mathbf{U_1}$ una sucesión de polinomios.

Definición 4.1.1 *Dado un funcional bilineal* $\mathbf{U}$ *definido en el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales,*

$$\mathbf{U} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R},$$

se dice que una sucesión de polinomios $\{R_n\}$ *es* ortogonal por la izquierda *con respecto a* $\mathbf{U}$ *si*

1. $\deg(R_n) = n$, *para todo* n.
2. $\mathbf{U}(R_n, x^m) = K_n \delta_{n,m}$, *con* $K_n \neq 0$, *para* $0 \leq m \leq n$.

Diremos, además, que el funcional $\mathbf{U}$ *es* casi-definido por la izquierda.

Observación 4.1.2 *Una definición equivalente puede darse para la* ortogonalidad por la derecha. *Basta con reemplazar la condición* 2 *por*

$$\mathbf{U}(x^m, R_n) = K_n \delta_{n,m}, \quad \textit{con} \quad K_n \neq 0, \quad 0 \leq m \leq n.$$

En este caso, diremos que $\mathbf{U}$ *es* casi-definido por la derecha.

Proposición 4.1.1 *El funcional bilineal* $\mathbf{U_1}$ *es casi-definido por la izquierda y la sucesión* $\{R_n\}$ *dada por*

$$R_n(x) = \frac{P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} P_n(x)}{x - \alpha}$$

es la correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonal por la izquierda con respecto a $\mathbf{U}_1$.

Demostración.

1. Es obvio que $\deg(R_n) = n$.
2. Si $0 \leq k < n$,

   $$\mathbf{U}_1(R_n, x^k) = \mathbf{L}((x-\alpha)R_n, x^k) = \mathbf{L}(P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} P_n(x), x^k).$$

   Dado que $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$, de la expresión anterior deducimos
   $$\mathbf{U}_1(R_n, x^k) = 0.$$

3. Por otro lado,

   $$\mathbf{U}_1(R_n, x^n) = -\frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} \mathbf{L}(P_n, x^n) \neq 0.$$

□

Sea H_1 la matriz de Hessenberg asociada a $\{R_n\}$. En lo que sigue, nos planteamos el problema de establecer una relación algebraica entre las matrices de Hessenberg H y H_1. Obsérvese que, dado que $\{P_n\}$ y $\{R_n\}$ son bases polinómicas mónicas, existe una matriz triangular inferior L con unos en la diagonal principal tal que

$$v_p = Lv_r. \tag{4.4}$$

A continuación probamos que la matriz L es precisamente el factor triangular inferior que se obtiene en la factorización LU sin pivote de la matriz de Hessenberg H asociada a $\{P_n\}$.

Proposición 4.1.2 *Si L es la matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal tal que $v_p = Lv_r$ entonces, $H - \alpha I = LU$ donde U denota una matriz triangular superior con entradas en la diagonal principal no nulas.*

Demostración. Por el Lema 4.1.2,

$$(H - \alpha I)D_p = \mathbf{U}_1(v_p, v_p^t) = \mathbf{U}_1(Lv_r, v_r^t L^t) = L\mathbf{U}_1(v_r, v_r^t)L^t.$$

Por tanto,

$$H - \alpha I = L\mathbf{U}_1(v_r, v_r^t)L^t D_p^{-1}.$$

Teniendo en cuenta que

1. L^t es una matriz triangular superior,
2. Dado que $\{R_n\}$ es ortogonal por la izquierda con respecto a $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_1(R_n, R_k) = 0$ si $0 \leq k < n$ y, por tanto, $\mathbf{U}_1(v_r, v_r^t)$ es también una matriz triangular superior,
3. D_p^{-1} es una matriz diagonal,

entonces, tomando

$$U = \mathbf{U}_1(v_r, v_r^t)L^t D_p^{-1}, \tag{4.5}$$

se obtiene el resultado buscado. Obsérvese que la matriz U es no singular ya que $\mathbf{U}_1(v_r, v_r^t)$, L^t y D_p^{-1} lo son. □

Observación 4.1.3 *Nótese que, dado que $P_n(\alpha) \neq 0$, para todo n, existe la factorización LU de $H - \alpha I$. Además, es fácil probar que U es una matriz triangular superior y bidiagonal ya que $H - \alpha I$ es Hessenberg inferior.*

Proposición 4.1.3 *Si H_1 es la matriz de Hessenberg asociada a la sucesión $\{R_n\}$, entonces*

$$H_1 - \alpha I = L^{-1}(H - \alpha I)^2 U^{-1},$$

donde L y U son los factores obtenidos en la factorización LU de $H - \alpha I$.

Demostración.

$$\mathbf{U_1}((x-\alpha)v_r, v_r^t) = \mathbf{U_1}((H_1-\alpha I)v_r, v_r^t) = (H_1-\alpha I)\mathbf{U_1}(v_r, v_r^t). \tag{4.6}$$

Pero también ocurre que

$$\mathbf{U_1}((x-\alpha)v_r, v_r^t) = \mathbf{U_1}((x-\alpha)L^{-1}v_p, v_p^t L^{-t}) = L^{-1}\mathbf{U_1}((x-\alpha)v_p, v_p^t)L^{-t}. \tag{4.7}$$

Teniendo en cuenta el Lema 4.1.2,

$$L^{-1}\mathbf{U}_1((x-\alpha)v_p, v_p^t)L^{-t} = L^{-1}(H-\alpha I)^2 D_p L^{-t}. \tag{4.8}$$

Entonces, comparando (4.6) y (4.7) y reemplazando (4.8), se obtiene

$$(H_1-\alpha I)\mathbf{U_1}(v_r, v_r^t) = L^{-1}(H-\alpha I)^2 D_p L^{-t}.$$

Teniendo en cuenta (4.5), se llega al resultado buscado. □

Como una consecuencia inmediata de la proposición anterior, obtenemos un resultado importante que muestra cómo obtener la matriz H_1 como la transformada de Darboux sin parámetro con shift α de H.

Teorema 4.1.1 *Si $H-\alpha I = LU$ denota la factorización LU sin pivote de $H-\alpha I$, entonces,*

$$H_1 = UL + \alpha I.$$

Demostración. Por la Proposición 4.1.3, se obtiene

$$H_1 - \alpha I = L^{-1}(H-\alpha I)^2 U^{-1} = L^{-1}LULUU^{-1} = UL.$$

□

A continuación damos una versión finita del Teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.2 *Si $(H)_n$ denota la submatriz principal de orden n de H y $(H)_n - \alpha I_n = L_n U_n$ denota la factorización LU sin pivote de $(H)_n - \alpha I_n$, entonces*

$$(H_1)_{n-1} = (U_n L_n)_{n-1} + \alpha I_{n-1},$$

i.e., la submatriz principal de orden $n-1$ de H_1 es la submatriz principal de orden $n-1$ de $U_n L_n + \alpha I_n$.

Demostración.

Consideremos la factorización LU de $H-\alpha I$.

$$H-\alpha I = \left[\begin{array}{cccc|cc} h_{11}-\alpha & h_{12} & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ h_{21} & h_{22}-\alpha & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn}-\alpha & h_{n,n+1} & \cdots \\ \hline h_{n+1,1} & h_{n+1,2} & \cdots & h_{n+1,n} & h_{n+1,n+1}-\alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \hline l_{n+1,1} & l_{n+1,2} & \cdots & l_{n+1,n} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|cc} u_1 & h_{12} & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_n & h_{n,n+1} & \cdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}\right].$$

Si multiplicamos en sentido inverso los factores L y U, entonces se obtiene

$$H_1 - \alpha I =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} u_1 & h_{12} & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_n & h_{n,n+1} & \cdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \hline l_{n+1,1} & l_{n+1,2} & \cdots & l_{n+1,n} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}\right].$$

Es obvio que

$$(H_1)_n - \alpha I_n = U_n L_n + h_{n,n+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n+1,1} & l_{n+1,2} & \cdots & l_{n+1,n} \end{bmatrix}.$$

Entonces, $(H_1)_n - \alpha I_n$ y $U_n L_n$ no coinciden en la última fila. Eliminando la última fila y la última columna de las matrices que aparecen en ambos miembros de la expresión anterior, se obtiene el resultado buscado. □

Al comienzo de esta sección mencionamos dos ejemplos estándar de perturbaciones no simétricas del funcional bilineal $\mathbf{L}$. Habiendo analizado la primera, $\mathbf{U}_1$, los resultados para la segunda se obtienen de forma inmediata. De hecho, se prueba que

1. $\mathbf{U}_2(v_p, v_p^t) = D_p(H - \alpha I)^t$ y $\mathbf{U}_2(v_p, (x-\alpha)v_p^t) = D_p((H-\alpha I)^2)^t$.

2. El funcional bilineal $\mathbf{U_2}$ es casi-definido por la derecha y la sucesión de polinomios $\{R_n\}$ dada en la Proposición 4.1.1 es ortogonal por la derecha con respecto a $\mathbf{U}_2$.

3. $H - \alpha I = LU$, donde $L = PR^{-1}$ y $U = \mathbf{U}_2(v_r, v_r^t)^t L^t D_p^{-t}$.

4. La Proposición 4.1.3 y el Teorema 4.1.1 son también válidos para $\mathbf{U}_2$.

Finalmente, en el caso particular en que $\mathbf{L}$ es un funcional definido positivo, existe una sucesión de polinomios $\{\tilde{P}_n\}$ ortonormal con respecto a $\mathbf{L}$. Nótese que, en este caso, $D_{\tilde{P}} = \mathbf{L}(\tilde{v}_p, \tilde{v}_p^t) = I$, donde I denota la matriz identidad.

En tal caso, si $\tilde{H}$ denota la matriz de Hessenberg asociada a $\{\tilde{P}_n\}$, todos los resultados obtenidos para funcionales casi-definidos siguen siendo válidos sin más que sustituir D_p por la identidad y H por $\tilde{H}$, y tomando la sucesión de polinomios $\{R_n\}$ que se obtiene del modo siguiente: Se construye la sucesión $\{\tilde{R}_n\}$ dada por

$$\tilde{R}_n(x) = \frac{\tilde{P}_{n+1}(x) - \frac{\tilde{P}_{n+1}(\alpha)}{\tilde{P}_n(\alpha)}\tilde{P}_n(x)}{x-\alpha},$$

y se multiplica cada polinomio $\tilde{R}_n$ por una constante adecuada de modo que los coeficiente líderes del nuevo polinomio R_n y de $\tilde{P}_n$ coincidan. Esto nos asegura que la matriz de cambio de base L sigue siendo triangular inferior con diagonal principal de unos.

A lo largo de esta sección hemos considerado solamente perturbaciones polinómicas no simétricas de un funcional bilineal casi-definido donde el polinomio de perturbación es de grado uno. Pero resulta evidente cómo extender dichos resultados al caso general en que el polinomio de perturbación π es de grado superior. Para ello, basta tener en cuenta que, dado un funcional bilineal casi-definido $\mathbf{L}$, si $\{P_n\}$ denota la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$ y H es la matriz de Hessenberg asociada a $\{P_n\}$, entonces

$$\pi(x)v_p = \pi(H)v_p,$$

donde $\pi(H)$ denota el polinomio matricial que se obtiene al reemplazar en $\pi(x)$ la variable x por H. Además, si $\deg(\pi) = s$, la sucesión $\{R_n\}$ dada por

$$R_n(x) = \frac{P_{n+s}(x) + \sum_{i=n}^{n+s-1} a_{n,i}P_i(x)}{\pi(x)},$$

donde los coeficientes $a_{n,i}$ se eligen de modo que los ceros de π anulen el polinomio del numerador, es ortogonal por la izquierda o por la derecha con respecto al funcional perturbado dependiendo de que la perturbación se haga en el primer argumento o en el segundo.

4.1.2. Perturbaciones no simétricas que afectan a los dos argumentos de L

Consideramos ahora un caso estándar que ilustra las perturbaciones no simétricas que afectan a los dos argumentos de un funcional bilineal casi-definido y simétrico $\mathbf{L}$. Sea

$$\mathbf{U}(p,q) := \mathbf{L}((x-\alpha)p,(x-\beta)q), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq \beta. \tag{4.9}$$

Dado que el funcional $\mathbf{U}$ no es simétrico, no podemos hablar de sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{U}$. Además, dado que el funcional $\mathbf{U}$ puede expresarse como la composición de un funcional bilineal del tipo $\mathbf{U_1}$

dado en (4.1) y de un funcional del tipo $\mathbf{U_2}$ (4.2) y, teniendo en cuenta que los funcionales del tipo $\mathbf{U_1}$ son casi-definidos por la izquierda pero no por la derecha, resulta obvio que el funcional $\mathbf{U}$ dado en (4.9) no es casi-definido por la derecha ni por la izquierda. Por tanto, este tipo de perturbaciones no simétricas carecen de interés para nosotros.

4.2. Perturbaciones simétricas de funcionales bilineales simétricos

En la Sección 4.1 hemos considerado perturbaciones polinómicas no simétricas de funcionales bilineales simétricos. En esta sección consideraremos las perturbaciones simétricas. Para ello la primera estrategia que utilizaremos será perturbar ambos argumentos de un funcional bilineal casi-definido y simétrico multiplicando cada uno de ellos por un mismo polinomio. Este tipo de perturbaciones extiende los resultados estándar para funcionales lineales. Como es bien sabido [54], si $\mathbf{S}$ denota un funcional lineal, entonces

$$(\mathbf{x^k S})(p) = \mathbf{S}(x^k p).$$

En el caso de funcionales bilineales, será necesario distinguir entre dos casos canónicos. Dado un funcional bilineal simétrico $\mathbf{L}$,

1. ¿cómo definimos el funcional bilineal simétrico $\mathbf{xL}$?
2. ¿cómo definimos el funcional bilineal simétrico $\mathbf{x^2L}$?

Además, será interesante buscar una relación algebraica entre las matrices de Hessenberg asociadas al funcional $\mathbf{L}$ y al perturbado. Dado que el segundo caso es una extensión natural de las perturbaciones polinómicas de funcionales lineales, lo analizamos en primer lugar.

4.2.1. El funcional bilineal $\mathbf{x^2L}$.

Definición 4.2.1 *Dado un funcional bilineal y simétrico* $\mathbf{L}$ *en el espacio vectorial* $\mathbb{P}$ *de los polinomios con coeficientes reales, definimos el funcional bilineal* $\mathbf{x^2L}$ *como sigue:*

$$(\mathbf{x^2L})(p,q) := \mathbf{L}(xp, xq).$$

Observación 4.2.1 *Dado que todo funcional lineal* $\mathbf{S}$ *define un funcional bilineal* $\mathbf{L}$ *en el modo siguiente:*

$$\mathbf{L}(p,q) := \mathbf{S}(pq),$$

la Definición 4.2.1 es una extensión natural de la definición de $\mathbf{x^2S}$*,*

$$(\mathbf{x^2L})(p,q) = \mathbf{L}(xp,xq) = \mathbf{S}(x^2pq) = (\mathbf{x^2S})(pq).$$

En lo que sigue, haremos una distinción entre $\mathbf{L}$, funcional bilineal simétrico y *definido positivo*, y $\mathbf{L}$, funcional bilineal simétrico y *casi-definido*.

4.2.1.1. El funcional $\mathbf{x^2L}$ cuando $\mathbf{L}$ es definido positivo

Sea $\mathbf{L}$ un funcional bilineal simétrico y definido positivo y sea $\{\tilde{P}_n\}$ la correspondiente sucesión de polinomios ortonormales. Sea $\tilde{H}$ la matriz de Hessenberg semi-infinita asociada a $\{\tilde{P}_n\}$. Consideremos el nuevo funcional bilineal $\mathbf{x^2L}$ definido por

$$(\mathbf{x^2L})(p,q) := \mathbf{L}(xp,xq).$$

Proposición 4.2.1 *Si el funcional bilineal* $\mathbf{L}$ *es definido positivo, entonces* $\mathbf{x^2L}$ *es también un funcional bilineal definido positivo.*

Demostración. Si $X = [1, x, x^2, \ldots]^t$, entonces la matriz de momentos asociada a $\mathbf{x^2L}$ con respecto a la base canónica $\{x^n\}$ es

$$M_{x^2L} = (\mathbf{x^2L})(X, X^t) = \mathbf{L}(xX, xX^t) = M_L^{(-1,-1)},$$

i.e., M_{x^2L} se obtiene eliminando la primera fila y la primera columna de la matriz de momentos asociada a $\mathbf{L}$. Dado que M_L es una matriz definida positiva, entonces M_{x^2L} es también una matriz definida positiva. $\square$

Sea $\{\tilde{Q}_n\}$ la sucesión de polinomios ortonormal con respecto a $\mathbf{U}$ y sea $\tilde{H}_1$ la matriz de Hessenberg semi-infinita asociada a $\{\tilde{Q}_n\}$, es decir, si denotamos $\tilde{v}_q = [\tilde{Q}_0(x), \tilde{Q}_1(x), \tilde{Q}_2(x), \ldots]^t$, entonces $x\tilde{v}_q = \tilde{H}_1\tilde{v}_q$. Queremos relacionar $\tilde{H}_1$ con $\tilde{H}$ y la herramienta para hacerlo es la factorización única

$$\tilde{H} = \tilde{L}\tilde{G}, \tag{4.10}$$

donde $\tilde{L}$ es triangular inferior y $\tilde{G}$ es ortogonal y Hessenberg inferior. Usando términos más familiares, $\tilde{G}^t\tilde{L}^t$ es la factorización QR de $\tilde{H}^t$ que existe dado que $\tilde{H}$ es no reducible. Debemos mencionar que las matrices de Hessenberg ortogonales de orden n están determinadas por sólo n parámetros, los parámetros de Schur.

Teorema 4.2.1 *Con la notacion desarrollada anteriormente*

1. $\tilde{v}_p = \tilde{L}\tilde{v}_q$,
2. $\tilde{H}_1 = \tilde{G}\tilde{L}$, *la transformada QR de* $\tilde{H}$.

Demostración. Dado que v_p y v_q están ordenados por grado creciente, existe una única matriz triangular inferior no singular $\hat{L}$ tal que

$$\tilde{v}_p = \hat{L}\tilde{v}_q. \tag{4.11}$$

Dado que $(\mathbf{x^2L})(\tilde{v}_q, \tilde{v}_q^t) = I$, donde I denota la matriz identidad semi-infinita, por (4.11),

$$\begin{aligned}(\mathbf{x^2L})(\tilde{v}_p, \tilde{v}_p^t) &= (\mathbf{x^2L})(\hat{L}\tilde{v}_q, \tilde{v}_q^t\hat{L}^t)\\ &= \hat{L}(\mathbf{x^2L})(\tilde{v}_q, \tilde{v}_q^t)\hat{L}^t\\ &= \hat{L}\hat{L}^t. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\mathbf{L}(\tilde{v}_p, \tilde{v}_p^t) = I$, por (4.10)

$$\begin{aligned}(\mathbf{x^2L})(\tilde{v}_p, \tilde{v}_p^t) &= \mathbf{L}(x\tilde{v}_p, x\tilde{v}_p^t)\\ &= \mathbf{L}(\tilde{H}\tilde{v}_p, \tilde{v}_p^t\tilde{H}^t)\\ &= \tilde{H}\mathbf{L}(\tilde{v}_p, \tilde{v}_p^t)\tilde{H}^t\\ &= \tilde{H}\tilde{H}^t = \tilde{L}(\tilde{G}\tilde{G}^t)\tilde{L}^t = \tilde{L}\tilde{L}^t. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Por la unicidad de la factorización de Cholesky, de (4.12) y (4.12) se deduce

$$\hat{L} = \tilde{L}.$$

Además,

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1 &= \tilde{H}_1(\mathbf{x^2L})(\tilde{v}_q, \tilde{v}_q^t)\\ &= (\mathbf{x^2L})(\tilde{H}_1\tilde{v}_q, \tilde{v}_q^t)\\ &= (\mathbf{x^2L})(x\tilde{v}_q, \tilde{v}_q^t)\\ &= (\mathbf{x^2L})(x\tilde{L}^{-1}\tilde{v}_p, \tilde{v}_p^t\tilde{L}^{-t})\\ &= \tilde{L}^{-1}\tilde{H}(\mathbf{x^2L})(\tilde{v}_p, \tilde{v}_p^t)\tilde{L}^{-t}\\ &= \tilde{G}(\tilde{L}\tilde{L}^t)\tilde{L}^{-t}\\ &= \tilde{G}\tilde{L}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

lo cual prueba el resultado. □

4.2.1.2. Relación algebraica explícita entre las sucesiones $\{\tilde{P}_n\}$ y $\{\tilde{Q}_n\}$.

En este punto, es interesante estudiar si existe una relación algebraica explícita entre las sucesiones de polinomios $\{\tilde{P}_n\}$ y $\{\tilde{Q}_n\}$ asociadas a $\mathbf{L}$ y a $\mathbf{x^2L}$, respectivamente. Sea

$$\tilde{H} = \tilde{L}\tilde{G}, \tag{4.15}$$

donde $\tilde{L}$ es una matriz triangular inferior y $\tilde{G}$ es una matriz ortogonal y Hessenberg inferior. Sea $\{S_n\}$ la sucesión de polinomios dada por $\tilde{G}\tilde{v}_p$, donde $\deg(S_i(x)) = i$ para todo i, entonces, si $v_s = [S_1(x), S_2(x), S_3(x), \ldots]^t$, teniendo en cuenta que

$$\tilde{v}_p = \tilde{L}\tilde{v}_q \quad \text{y} \quad x\tilde{v}_p = \tilde{H}\tilde{v}_p = \tilde{L}\tilde{G}\tilde{v}_p = \tilde{L}v_s,$$

obtenemos

$$x\tilde{L}\tilde{v}_q = x\tilde{v}_p = \tilde{L}v_s,$$

y se deduce que $\tilde{v}_s = x\tilde{v}_q$. Además, como $\tilde{v}_s = \tilde{G}\tilde{v}_p$, obtenemos la siguiente relación algebraica explícita entre las sucesiones $\{\tilde{P}_n\}$ y $\{\tilde{Q}_n\}$

$$x\tilde{v}_q = \tilde{G}\tilde{v}_p. \tag{4.16}$$

Más aún, por el Teorema 4.2.1, $\tilde{H}_1 = \tilde{G}\tilde{L}$. Es interesante observar que hemos obtenido una transformación tipo Darboux,

$$\tilde{H} = \tilde{L}\tilde{G}, \quad \tilde{H}_1 = \tilde{G}\tilde{L},$$

donde los factores $\tilde{L}$ y $\tilde{G}$ son las matrices que determinan las relaciones algebraicas entre las sucesiones $\{\tilde{P}_n\}$ y $\{\tilde{Q}_n\}$, ya que $\tilde{v}_p = \tilde{L}\tilde{v}_q$ y $x\tilde{v}_q = \tilde{G}\tilde{v}_p$. Recordemos que una relación semejante se da en el caso lineal (ver Subsección 2.8.1).

4.2.1.3. El funcional bilineal $\mathbf{x^2L}$ cuando $\mathbf{L}$ es un funcional casi-definido

Este caso, en esencia, es cercano al caso definido positivo pero requiere ideas menos familiares que la factorización de Cholesky y QR. La construcción de un sistema $\{P_n\}$ de polinomios mónicos ortogonal con respecto a un funcional bilineal simétrico $\mathbf{L}$ sólo requiere que $\mathbf{L}(P_k, P_k) \neq 0$ para todo k. La positividad no es imprescindible para el proceso de Gram-Schmidt aunque perdemos la propiedad "$\mathbf{L}(p,p) = 0$ implica $p = 0$". Entonces, para este caso, basta suponer que todas las submatrices principales de la matriz de momentos de $\mathbf{L}$ son no singulares.

Consideremos el funcional bilineal simétrico $\mathbf{L}$ y supongamos que es casi-definido. Sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$ y sea H la matriz de Hessenberg semi-infinita asociada a $\{P_n\}$. Consideremos el funcional bilineal

$$(\mathbf{x^2L})(p,q) := \mathbf{L}(xp, xq).$$

A diferencia de lo que ocurría en el caso definido positivo, el hecho de que $\mathbf{L}$ sea casi-definido no implica, en general, que $\mathbf{x^2L}$ sea un funcional bilineal casi-definido. Por ejemplo, supongamos que la submatriz principal de orden 3 de la matriz de momentos asociada a $\mathbf{L}$ es

$$(M_L)_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resulta obvio que $(M_L)_3$ es casi-definida mientras que la matriz que se obtiene al suprimir la primera fila y la primera columna de $(M_L)_3$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ no lo es. Por tanto, $\mathbf{L}$ debe satisfacer una condición extra para que $\mathbf{x^2L}$ sea casi-definido. En lo que sigue, consideraremos un funcional bilineal simétrico casi-definido $\mathbf{L}$ tal que la matriz $M_L^{(-1,-1)}$ es casi-definida. Esto nos asegura que el correspondiente funcional $\mathbf{x^2L}$ es también casi-definido. Denotamos por $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{x^2L}$ y H_1 la correspondiente matriz de Hessenberg.

Si $v_p = [P_0(x), P_1(x), \ldots]^t$, observemos que la matriz $D_p := \mathbf{L}(v_p, v_p^t) = \Delta\Omega\Delta$, donde $\Delta := |D_p|^{1/2}$ y $\Omega = sign(D_p) = diag(\pm 1)$. Por regularidad, las tres matrices diagonales D_p, Δ y Ω son no singulares.

El proceso de Gram-Schmidt aplicado a las columnas de una matriz no singular X produce las columnas de una matriz ortogonal Q que verifica $X = QR$, donde R es una matriz triangular superior con diagonal principal positiva. Cuando el producto interno euclídeo se reemplaza por el "producto interior" indefinido dado por Ω, $\langle x, y\rangle_\Omega := y^t\Omega x$, entonces el proceso de Gram-Schmidt produce una factorización alternativa

$$X = SR, \tag{4.17}$$

donde $S^t\Omega S = \hat{\Omega}$ y $X^t\Omega X = R^t\hat{\Omega}R$, con $\hat{\Omega}$ otra matriz de signos (diag(± 1)) que es congruente con Ω y está determinada de forma única por X y Ω. Nos referimos a (4.17) como la factorización QR con respecto a Ω.

En el caso casi-definido, la clave para la conexión entre los funcionales bilineales $\mathbf{L}$ y $\mathbf{x^2L}$ es la factorización triangular (única) de $(\mathbf{x^2L})(v_p, v_p^t) = HD_pH^t$,

$$HD_pH^t = LDL^t, \tag{4.18}$$

donde L es una matriz triangular inferior con diagonal principal de unos y D es diagonal.

Teorema 4.2.2 *Con la notación dada anteriormente, para* $\mathbf{L}$ *funcional bilineal simétrico y casi-definido,*

1. $v_p = Lv_q$,
2. $H_1 = L^{-1}HL$.

Demostración. Dado que en v_p y v_q las componentes son polinomios mónicos y están ordenados por grado creciente, existe una matriz triangular inferior no singular $\tilde{L}$ tal que $diag(\tilde{L}) = I$ y

$$v_p = \tilde{L}v_q. \tag{4.19}$$

Por ortogonalidad $(\mathbf{x^2L})(v_q, v_q^t) = D_q$ es diagonal y

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x^2L})(v_p, v_p^t) &= (\mathbf{x^2L})(\tilde{L}v_q, v_q^t\tilde{L}^t)\\
&= \tilde{L}(\mathbf{x^2L})(v_q, v_q^t)\tilde{L}^t\\
&= \tilde{L}D_q\tilde{L}^t.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x^2L})(v_p, v_p^t) &= \mathbf{L}(xv_p, xv_p^t)\\
&= \mathbf{L}(Hv_p, v_p^tH^t)\\
&= HD_pH^t.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Por la unicidad de la factorización diagonal, de (4.18), (4.20) y (4.21), se deduce que $\tilde{L} = L$ y $D = D_q$, lo que prueba el primer resultado.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} H_1 D_q &= H_1(\mathbf{x^2 L})(v_q, v_q^t) \\ &= (\mathbf{x^2 L})(H_1 v_q, v_q^t) \\ &= (\mathbf{x^2 L})(x v_q, v_q^t) \\ &= (\mathbf{x^2 L})(x L^{-1} v_p, v_p^t L^{-t}) \\ &= L^{-1}(\mathbf{x^2 L})(x v_p, v_p^t) L^{-t} \\ &= L^{-1} H (\mathbf{x^2 L})(v_p, v_p^t) L^{-t} \\ &= L^{-1} H (L D_q L^t) L^{-t} \\ &= L^{-1} H L D_q. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dado que D_q es invertible, se prueba el segundo resultado. $\square$

A continuación presentamos, sin demostración, una versión finita del segundo apartado del Teorema 4.2.2.

Teorema 4.2.3 *Si* $(HD_pH^t)_n = L_n D_n L_n^t$ *denota la factorización triangular única de la submatriz principal de orden* n *de* HD_pH^t*, entonces*

$$(H_1)_{n-1} = (L_n^{-1}(H)_n L_n)_{n-1}.$$

Para recuperar una transformación tipo Darboux, escribimos

$$D_p = |D_p|^{1/2}\Omega_p|D_p|^{1/2}, \quad D_q = |D_q|^{1/2}\Omega_q|D_q|^{1/2}, \tag{4.23}$$

donde $\Omega_p = sign(D_p)$ y $\Omega_q = sign(D_q)$.

Decimos que G es ortogonal con respecto a Ω_p si

$$G\Omega_p G^t = \hat{\Omega}, \tag{4.24}$$

para alguna matriz de signos $\hat{\Omega}$ que debe ser congruente con Ω_p. La herramienta para la conexión entre H y H_1 es la factorización QR de $|D_p|^{1/2}H^t$ con respecto a Ω_p,

$$|D_p|^{1/2}H^t = G^t(\Delta L^t), \tag{4.25}$$

donde Δ es diagonal dado que L es triangular inferior con diagonal de unos. Para identificar Ω y Δ, usamos (4.24) y (4.25)

$$LD_qL^t = HD_pH^t = (L\Delta G)\Omega_p(G^t\Delta L^t) = L\Delta\hat{\Omega}\Delta L^t.$$

Teniendo en cuenta que L es no singular, $D_q = \Delta^2\hat{\Omega}$ de modo que

$$\hat{\Omega} = sign(D_q), \quad \Delta = |D_q|^{1/2}. \tag{4.26}$$

Corolario 4.2.1 *Dado un funcional bilineal simétrico y casi-definido* $\mathbf{L}$ *y las cantidades definidas con anterioridad, cuando* $\mathbf{x^2L}$ *es también casi-definido, entonces*

$$H = L\tilde{G},$$
$$H_1 = \tilde{G}L,$$

donde $\tilde{G} := |D_q|^{1/2}G|D_p|^{-1/2}$.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando trasposición en (4.25), se obtiene

$$H = L|D_q|^{1/2}G|D_p|^{-1/2}.$$

Por el Teorema 4.2.2,

$$H_1 = L^1HL = |D_q|^{1/2}G|D_p|^{-1/2}L.$$

□

Observemos que la matriz $\tilde{G}$ es ortogonal con respecto a D_p, es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{G}D_p\tilde{G}^t &= |D_q|^{1/2}G|D_p|^{-1/2}D_p|D_p|^{-1/2}G^t|D_q|^{1/2} \\ &= |D_q|^{1/2}G\Omega_pG^t|D_q|^{1/2} \\ &= |D_q|^{1/2}sign(D_q)|D_q|^{1/2} = D_q. \end{aligned}$$

Para finalizar, observemos que el factor L es la matriz que verifica $v_p = Lv_q$ y $\tilde{G}$ verifica $xv_q = \tilde{G}v_p$.

4.2.1.4. El funcional bilineal simétrico $\mathbf{x^{2n}L}$

Los resultados obtenidos en las subsecciones previas pueden ser generalizados fácilmente. Sea $\mathbf{L}$ un funcional bilineal simétrico. Resulta obvio que la forma de definir el funcional bilineal simétrico $\mathbf{x^{2n}L}$ es

$$(\mathbf{x^{2n}L})(p,q) := \mathbf{L}(x^np, x^nq).$$

Observación 4.2.2 *La definición del funcional bilineal* $\mathbf{x^{2n}L}$*, para* $n \geq 1$*, es una extensión natural de la definición de* $\mathbf{x^{2n}S}$*, donde* S *denota un funcional lineal. Obsérvese que si* $\mathbf{L}$ *es el funcional bilineal asociado al funcional lineal* $\mathbf{S}$*,*

$$(\mathbf{x^{2n}L})(p,q) = \mathbf{L}(x^np, x^nq) = \mathbf{S}(x^{2n}pq) = (\mathbf{x^{2n}S})(pq).$$

Resulta obvio también que, si $\mathbf{L}$ es definido positivo, $\mathbf{x^{2n}L}$ también lo será. Por otro lado, si $\mathbf{L}$ es casi-definido, hay que imponer una condición adicional para que el funcional $\mathbf{x^{2n}L}$ sea también casi-definido.

Supongamos que H y H_1 denotan, respectivamente, las matrices de Hessenberg asociadas a $\mathbf{L}$ y a $\mathbf{x^{2n}L}$. Entonces, si $\mathbf{L}$ es definido positivo y $(H^n)^t = G^tL^t$ denota la factorización QR de $(H^n)^t$, entonces

$$H_1 = L^{-1}HL. \tag{4.27}$$

Por otro lado, si $\mathbf{L}$ es casi-definido y $H^n D_p (H^n)^t = LDL^t$ denota la factorización triangular de $H^n D_p (H^n)^t$, se obtiene la misma relación entre H y H_1 que en el caso definido positivo.

La definición anterior nos permite dar una definición general del funcional bilineal simétrico $\pi\mathbf{L}$, donde π denota un polinomio que es función par. Observemos que en el caso lineal, si $\mathbf{S}$ denota un funcional lineal y $\tau(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$, entonces

$$(\tau\mathbf{S})(p) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\mathbf{x^i L})(p).$$

Entonces, por extensión del resultado anterior, si $\pi(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^{2i}$, definimos

$$(\pi\mathbf{L})(p,q) := \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (\mathbf{x^{2i} L})(p,q).$$

4.2.2. El proceso de simetrización y el funcional bilineal simétrico xL.

Como se vio en la Sección 1.4, la multiplicación de un funcional lineal por el polinomio x está asociada de forma natural al proceso de simetrización de funcionales lineales. En esta sección, partiendo de un funcional bilineal simétrico $\mathbf{L}$, definimos el funcional bilineal $\mathbf{xL}$ y estudiamos el correspondiente problema de simetrización. Observemos que, en el caso bilineal, mientras que la definición de $\mathbf{x^{2n}L}$ es una extensión bastante natural de la definición equivalente en el caso lineal, no ocurre lo mismo cuando consideramos $\mathbf{x^{2n-1}L}$. Teniendo en cuenta la definición de $\mathbf{x^{2n}L}$ y el hecho de que $\mathbf{xL}$ debe ser bilineal y simétrico, una definición plausible de $\mathbf{xL}$ debería ser

$$(\mathbf{xL})(p,q) = \mathbf{L}(x^{1/2}p, x^{1/2}q), \tag{4.28}$$

lo que no tiene sentido dado que el funcional $\mathbf{L}$ está definido en el espacio de los polinomios. Por tanto, es necesario buscar una definición alternativa.

Como se comentó en la Sección 1.6, el proceso de simetrización también puede considerarse en el caso de funcionales bilineales. Recordemos, en particular, el concepto de funcional bilineal simétrico y simetrizado (Definición 1.6.2). Con la finalidad de dar una definición del funcional $\mathbf{xL}$ introducimos la siguiente:

Definición 4.2.2 *Sea* $\mathbf{L}$ *un funcional bilineal casi-definido y simétrico. Diremos que* $\mathbf{L}$ *es un funcional* simetrizable *si existe otro funcional bilineal casi-definido y simétrico* $\mathbf{L}^*$ *tal que el funcional* $\mathbf{U}$ *dado por*

$$\mathbf{U}(x^{2n}, x^{2m}) = \mathbf{L}(x^n, x^m), \quad n,m \geq 0,$$

$$\mathbf{U}(x^{2n+1}, x^{2m+1}) = \mathbf{L}^*(x^n, x^m), \quad n,m \geq 0$$

$$\mathbf{U}(x^{2n}, x^{2m+1}) = 0, \quad n, m \geq 0,$$

$$\mathbf{U}(x^{2n+1}, x^{2m}) = 0, \quad n, m \geq 0,$$

es un funcional casi-definido.

Observación 4.2.3 *Observemos que el funcional* $\mathbf{U}$ *dado en la definición anterior es un funcional simetrizado según la Definición 1.6.2. Si comparamos la Definición 4.2.2 con la de funcional lineal simetrizable (Definición 1.4.2), observamos que, mientras que en el caso lineal el funcional* $\mathbf{U}$ *podía ser definido a partir de* $\mathbf{L}$ *estrictamente, en el caso bilineal es necesario contar, además, con el funcional* $\mathbf{L}^*$*. Esto significa que pueden existir distintos funcionales* $\mathbf{L}^*$ *tales que el correspondiente funcional* $\mathbf{U}$ *sea casi-definido. Como muestra, consideremos el siguiente ejemplo:*

Sean los funcionales $\mathbf{L}$*,* $\mathbf{L_1^*}$ *y* $\mathbf{L_2^*}$ *dados por*

$$\mathbf{L}_1(p, q) = \int_0^\infty x^{-1/2} pq e^{-x^2} dx + 4 \int_0^\infty x^{1/2} p' q' e^{-x^2} dx.$$

$$\mathbf{L_1^*}(p, q) = \int_0^\infty x^{1/2} pq e^{-x^2} dx + \int_0^\infty [p + 2xp'][q + 2xq'] x^{-1/2} e^{-x^2} dx,$$

$$\mathbf{L_2^*}(p, q) = \int_0^\infty x^{1/2} pq e^{-x^2} dx + \int_0^\infty [p + 2xp'][q + 2xq'] x^{-1/2} e^{-x^2} dx + p(0)q(0).$$

Entonces, es fácil probar que el funcional $\mathbf{U_1}$ *definido a partir de* $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{L_1^*}$

$$\mathbf{U}_1(p, q) = \int_{\mathbb{R}} pq e^{-x^4} dx + \int_{\mathbb{R}} p' q' e^{-x^4} dx,$$

es casi-definido. La misma afirmación es válida para el funcional $\mathbf{U_2}$ *definido a partir de* $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{L_2^*}$.

$$\mathbf{U}_2(p, q) = \int_{\mathbb{R}} pq e^{-x^4} dx + \int_{\mathbb{R}} p' q' e^{-x^4} dx + p'(0)q'(0).$$

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores, podemos definir el funcional bilineal $\mathbf{xL}$ del modo siguiente:

Definición 4.2.3 *Sea* $\mathbf{L}$ *un funcional bilineal casi-definido, simétrico y simetrizable. Sea* $\mathbf{U}$ *el funcional bilineal casi-definido simétrico y simetrizado definido a partir del funcional* $\mathbf{L}$ *y de un determinado funcional* $\mathbf{L}^*$*. Entonces, definimos el funcional* $\mathbf{xL}$ *con respecto a* $\mathbf{U}$

$$(\mathbf{xL})_U := \mathbf{L}^*.$$

Observación 4.2.4 *De acuerdo con la definición anterior no podemos hablar del funcional* $\mathbf{xL}$ *sino del funcional* $\mathbf{xL}$ *que nos permite calcular un funcional simetrizado* $\mathbf{U}$ *junto con el funcional* $\mathbf{L}$. *De ahí que escribamos* $(\mathbf{xL})_U$ *en lugar de* $\mathbf{xL}$. *Por tanto, mientras que en el caso lineal el funcional* $\mathbf{xL}$ *está unívocamente determinado por el funcional* $\mathbf{L}$, *en el caso bilineal, es necesario conocer el funcional simetrizado* $\mathbf{U}$ *que junto con* $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{xL}$ *definen un determinado problema de simetrización. Esta observación también nos lleva a afirmar que una posible definición del funcional* $\pi\mathbf{L}$, *donde* π *es un polinomio, sería completamente artificial y antinatural dado que no podemos hablar claramente del funcional* $\mathbf{xL}$. *La situación es totalmente diferente cuando se plantean problemas concretos. En el siguiente capítulo veremos que la definición de* $\mathbf{xL}$ *dada en (4.28) puede tener sentido en ciertos casos particulares.*

4.2.2.1. Relación algebraica explícita entre $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$.

Sea $\mathbf{L}$ un funcional bilineal casi-definido simétrico y simetrizable y sea $\mathbf{U}$ el funcional bilineal simétrico y simetrizado que se obtiene a partir de $\mathbf{L}$ y de un determinado funcional $\mathbf{L}^*$. Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{U}$. Si $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ denotan, respectivamente, las sucesiones de polinomios mónicos ortogonales con respecto a $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}^*$, entonces

$$Q_{2n}(x) = P_n(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xP_n^{*u}(x^2). \tag{4.29}$$

En esta subsección establecemos una relación algebraica explícita entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$. Sean $\mathbb{P}_+$ y $\mathbb{P}_-$ los espacios de polinomios que son funciones pares e impares, respectivamente. Entonces, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_+ \oplus \mathbb{P}_-$. Más aún, consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_+ & \rightarrow & \mathbb{P}_- & \rightarrow & \mathbb{P}_+ \\ p & \rightsquigarrow & xp & \rightsquigarrow & x^2p\,. \end{array}$$

Observemos que las sucesiones $\{Q_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{Q_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ son bases de $\mathbb{P}_+$ y $\mathbb{P}_-$, respectivamente. Además, si $v_{q+} = [Q_0(x), Q_2(x), \ldots]^t$ y $v_{q-} = [Q_1(x), Q_3(x), \ldots]^t$, existe una matriz triangular inferior L así como una matriz de Hessenberg inferior h tales que

$$xv_{q+} = Lv_{q-}, \quad xv_{q-} = hv_{q+}. \tag{4.30}$$

Es decir, si $\tilde{H}$ es la matriz de Hessenberg asociada a $\mathbf{U}$, entonces, L es la matriz que se obtiene al suprimir las columnas impares y las filas pares de $\tilde{H}$, mientras que h es la matriz que se obtiene al suprimir las columnas pares y las filas impares de $\tilde{H}$. Teniendo en cuenta (4.29), se prueba de forma directa que

$$v_p = Lv_{p^*}, \quad xv_{p^*} = hv_p. \tag{4.31}$$

Esto significa que L es una matriz de cambio de base y h define una relación algebraica explícita entre los polinomios núcleo generalizados $\{P_n^{*u}\}$ y los polinomios $\{P_n\}$.

Haciendo uso del resultado anterior también es posible establecer una relación entre las matrices de Hessenberg H y H_1 asociadas, respectivamente, a $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$.

Teorema 4.2.4 *Sean L y h las matrices dadas en (4.31), entonces*

$$H = Lh, \quad H_1 = hL.$$

DEMOSTRACIÓN. Por (4.31)

$$xv_p = Lxv_{p^*} = Lhv_p.$$

Dado que $xv_p = Hv_p$, se obtiene

$$Hv_p = Lhv_p,$$

de donde se deduce que $H = Lh$.

Por otro lado, dado que $xv_{p^*} = H_1 v_{p^*}$ y $xv_{p^*} = hv_p$, se obtiene

$$H_1 v_{p^*} = hv_p = hLv_{p^*},$$

de donde se deduce que $H_1 = hL$. □

Observación 4.2.5 *La sucesión $\{P_n^{*u}\}$ no está unívocamente determinada por $\{P_n\}$ sino que depende del funcional bilineal simetrizado $\mathbf{U}$ asociado. Por tanto, para obtener la matriz H_1 asociada a $\{P_n^{*u}\}$ es necesario conocer*

- *bien la matriz de Hessenberg asociada a $\mathbf{U}$,*
- *bien la matriz de Hessenberg asociada a $\mathbf{L}$ así como uno de los factores L ó h.*

Una pregunta interesante que surge de forma natural es: ¿Será posible encontrar todos los funcionales $\mathbf{L}^*$ que, junto a $\mathbf{L}$, den sentido a un determinado problema de simetrización? Una formulación alternativa de la pregunta anterior sería: Si $H^t = SR$ denota una factorización de la matriz de Hessenberg H^t tal que S es una matriz Hessenberg superior y R una matriz triangular superior, ¿es posible encontrar todas las factorizaciones del tipo SR de la matriz H^t tales que la matriz $H_1 = S^t R^t$ sea la matriz de Hessenberg asociada a un funcional casi-definido $\mathbf{L}^*$ que, junto a $\mathbf{L}$, definan un problema de simetrización.?

4.3. Matrices de Hessenberg con potencias a bandas y el proceso de simetrización

En la Sección 1.6 planteamos el problema general de simetrización. En esta sección nos ocupamos de este problema en un caso particular. Partimos de un funcional bilineal casi-definido simétrico y simetrizado $\mathbf{U}$ y consideramos la sucesión

$\{Q_n\}$ de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{U}$. Por ser $\mathbf{U}$ un funcional simetrizado, existen dos sucesiones de polinomios $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ que satisfacen (1.23). En esta sección consideramos el caso particular en que una potencia de la matriz de Hessenberg H asociada a la sucesión $\{Q_n\}$ es una matriz banda, es decir, existe un entero positivo N tal que

$$H^N(i,j) = 0, \quad |j-i| \geq N+1.$$

Se dice que H^N es una *matriz* $(\mathbf{2N+1})$*-banda*. Demostramos que las matrices de Hessenberg asociadas a las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ también son matrices banda. En este momento es importante señalar que, el hecho de que la matriz de Hessenberg asociada a una sucesión de polinomios ortogonales sea una matriz banda, implica que dicha sucesión satisface una relación de recurrencia finita, como veremos más adelante.

En el caso particular en que $N=1$ y H es una matriz tridiagonal, el proceso de simetrización ha sido extensamente estudiado [23]. Desde el punto de vista matricial, dado un funcional lineal simétrico $\mathbf{U}$, su matriz de Hessenberg es tridiagonal y se prueba que las correspondientes sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ también están asociadas a una matriz de Hessenberg tridiagonal, la matriz mónica de Jacobi. Además, es bien sabido que una sucesión de polinomios ortogonales satisface una relación de recurrencia a tres términos si y solo si la correspondiente matriz de Hessenberg es tridiagonal.

A continuación demostramos que una potencia de la matriz de Hessenberg es una matriz banda si y solo si la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales satisface una relación de recurrencia finita.

Definición 4.3.1 *([29]) Dado un entero positivo N y una sucesión de polinomios $\{P_n\}$, con $P_0(x)$ una constante distinta de cero, decimos que los polinomios $\{P_n\}$ satisfacen una relación de recurrencia a (2N+1)-términos si se verifica*

$$x^N P_n(x) = c_{n,0}P_n(x) + \sum_{i=1}^{N}(c_{n,i}P_{n-i}(x) + c_{n+i,i}P_{n+i}(x)), \tag{4.32}$$

donde $(c_{n,N})_n$ es una sucesión de números reales sin elementos nulos y $(c_{n,i})_n$, con $0 \leq i \leq N-1$, son sucesiones de números reales.

Teorema 4.3.1 *([29]) Consideremos una sucesión de polinomios mónicos ortogonales $\{P_n\}$ y sea H la correspondiente matriz de Hessenberg. Dado un entero positivo N, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *H^N es una matriz $2N+1$-banda.*
2. *La sucesión $\{P_n\}$ satisface una relación de recurrencia a (2N+1)-términos.*

En particular, se verifica la siguiente relación.

$$x^N v_p = H^N v_p.$$

A fin de ilustrar algunos resultados generales, comenzamos analizando los casos en que $N = 2$ y $N = 3$, respectivamente.

4.3.1. El proceso de simetrización asociado a matrices de Hessenberg 5-banda

Consideremos un funcional bilineal simétrico y simetrizado $\mathbf{U}$, y sea $\{Q_n\}$ la correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales. Entonces, por la Proposición 1.6.1, existen dos sucesiones de polinomios $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ tales que

$$Q_{2n}(x) = P_n(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xP_n^{*u}(x^2). \tag{4.33}$$

Sea H la matriz de Hessenberg asociada a $\{Q_n\}$ y supongamos que H^2 es una matriz cinco-banda. Esto significa que $\{Q_n\}$ satisface una relación de recurrencia a cinco-términos dada por

$$x^2 v_q = H^2 v_q. \tag{4.34}$$

Entonces,

$$x^2 v_{q_+} = T_1 v_{q_+},$$

$$x^2 v_{q_-} = T_2 v_{q_-},$$

donde T_1 y T_2 son matrices tridiagonales. Teniendo en cuenta (4.33), obtenemos

$$x v_p = T_1 v_p,$$

$$x v_{p^*} = T_2 v_{p^*}.$$

Dado que T_1 y T_2 son matrices tridiagonales, se deduce que $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ son sucesiones estándar de polinomios, i.e., son ortogonales con respecto a funcionales lineales.

De acuerdo con [29], se obtiene

Teorema 4.3.2 *Una sucesión de polinomios $\{Q_n\}$ satisface una relación de recurrencia a cinco-términos si y solo si existen dos funciones μ y ν tales que $\{Q_n\}$ es ortogonal con respecto al funcional bilineal*

$$\mathbf{U}(p, q) = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}} [p(x) - p(-x)][q(x) - q(-x)]d\nu(x).$$

A partir del Teorema 4.3.2, se deduce de forma inmediata que

Teorema 4.3.3 *La sucesión* $\{P_n\}$ *es ortogonal con respecto al funcional bilineal*

$$\mathbf{L}(p,q) = \int_0^\infty p(x)q(x)d\hat{\mu}(x),$$

donde $d\hat{\mu}(x) = 2d\mu(x^{1/2})$. *La sucesión* $\{P_n^*\}$ *es ortogonal con respecto al funcional bilineal*

$$\mathbf{L}^*(p,q) = \int_0^\infty xp(x)q(x)[d\hat{\mu}(x) + 4d\hat{\nu}(x)],$$

donde $d\hat{\nu}(x) = 2d\nu(x^{1/2})$.

El teorema previo muestra claramente que para encontrar una expresión de $\mathbf{L}^*$ no es suficiente conocer $\mathbf{L}$.

4.3.2. El proceso de simetrización asociado a matrices 7-banda

Supongamos ahora que H^3 es una matriz 7-banda. Esto significa que $\{Q_n\}$ satisface una relación de recurrencia a siete-términos dada por

$$x^3 v_q = H^3 v_q. \tag{4.35}$$

Entonces,

$$x^3 v_{q+} = h_1 v_{q-},$$
$$x^3 v_{q-} = h_2 v_{q+},$$

donde h_1 es una matriz de Hessenberg inferior con cuatro diagonales y h_2 es una matriz de Hessenberg superior con cuatro diagonales también. Teniendo en cuenta (4.33), obtenemos

$$xv_p = h_1 v_{p^*}, \tag{4.36}$$

$$x^2 v_{p^*} = h_2 v_p. \tag{4.37}$$

Multiplicando (4.36) por x^2 y considerando (4.37)

$$x^3 v_p = h_1 h_2 v_p. \tag{4.38}$$

Multiplicando (4.37) por x, de (4.36) se sigue que

$$x^3 v_{p^*} = h_2 h_1 v_{p^*}. \tag{4.39}$$

Dado que $h_1 h_2$ y $h_2 h_1$ son matrices 7-banda, las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ así como la sucesión $\{Q_n\}$ satisfacen relaciones de recurrencia a siete-términos. Además, si H_1 y H_2 son las matrices de Hessenberg asociadas a $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$, respectivamente, entonces por (4.38) y (4.39) se obtiene

$$H_1^3 = h_1 h_2,$$
$$H_2^3 = h_2 h_1.$$

Por otro lado, de acuerdo con [29], $\{Q_n\}$, $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ son sucesiones ortogonales con respecto a un funcional bilineal del tipo dado en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.4 *Una sucesión de polinomios $\{R_n\}$ satisface una relación de recurrencia a siete-términos si y solo si existen cuatro funciones μ_0, μ_1, μ_2, y μ_3 tales que $\{R_n\}$ es ortogonal con respecto al funcional bilineal dado por*

$$\mathbf{U}(p,q) = \int p(x)q(x)d\mu_0(x) + \int T_{13}(p)(x)T_{13}(q)(x)d\mu_1(x) +$$

$$\int [T_{13}(p)(x)T_{23}(p)(x) + T_{23}(p)(x)T_{13}(p)(x)]d\mu_2(x) + \int T_{23}(p)(x)T_{23}(q)(x)d\mu_3(x),$$

donde

$$T_{13}(f)(x) = \frac{1}{3}\left[f(x) + w^2 f(wx) + wf\left(w^2 x\right)\right],$$
$$T_{23}(f)(x) = \frac{1}{3}\left[f(x) + wf(wx) + w^2 f\left(w^2 x\right)\right],$$

con $w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

4.3.3. Resultados generales

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos para el proceso de simetrización asociado a matrices cinco-banda y siete-banda, en esta sección damos algunos resultados generales.

Consideremos un funcional bilineal simétrico y simetrizado $\mathbf{U}$. Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{U}$. Entonces, existen dos sucesiones de polinomios mónicos $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ tales que

$$Q_{2n}(x) = P_n(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xP_n^{*u}(x^2).$$

Diremos que las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ son las componentes simétricas de $\{Q_n\}$. Supongamos que H, H_1 y H_2 son las matrices de Hessenberg asociadas a $\{Q_n\}$, $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$, respectivamente. En lo que sigue, dado un entero no negativo N, consideramos las siguientes situaciones:

- H^{2N} es una matriz $(4N+1)$-banda.
- H^{2N+1} es una matriz $(4N+3)$-banda.

Cuando H^{2N} es una matriz $(4N+1)$-banda, la sucesión $\{Q_n\}$ satisface una relación de recurrencia a $(4N+1)$-términos dada por

$$x^{2N}v_q = H^{2N}v_q.$$

Entonces,

$$x^{2N}v_{q+} = T_1 v_{q+},$$
$$x^{2N}v_{q-} = T_2 v_{q-},$$

donde T_1 y T_2 son matrices $(2N+1)$-banda y obtenemos

$$x^N v_p = T_1 v_p,$$

$$x^N v_{p^*} = T_2 v_{p^*}.$$

Esto significa que H_1^N y H_2^N son matrices $(2N+1)$-banda y las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ satisfacen una relación de recurrencia a $(2N+1)$-términos.

Por otro lado, cuando H^{2N+1} es una matriz $(4N+3)$-banda, la sucesión $\{Q_n\}$ satisface una relación de recurrencia a $(4N+3)$-términos dada por

$$x^{2N+1} v_q = H^{2N+1} v_q. \tag{4.40}$$

Con la finalidad de determinar qué tipo de relación de recurrencia satisfacen las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$, introducimos la siguiente definición.

Definición 4.3.2 *Dados dos enteros no negativos N_1 y N_2, se dice que una matriz cuadrada h es (N_1, N_2)-banda si $h(i,j) = 0$ cuando*

$$j - i \geq N_1 + 1, \quad i - j \geq N_2 + 1.$$

Teniendo en cuenta (4.40)

$$x^{2N+1} v_{q+} = h_1 v_{q-},$$

$$x^{2N+1} v_{q-} = h_2 v_{q+},$$

donde h_1 es una matriz $(N, N+1)$-banda y h_2 es una matriz $(N+1, N)$-banda. Entonces, obtenemos los siguientes resultados

$$x^N v_p = h_1 v_{p^*},$$

$$x^{N+1} v_{p^*} = h_2 v_p.$$

Combinando las dos últimas ecuaciones de la misma forma en que lo hicimos en el análisis de matrices siete-banda, obtenemos

$$x^{2N+1} v_p = h_1 h_2 v_p,$$

$$x^{2N+1} v_{p^*} = h_2 h_1 v_{p^*}.$$

Entonces, considerando que $x v_p = H_1 v_p$ y $x v_{p^*} = H_2 v_{p^*}$,

$$H_1^{2N+1} = h_1 h_2, \quad H_2^{2N+1} = h_2 h_1,$$

i.e., H_1^{2N+1} y H_2^{2N+1} son matrices $(4N+3)$-banda, lo que implica que $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ así como $\{Q_n\}$ satisfacen relaciones de recurrencia a $(4N+3)$-términos.

El caso más simple que ilustra los resultados obtenidos para matrices $(4N+3)$-banda es el caso de las matrices mónicas de Jacobi. Estas son matrices tres-banda. La correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales así como sus componentes simétricas satisfacen una relación de recurrencia a tres términos.

Si el lector está interesado en los productos internos con respecto a los cuales las sucesiones $\{Q_n\}$, $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ son ortogonales en cada caso, puede consultar [29].

En resumen, hemos probado que:

- Si H^{2N} es una matriz $(4N+1)$-banda, entonces $\{Q_n\}$ satisface una relación de recurrencia a $(4N+1)$-términos. Más aún, la potencia N-ésima de las matrices de Hessenberg asociadas a las componentes simétricas $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ es una matriz $(2N+1)$-banda y las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ satisfacen relaciones de recurrencia a $(2N+1)$-términos.

- Si H^{2N+1} es una matriz $(4N+3)$-banda, entonces $\{Q_n\}$ satisface una relación de recurrencia a $(4N+3)$-términos. Más aún, la potencia $2N+1$-ésima de las matrices de Hessenberg asociadas a las componentes simétricas $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ es también una matriz $(4N+3)$-banda y las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*u}\}$ satisfacen relaciones de recurrencia a $(4N+3)$-términos.

Capítulo 5

Productos internos de Sobolev simetrizados

En el capítulo anterior hemos expuesto la teoría de funcionales bilineales simétricos y simetrizados en un contexto general así como presentado y analizado con detalle el proceso de simetrización asociado a funcionales bilineales cualesquiera. En este capítulo nos centramos en un caso particular, el de los productos internos de Sobolev. En una primera etapa analizaremos el caso de productos continuos de Sobolev de orden N para acabar estudiando el caso mixto discreto-continuo cuando los productos son de orden 1. Partimos de un producto interno de Sobolev simetrizado y determinamos cuáles son sus componentes simétricas. Así mismo, establecemos relaciones algebraicas entre las sucesiones de polinomios ortogonales con respecto a ambas componentes simétricas. En ciertos casos específicos, encontramos relaciones de recurrencia de orden superior que verifican tanto la sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto del producto simetrizado como las sucesiones ortogonales respecto de las componentes simétricas.

5.1. Productos internos de Sobolev simetrizados y continuos de orden N

5.1.1. Introducción

El objetivo de esta sección es analizar el problema de simetrización bilineal cuando se considera un producto interior de Sobolev asociado a un vector de medidas $(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_N)$. En el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes reales introducimos el siguiente producto interior,

$$\langle p, q\rangle_s := \int_{\mathbb{R}} p\ q\ d\mu_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\mathbb{R}} p^{(i)}\ q^{(i)}\ d\mu_i\ , \tag{5.1}$$

donde $p^{(i)}$ denota la derivada i-ésima de p y los λ_i, $1 \leq i \leq N$, son números reales positivos. Suponemos que todas las medidas $\{\mu_i\}_{i=0}^{N}$ son absolutamente continuas y su soporte es un subconjunto de la recta real. Al producto definido en (5.1) lo llamaremos *Producto de Sobolev de orden N*. Este tipo de productos interiores, así como sus correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales, han sido estudiados exhaustivamente durante los últimos años. La mayoría de los resultados han sido obtenidos para $N = 1$. En [52], los autores consideran propiedades algebraicas y diferenciales de los polinomios $\{Q_n\}$ ortogonales con respecto a (5.1) cuando las medidas $\{\mu_i\}$ son iguales, i.e., $\mu_i = \mu$ para todo i. En particular, se deducen dos relaciones (una algebraica y otra relacionada con propiedades diferenciales) entre $\{Q_n\}$ y la sucesión $\{T_n\}$ de polinomios mónicos ortogonales con respecto a μ bajo la hipótesis de que μ es una medida semiclásica (i.e., satisface una ecuación diferencial de Pearson así como algunas condiciones extras en la frontera del soporte). Para funcionales lineales semiclásicos la referencia clave es el estudio de P. Maroni [54], así como el artículo introductorio [43].

Una extensión de la definición (5.1) puede darse en términos de una matriz de medidas $d\Omega$ del modo siguiente

$$\langle p, q\rangle = \int_{\mathbb{R}} [\ p, \quad p', \quad \ldots, \quad p^{(N)}\ ] d\Omega \begin{bmatrix} q \\ q' \\ \vdots \\ q^{(N)} \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

donde $d\Omega$ es una matriz cuadrada simétrica de orden $N+1$ con medidas reales como entradas. Este tipo de productos internos fue introducido por J. Blankenagel en su tesis doctoral [8], pero el problema de crear una teoría general para las correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales aún permanece abierto.

Aquí probamos que un producto interno de la forma (5.2) aparece de forma natural cuando se consideran los procesos de simetrización relativos a polinomios ortogonales con respecto a (5.1). En particular, podemos deducir expresiones explícitas para Ω en términos de nuestro vector de medidas $(\mu_0, ..., \mu_N)$.

En lo que sigue, consideramos $N+1$ medidas de Borel positivas μ_0, μ_1,..., μ_N, con soporte en la recta real, tales que las correspondientes sucesiones de momentos son finitas, esto es,

$$c_n^{(i)} = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu_i < \infty, \qquad i = 0, 1, ..., N, \qquad n \geq 0.$$

Además, suponemos que μ_0, μ_1,..., μ_N tienen su soporte en un subconjunto de la recta real que es simétrico con respecto al origen y que cada una de las medidas define un funcional lineal simétrico, por tanto,

$$c_{2n+1}^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, ..., N, \quad n \geq 0.$$

Bajo estas condiciones, si $\{Q_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.1), existen (Proposición 1.6.1) dos sucesiones de polinomios mónicos $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ tales que

$$Q_{2n}(x) = P_n(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xP_n^{*s}(x^2). \tag{5.3}$$

Obsérvese que a la sucesión de polinomios núcleo generalizados la hemos denotado por $\{P_n^{*s}\}$, donde la s en el superíndice indica que el producto de referencia es un producto de Sobolev. Adoptamos esta notación para evitar confusiones a lo largo de esta sección cuando nos refiramos a polinomios núcleo en el sentido estándar. En el resto de esta sección estudiaremos las propiedades de ortogonalidad de las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$. De hecho, probamos que estas dos sucesiones son ortogonales con respecto a ciertos productos internos y establecemos una relación algebraica entre ellas. Además, ilustramos los resultados para el caso particular $N = 1$.

5.1.2. Medidas de ortogonalidad asociadas a $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$

Comenzamos determinando dos productos internos respecto de los cuales $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ son las correspondientes sucesiones de polinomios mónicos ortogonales haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de la sucesión $\{Q_n\}$.

Proposición 5.1.1 *Consideremos el producto interno de Sobolev simetrizado dado en (5.1). Supongamos que $\{Q_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal correspondiente y sean $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ las sucesiones de polinomios que verifican (5.3). Entonces, la sucesión $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto*

$$\langle p, q\rangle_1 = \int_0^\infty p(t)q(t)d\hat{\mu}_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \sum_{s=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \beta_{i,k,s} \int_0^\infty p^{(k)}(t)q^{(s)}(t)t^{k+s-i}d\hat{\mu}_i, \tag{5.4}$$

donde

$$\beta_{i,k,s} := \frac{2^{2k+2s-2i}(i!)^2}{(2k-i)!(i-k)!(2s-i)!(i-s)!}\,, \tag{5.5}$$

y $d\hat{\mu}_j := 2d\mu_j(t^{1/2})$, $j = 0, ..., N$.

Además, la sucesión $\{P_n^{*s}\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto

$$\langle p, q\rangle_2 = \int_0^\infty tp(t)q(t)d\hat{\mu}_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{k=\left[\frac{i}{2}\right]}^{i} \sum_{s=\left[\frac{i}{2}\right]}^{i} \gamma_{i,k,s} \int_0^\infty p^{(k)}(t)q^{(s)}(t)t^{k+s-i+1}d\hat{\mu}_i, \tag{5.6}$$

donde

$$\gamma_{i,k,s} := \frac{2^{2k+2s-2i}(i+1)!^2}{(2k-i+1)!(i-k)!(2s-i+1)!(i-s)!}. \tag{5.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que, para $n \neq m$,

$$0 = \langle Q_{2n}, Q_{2m} \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} P_n(x^2)P_m(x^2)d\mu_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\mathbb{R}} \frac{d^i P_n(x^2)}{dx^i} \frac{d^i P_m(x^2)}{dx^i} d\mu_i. \quad (5.8)$$

Usando la fórmula de Faá di Bruno para la derivada n-ésima de la composición de dos funciones, encontramos que

$$\frac{d^i P_n(x^2)}{dx^i} = i! \sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{\min\{i,n\}} \frac{(2x)^{2k-i} P_n^{(k)}(x^2)}{(2k-i)!(i-k)!}, \quad (5.9)$$

donde $p^{(l)}(z) := \frac{d^l p(z)}{dz^l}$ (ver Apéndice B para un cálculo detallado). A partir de ahora, y por simplicidad, consideramos que el límite superior de la suma previa es i, aunque esto implica que algunos términos de la suma pueden ser nulos.

Reemplazando (5.9) en (5.8), obtenemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}} P_n(x^2)P_m(x^2)d\mu_0$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \sum_{s=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \beta_{i,k,s} \int_{\mathbb{R}} P_n^{(k)}(x^2) P_m^{(s)}(x^2) x^{2k+2s-2i} d\mu_i \ ,$$

donde $\beta_{i,k,s}$ viene dado por (5.5). Introduciendo el cambio de variable $t = x^2$, obtenemos

$$0 = \int_0^{\infty} P_n(t)P_m(t)d\hat{\mu}_0$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \sum_{s=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \beta_{i,k,s} \int_0^{\infty} P_n^{(k)}(t) P_m^{(s)}(t) t^{k+s-i} d\hat{\mu}_i,$$

donde $d\hat{\mu}_j := 2d\mu_j(t^{1/2})$, $j = 0, ..., N$.

Esto significa que $\{P_n\}$ es una sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto interior de Sobolev no-diagonal $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ dado en (5.4). El producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ también puede expresarse en términos de una matriz de medidas simétrica y no diagonal $d\Omega_1$ del modo siguiente

$$\langle p, q \rangle_1 = \int_0^{\infty} [p,\ p',\ ...,\ p^{(N)}] d\Omega_1 \begin{bmatrix} q \\ q' \\ \vdots \\ q^{(N)} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

donde $d\Omega_1$ es una matriz de medidas de orden $N+1$ y

$$d\Omega_1(f+1,c+1)=\sum_{i=\text{máx}\{f,c\}}^{\text{mín}\{2\,\text{mín}\{f,c\},N\}}\lambda_i\,\beta_{i,f,c}\,x^{f+c-i}d\hat{\mu}_i,\quad 0\le f,c\le N. \tag{5.11}$$

En esta expresión, $\lambda_0=1$ y $d\Omega_1(f+1,c+1)=0$ si $\text{mín}\{2\,\text{mín}\{f,c\},N\}<\text{máx}\{f,c\}$.

Deducimos a continuación el producto interior tal que $\{P_n^{*s}\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonales correspondiente. Para $n\neq m$,

$$0=\langle Q_{2n+1},Q_{2m+1}\rangle_s=\int_{\mathbb{R}}x^2P_n^{*s}(x^2)P_m^{*s}(x^2)d\mu_0+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\int_{\mathbb{R}}Q_{2n+1}^{(i)}(x)Q_{2m+1}^{(i)}(x)d\mu_i.$$

Aplicando la regla de Leibniz, obtenemos la derivada i-ésima del polinomio $Q_{2n+1}(x)=xP_n^{*s}(x^2)$,

$$\frac{d^iQ_{2n+1}(x)}{dx^i}=x\frac{d^iP_n^{*s}(x^2)}{dx^i}+i\frac{d^{i-1}P_n^{*s}(x^2)}{dx^{i-1}}\;.$$

Las derivadas en el lado derecho pueden ser calculadas de forma explícita por medio de (5.9). Un cálculo directo nos lleva a

$$\frac{d^iQ_{2n+1}(x)}{dx^i}=\frac{d^i[xP_n^{*s}(x^2)]}{dx^i}=(i+1)!\sum_{k=\left[\frac{i}{2}\right]}^{i}(P_n^{*s})^{(k)}(x^2)\frac{2^{2k-i}x^{2k-i+1}}{(2k-i+1)!(i-k)!}\;. \tag{5.12}$$

Así tenemos

$$0=\int_{\mathbb{R}}x^2P_n^{*s}(x^2)P_m^{*s}(x^2)d\mu_0$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sum_{k=\left[\frac{i}{2}\right]}^{i}\sum_{s=\left[\frac{i}{2}\right]}^{i}\gamma_{i,k,s}\int_{\mathbb{R}}(P_n^{*s})^{(k)}(x^2)(P_m^{*s})^{(s)}(x^2)x^{2k+2s-2i+2}d\mu_i,$$

donde $\gamma_{i,k,s}$ viene dado por (5.7).

El cambio de variable $t=x^2$ da

$$0=\int_0^{\infty}tP_n^{*s}(t)P_m^{*s}(t)d\hat{\mu}_0+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sum_{k=\left[\frac{i}{2}\right]}^{i}\sum_{s=\left[\frac{i}{2}\right]}^{i}\gamma_{i,k,s}\int_0^{\infty}(P_n^{*s})^{(k)}(t)(P_m^{*s})^{(s)}(t)t^{k+s-i+1}d\hat{\mu}_i.$$

siendo, al igual que anteriormente, $d\hat{\mu}_i(t)=2d\mu_i(t^{1/2})$. Por tanto, $\{P_n^{*s}\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto de Sobolev no-diagonal $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ dado en (5.6). El producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ también puede expresarse en términos de una matriz de medidas simétrica y no-diagonal de orden $N+1$ $d\Omega_2$ como sigue

$$\langle p,q\rangle_2=\int_0^{\infty}[p,\;p',\;...,\;p^{(N)}]d\Omega_2\begin{bmatrix}q\\q'\\\vdots\\q^{(N)}\end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

donde

$$d\Omega_2(f+1,c+1) = \sum_{i=\text{máx}\{f,c\}}^{\text{mín}\{2\,\text{mín}\{f,c\},N\}} \lambda_i\, \gamma_{i,f,c}\, t^{f+c-i+1}\, d\hat{\mu}_i, \quad 0 \leq f, c \leq N, \quad (5.14)$$

$\lambda_0 = 1$ y $d\Omega_2(f+1,c+1) = 0$ si $\text{mín}\{2\,\text{mín}\{f,c\}, N\} < \text{máx}\{f,c\}$. □

En el caso particular en que $N = 1$, se obtienen los siguientes resultados:

La sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto al producto interno de Sobolev

$$\langle p, q\rangle_1 = \int_0^\infty pq\,d\hat{\mu}_0 + 4\int_0^\infty p'q'x\,d\hat{\mu}_1, \quad (5.15)$$

que también puede expresarse en términos de la matriz diagonal de medidas

$$d\Omega_1 = \begin{bmatrix} d\hat{\mu}_0 & 0 \\ 0 & 4x\,d\hat{\mu}_1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, $\{P_n^{*s}\}$ es una sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto interno de Sobolev no diagonal

$$\langle p, q\rangle_2 = \int_0^\infty \begin{bmatrix} p, & p' \end{bmatrix} d\Omega_2 \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

donde $d\Omega_2 = \begin{bmatrix} x\,d\hat{\mu}_0 + d\hat{\mu}_1 & 2x\,d\hat{\mu}_1 \\ 2x\,d\hat{\mu}_1 & 4x^2\,d\hat{\mu}_1 \end{bmatrix}$.

5.1.2.1. Relación entre los productos internos asociados a $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$

Nos planteamos ahora como objetivo establecer una relación entre los productos internos (5.4) y (5.6). Más concretamente, demostramos que el producto dado en (5.6) puede obtenerse a partir del producto (5.4) según (5.17). Sabemos que, en el caso lineal, si $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}^*$ denotan, respectivamente, los funcionales tales que $\{P_n\}$ y $\{P_n^*\}$ son las correspondientes sucesiones de polinomios mónicos ortogonales, entonces $\mathbf{L}^* = \mathbf{xL}$, donde $(\mathbf{xL})(p) = \mathbf{L}(xp)$. Por otra parte, vimos en la Sección 4.2.2 que, en el caso bilineal, dado un funcional bilineal simétrico y simetrizado $\mathbf{U}$, se sigue verificando la misma relación entre los correspondientes funcionales $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}^*$. Sin embargo, no pudimos dar, en un contexto general, una definición algebraica del funcional $\mathbf{xL}$. Se vió también que la definición más plausible es la que aparece en (4.28) pero que, en general, es inviable dado que el funcional $\mathbf{L}$ está definido en el conjunto $\mathbb{P}$. En el caso particular que nos ocupa, demostramos que esta definición es válida sin más que extender el dominio del correspondiente producto interior a un conjunto más amplio.

Teorema 5.1.1 *Si $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ son los productos internos definidos en (5.4) y (5.6), respectivamente, se verifica la siguiente relación:*

$$\langle p,q\rangle_2 = \langle x^{1/2}p, x^{1/2}q\rangle_1. \tag{5.17}$$

Observación 5.1.1 *Obsérvese que el producto interior (5.4) está definido en el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales. Pero, si extendemos su dominio al conjunto de funciones reales continuamente diferenciables, entonces el Teorema 5.1.1 tiene sentido.*

Observación 5.1.2 *El Teorema 5.1.1 es una extensión del resultado para funcionales lineales. En el caso bilineal, de alguna forma, podemos decir que el monomio x se divide en dos partes iguales correspondientes a cada argumento del funcional bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$.*

Demostración. Teniendo en cuenta (5.4),

$$\langle x^{1/2}p, x^{1/2}q\rangle_1 = \int_0^\infty xp(x)q(x)d\hat{\mu}_0$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i \sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i}\sum_{s=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i}\beta_{i,k,s}\int_0^\infty [x^{1/2}p(x)]^{(k)}[x^{1/2}q(x)]^{(s)}x^{k+s-i}d\hat{\mu}_i. \tag{5.18}$$

La derivada $[x^{1/2}p(x)]^{(l)}$ puede expresarse como una combinación de $p, p', ..., p^{(l)}$. Usando la regla de Leibniz y la expresión explícita de la derivada $(k-i)$-ésima de $x^{1/2}$, obtenemos

$$[x^{1/2}p(x)]^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} m_{k,i}\, x^{i-k+\frac{1}{2}}\, p^{(i)}(x), \tag{5.19}$$

con

$$m_{k,i} = \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}(-1)^{k-i}\left(-\frac{1}{2}\right)_{k-i}, \tag{5.20}$$

donde $(x)_n$ denota el símbolo de Pochhammer

$$(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1), \quad n\geq 1, \quad (x)_0 = 1.$$

Substituyendo la expresión (5.19) en (5.18), obtenemos

$$\langle x^{1/2}p, x^{1/2}q\rangle_1 = \int_0^\infty xp(x)q(x)d\hat{\mu}_0$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{i}\delta_{i,k,s}\int_0^\infty p^{(k)}(x)q^{(s)}(x)x^{k+s-i+1}d\hat{\mu}_i, \tag{5.21}$$

donde

$$\delta_{i,k,s} = \sum_{t=\text{máx}\left\{k,\left[\frac{i+1}{2}\right]\right\}}^{i} m_{t,k} \left[\sum_{l=\text{máx}\left\{s,\left[\frac{i+1}{2}\right]\right\}}^{i} \beta_{i,t,l}\, m_{l,s} \right]. \tag{5.22}$$

Por otro lado, obsérvese a partir (5.7) que $\gamma_{i,k,s} = 0$ cuando $k < \left[\frac{i}{2}\right]$ ó $s < \left[\frac{i}{2}\right]$ ya que, en ese caso, $2k-i+1 < 0$ ó $2s-i+1 < 0$. Entonces, (5.6) puede escribirse también en la forma siguiente

$$\langle p, q\rangle_2 = \int_0^\infty xp(x)q(x)d\hat{\mu}_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{k=0}^{i}\sum_{s=0}^{i} \gamma_{i,k,s} \int_0^\infty x^{k+s-i+1} p^{(k)}(x) q^{(s)}(x) d\hat{\mu}_i. \tag{5.23}$$

La comparación de las ecuaciones (5.21) y (5.23) revela que el Teorema 5.1.1 es equivalente a

$$\delta_{i,k,s} = \gamma_{i,k,s}, \quad \text{para todo } i, k, s. \tag{5.24}$$

Para probar (5.24) representamos la suma interior en (5.22) como una función hipergeométrica. Recordemos que la *función hipergeométrica generalizada* ${}_pF_q$ está definida mediante

$${}_pF_q \left[\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_p \\ b_1, b_2, ..., b_q \end{array} \middle| \, x \right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k ... (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k ... (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}.$$

Más aún, se dice que es balanceada si

$$\sum_{l=1}^{p} a_l = \sum_{l=1}^{q} b_l \; - 1.$$

Teniendo en cuenta las bien conocidas propiedades de la función gamma

$$x! = \Gamma(x+1), \quad x \in \mathbb{N}, \tag{5.25}$$

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = (-1)^n \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(1-x-n)}, \tag{5.26}$$

$$\Gamma(2x) = 2^{2x-1} \frac{\Gamma(x+\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(\frac{1}{2})}, \tag{5.27}$$

las ecuaciones (5.5) y (5.20) pueden reescribirse como sigue

$$\beta_{i,t,l} = \frac{2^{-2i}(-1)^{t+l}(-i)_t(-i)_l}{[\Gamma(1-i)]^2 \left(1-\frac{i}{2}\right)_t \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)_t \left(1-\frac{i}{2}\right)_l \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)_l},$$

$$m_{l,s} = \frac{(-1)^l (1)_l \left(-\frac{1}{2}-s\right)_l}{s!\,\Gamma(1-s)\left(\frac{3}{2}\right)_s (1-s)_l}.$$

Estas expresiones nos permiten escribir la suma interior en (5.22) como una función hipergeométrica ${}_4F_3$ de argumento unidad,

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=\max\left\{s,\left[\frac{i+1}{2}\right]\right\}}^{i} \beta_{i,t,l}\, m_{l,s} &= \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{i,t,l}\, m_{l,s} \\
&= \frac{2^{-2i}(-1)^t(-i)_t}{s!\,\Gamma(1-s)\left(\frac{3}{2}\right)_s[\Gamma(1-i)]^2\left(1-\frac{i}{2}\right)_t\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)_t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i)_l(1)_l\left(-\frac{1}{2}-s\right)_l}{\left(1-\frac{i}{2}\right)_l\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)_l(1-s)_l} \\
&= \frac{2^{-2i}(-1)^t(-i)_t}{s!\,\Gamma(1-s)\left(\frac{3}{2}\right)_s[\Gamma(1-i)]^2\left(1-\frac{i}{2}\right)_t\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)_t}\; {}_4F_3\left(\begin{matrix} -i,\,1,\,1,\,-\frac{1}{2}-s \\ 1-\frac{i}{2},\,\frac{1}{2}-\frac{i}{2},\,1-s \end{matrix} \,\middle|\, 1 \right).
\end{aligned}
$$

La función hipergeométrica ${}_4F_3$ previa es balanceada, por lo que, haciendo uso de la fórmula de transformación [45],

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} -n,b,c,d \\ \frac{b-n}{2},\frac{b-n+1}{2},c+d+\frac{1}{2} \end{matrix} \,\middle|\, 1 \right] = \frac{(2d-b+1)_r}{(1-b)_r}\; {}_3F_2\left[\begin{matrix} -n,2d,\frac{1}{2}+d-c \\ c+d+\frac{1}{2},2d-b+1 \end{matrix} \,\middle|\, 1 \right], \tag{5.28}
$$

Si, por convenio, denotamos $(0)_r = \frac{(-1)^r}{\Gamma(1-r)}$, teniendo en cuenta (5.26), encontramos que

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left(\begin{matrix} -i,\,1,\,1,\,-\frac{1}{2}-s \\ \frac{1}{2}-\frac{i}{2},\,1-\frac{i}{2},\,1-s \end{matrix} \,\middle|\, 1 \right) \\
&= \frac{(-1-2s)_i\,\Gamma(1-i)}{(-1)^i}\; {}_3F_2\left(\begin{matrix} -i,\,-1-2s,\,-1-s \\ 1-s,\,-1-2s \end{matrix} \,\middle|\, 1 \right) \\
&= \frac{(-1-2s)_i\,\Gamma(1-i)}{(-1)^i}\; {}_2F_1\left(\begin{matrix} -i,\,-1-s \\ 1-s \end{matrix} \,\middle|\, 1 \right).
\end{aligned}
$$

La anterior función hipergeométrica ${}_2F_1$ se puede determinar explícitamente mediante la fórmula de sumación de Gauss

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, 1 \right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad \mathrm{Re}(c-a-b) > 0,
$$

que conduce a

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} -i,1,1,-1/2-s \\ 1/2-i/2,1-i/2,1-s \end{matrix} \,\middle|\, 1 \right] = \frac{(-1-2s)_i\Gamma(1-i)\Gamma(1-s)\Gamma(i+2)}{(-1)^i\Gamma(1-s+i)}. \tag{5.29}
$$

Así concluímos que

$$
\sum_{l=\max\left\{s,\left[\frac{i+1}{2}\right]\right\}}^{i} \beta_{i,t,l}\, m_{l,s} = \frac{2^{-2i}(-1)^t(-i)_t(-1-2s)_i\,\Gamma(i+2)}{s!\left(\frac{3}{2}\right)_s\Gamma(1-i)\left(1-\frac{i}{2}\right)_t\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)_t(-1)^i\,\Gamma(1-s+i)}\,.
$$

Reemplazando este resultado en (5.22), la doble suma puede ser expresada como

$$\delta_{i,k,s} = \frac{(-1)^i\, 2^{-2i}\, (-1-2s)_i\, \Gamma(i+2)}{k!\, s!\, \left(\frac{3}{2}\right)_k \left(\frac{3}{2}\right)_s \Gamma(1-k)\Gamma(1-i)\Gamma(1-s+i)}$$
$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{array}{c} -i,\, 1,\, 1,\, -\frac{1}{2}-k \\ 1-\frac{i}{2},\, \frac{1}{2}-\frac{i}{2},\, 1-k \end{array} \middle| 1 \right),$$

que, usando (5.29), se simplifica del modo siguiente

$$\delta_{i,k,s} = \frac{2^{-2i}(i+1)!^2(-1-2s)_i(-1-2k)_i}{(i-s)!(i-k)!k!s!(3/2)_k(3/2)_s}.$$

Teniendo en cuenta (5.26) y (5.27), podemos demostrar fácilmente que

$$(-1-2t)_i = \frac{(-1)^i(1+2t)!}{(1+2t-i)!} = \frac{(-1)^i\, 2^{1+2t}\Gamma(3/2+t)\Gamma(1+t)}{(1+2t-i)!\Gamma(1/2)}.$$

Entonces,

$$\delta_{i,k,s} = \frac{2^{2k+2s-2i}(i+1)!^2}{(i-s)!(i-k)!(1+2s-i)!(1+2k-i)!} \cdot \frac{4\Gamma(3/2+s)\Gamma(3/2+k)}{\Gamma(1/2)^2(3/2)_k(3/2)_s},$$

y, por tanto, se cumple (5.24).

□

Observación 5.1.3 *En el capítulo anterior probamos que diferentes funcionales bilineales* $\mathbf{U}$ *pueden tener asociado el mismo funcional* $\mathbf{L}$ *pero diferente* $\mathbf{L}^*$*, i.e., en general,* $\mathbf{L}^*$ *no está determinado de forma única por* $\mathbf{L}$*. Se necesita información adicional sobre el funcional* $\mathbf{U}$ *que, junto con* $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{L}^*$*, define un determinado problema de simetrización. Sin embargo, el Teorema 5.1.1 muestra que, en el caso productos internos de Sobolev definidos en términos de medidas absolutamente contínuas, cada funcional* $\mathbf{L}$ *tiene asociado un único* $\mathbf{L}^*$*, que puede calcularse directamente a partir de* $\mathbf{L}$*. Más aún, en este caso podemos decir que* $\{P_n^{*s}\}$ *es la sucesión de polinomios núcleo asociada a* $\{P_n\}$*.*

El resultado dado en el Teorema 5.1.1 puede también expresarse como una relación entre las matrices de medidas que definen los productos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. De hecho, demostramos que ambas matrices son congruentes.

Corolario 5.1.1 *Consideremos las matrices de medidas* $d\Omega_1$ *y* $d\Omega_2$ *dadas en (5.11) y (5.14), respectivamente. Entonces,*

$$d\Omega_2 = A d\Omega_1 A^T,$$

donde A es una matriz triangular superior cuya j-ésima columna $A(:,j)$ viene dada por

$$A(:,j) = \begin{bmatrix} m_{j0}\, x^{1/2-j} \\ m_{j1}\, x^{3/2-j} \\ \vdots \\ m_{jj}\, x^{1/2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

con $m_{j,i}$ definido en (5.20).

Demostración. Es suficiente tener en cuenta (5.11), (5.14) y

$$[\ x^{1/2}p,\ \ (x^{1/2}p)^{(1)},\ \ \cdots,\ \ (x^{1/2}p)^{(k)}\ ] = [\ p,\ \ p^{(1)},\ \ \cdots,\ \ p^{(k)}\ ]A.$$

□

5.1.3. Productos internos de Sobolev simetrizados, de orden N y con medidas absolutamente continuas e iguales

En lo que sigue, suponemos que todas las medidas que definen el producto de Sobolev simetrizado son iguales y absolutamente continuas, i.e.,

$$\langle p,q\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} pq d\mu + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\mathbb{R}} p^{(i)} q^{(i)} d\mu, \tag{5.30}$$

donde μ es una medida de Borel positiva con soporte en un intervalo de la recta real, simétrico con respecto al origen y tal que los correspondientes momentos de orden impar son nulos y los $\{\lambda_i\}$ son reales no negativos. Además, existe un función contínua y no decreciente $\omega(x)$ tal que $d\mu = \omega(x)dx$. También suponemos que $\omega(x)$ es un *peso semiclásico* (ver Proposición 1.3.1). El estudio de los productos internos de Sobolev de orden N con respecto a una medida fue abordado por F. Marcellán, T. E. Pérez, M. A. Piñar, y A. Ronveaux en [52].

En la Sección 5.1.2, se mostró que las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ dadas en (5.3) son ortogonales con respecto a ciertos productos de Sobolev no diagonales expresados en términos de las matrices de medidas dadas en (5.11) y (5.14). En el caso particular en que todas las medidas que definen el producto de Sobolev simetrizado de orden N son iguales, se puede obtener una expresión simplificada de las matrices $d\Omega_1$ y $d\Omega_2$.

Proposición 5.1.2 *Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.30) y sean $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ las sucesiones dadas en (5.3). Si $d\Omega_1$ y*

$d\Omega_2$ son las matrices de medidas que definen los productos internos respecto de los cuales $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ son las correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales, entonces

$$d\Omega_1 = \pi_1(x)d\hat{\mu}, \quad d\Omega_2 = \pi_2(x)d\hat{\mu}, \tag{5.31}$$

donde $\pi_1(x)$ y $\pi_2(x)$ son polinomios matriciales de grado N y $N+1$, respectivamente y $d\hat{\mu} = 2d\mu(x^{1/2})$.

Demostración. Teniendo en cuenta (5.11), si $d\hat{\mu}_i = d\hat{\mu}$ para todo i,

$$d\Omega_1(f+1, c+1) = \left[\sum_{i=\text{máx}\{f,c\}}^{\text{mín}\{2\,\text{mín}\{f,c\},N\}} \lambda_i \beta_{i,f,c}\, x^{f+c-i} \right] d\hat{\mu}, \quad 0 \le f, c \le N.$$

Denotemos por $p_{f,c}(x)$ el polinomio que aparece entre corchetes en la expresión anterior. Este polinomio se anula si $\text{mín}\{2\,\text{mín}\{f,c\}, N\} < \text{máx}\{f,c\}$, mientras que, en cualquier otro caso, es de grado $f + c - \text{máx}\{f,c\} = \text{mín}\{f,c\}$. Dado que $0 \le f, c \le N$, $\text{máx}_{f,c}\{\deg(p_{f,c})\} = N$, que se alcanza si y sólo si $f = c = N$. Entonces, $d\Omega_1 = A d\hat{\mu}$.[1] Un argumento similar puede usarse para probar que $d\Omega_2 = \pi_2(x)d\hat{\mu}$, donde $\pi_2(x)$ es un polinomio matricial de grado $N+1$. □

En el caso particular en que $N = 1$ [2], se obtienen los siguientes resultados:

La sucesión $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto al producto interno de Sobolev diagonal con matriz de medidas

$$d\Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4t \end{bmatrix} t^{-\frac{1}{2}} \omega(t^{\frac{1}{2}}) dt \,.$$

La sucesión $\{P_n^{*s}\}$ es una sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto interno de Sobolev con matriz de medidas

$$d\Omega_2 = \begin{bmatrix} 1+t & 2t \\ 2t & 4t^2 \end{bmatrix} t^{-\frac{1}{2}} \omega(t^{1/2}) dt \,.$$

El soporte de las medidas, $d\Omega_1$, $d\Omega_2$, está contenido en $\mathbb{R}^+$. Denotamos

$$\pi_1(t) = t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi_2(t) = t^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$d\Omega_1 = \pi_1(t) t^{-\frac{1}{2}} \omega(t^{1/2}) dt$$

[1] donde A es un polinomio matricial de orden $N+1$ y grado menor o igual que N.

[2] Se supone que $\lambda_1 = 1$

$$d\Omega_2 = \pi_2(t)t^{-\frac{1}{2}}\omega(t^{1/2})dt\,.$$

En el resto de esta sección, enfocaremos nuestra atención en la obtención de una relación algebraica explícita entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$. Además, deduciremos relaciones de recurrencia de orden superior que satisfacen estas sucesiones.

5.1.3.1. Resultados auxiliares

Dado que el producto de Sobolev (5.30) que estamos considerando está definido en términos de una medida semiclásica μ, introducimos en esta subsección algunos resultados relacionados con funcionales y medidas semiclásicos que serán de gran utilidad en los desarrollos posteriores.

Consideremos un funcional lineal casi-definido y semiclásico $\mathbf{L}$ en $\mathbb{P}$ y sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a $\mathbf{L}$. Entonces,

$$D(\phi\mathbf{L}) = \psi\mathbf{L}, \tag{5.32}$$

donde ϕ y ψ son polinomios con $\deg(\phi) = r \geq 0$ y $\deg(\psi) \geq 1$.

Teorema 5.1.2 *[4] Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El funcional* $\mathbf{L}$ *es semiclásico.*
2. *La función de Stieltjes* $S_L(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{z^{n+1}}$ *con* $\mu_n = \mathbf{L}(x^n)$ *verifica*

$$\phi(z)S_L'(z) = C(z)S_L(z) + D(z), \tag{5.33}$$

donde

$$C(z) = -\phi'(z) + \psi(z), \tag{5.34}$$

$$D(z) = -(\mathbf{L}\theta_0\phi)'(z) + (\mathbf{L}\theta_0\tau)(z), \tag{5.35}$$

y

$$(\mathbf{L}\theta_0 p)(c) = \langle \mathbf{L}, \theta_c p\rangle, \quad (\mathbf{L}\theta_0 p)'(c) = \langle \mathbf{L}, \theta_c^2 p\rangle$$

$$\theta_c p = \frac{p(z) - p(c)}{z - c}.$$

El siguiente teorema prueba que el simetrizado de un funcional lineal semiclásico es también semiclásico.

Teorema 5.1.3 *[4] Sea* $\mathbf{L}$ *un funcional lineal semiclásico de clase* s *que verifica (5.95) y sea* $\mathbf{U}$ *su simetrizado. Entonces,* $\mathbf{U}$ *es también un funcional semiclásico y de clase* $\tilde{s}$ *que satisface la ecuación de Pearson* $D(\tilde{\phi}\mathbf{U}) = \tilde{\psi}\mathbf{U}$ *y, donde*

1. $\tilde{s} = 2s$ *si* $\phi(0) = 0$*, es decir,* $\phi(x) = xE(x)$ *y, además,* $2C(0)+E(0) = 0$*, es decir,* $2C(x) + E(x) = xG(x)$*, donde* C *es el polinomio definido en (5.34). Además,*

$$\tilde{\phi}(x) = E(x^2), \tag{5.36}$$

$$\tilde{\psi}(x) = x[G(x^2) + 2E'(x^2)]. \tag{5.37}$$

2. $\tilde{s} = 2s + 1$ *si* $\phi(0) = 0$, *es decir,* $\phi(x) = xE(x)$ *y* $2C(0) + E(0) \neq 0$. *Más aún,*
$$\tilde{\phi}(x) = xE(x^2), \tag{5.38}$$
$$\tilde{\tau}(x) = 2[E(x^2) + x^2E'(x^2) + C(x^2)]. \tag{5.39}$$

3. $\tilde{s} = 2s + 3$ *si* $\phi(0) \neq 0$, *y*
$$\tilde{\phi}(x) = x\phi(x^2), \tag{5.40}$$
$$\tilde{\tau}(x) = 2[\phi(x^2) + x^2\phi'(x^2) + x^2C(x^2)]. \tag{5.41}$$

A partir del teorema anterior se prueban las siguientes dos proposiciones que serán de gran utilidad cuando deduzcamos la relación algebraica explícita entre $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$.

Proposición 5.1.3 *Sea* $\mathbf{U}$ *un funcional lineal simétrico y semiclásico de clase* $\tilde{s}$ *tal que :*
$$D(\tilde{\phi}\mathbf{U}) = \tilde{\psi}\mathbf{U}.$$
Si $\tilde{s} = 2k$ *para algún* $k \in \mathbb{N}$, *entonces* $\tilde{\phi}$ *es un polinomio que es función par. Si* $\tilde{s} = 2k + 1$, *entonces* $\tilde{\phi}$ *es un polinomio que es función impar.*

Demostración.

1. Supongamos que $\mathbf{U}$ es el simetrizado de un funcional lineal $\mathbf{L}$ de clase s así como que $\tilde{s}$ es un número par. Entonces, por el Teorema 5.1.3, se obtiene
$$\tilde{s} = 2s, \quad \tilde{s} = 2s + 1 \quad \text{ó} \quad \tilde{s} = 2s + 3\,. \tag{5.42}$$
Dado que la clase de un funcional es un número entero no negativo, es fácil probar a partir de (5.42) que, si $\tilde{s} = 2k$, necesariamente $s = k$. Por tanto, $\mathbf{L}$ es de clase k, y $D(\phi\mathbf{L}) = \psi\mathbf{L}$ para ciertos polinomios ϕ, ψ. Por (5.36)
$$\tilde{\phi}(x) = E(x^2)$$
i.e., $\tilde{\phi}$ es un polinomio par.

2. Supongamos ahora que $\tilde{s}$ es un número impar, es decir, $\tilde{s} = 2k+1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces, por (5.42), puede ocurrir que $s = k$ ó $s = k-1$, esto es, $\mathbf{L}$ puede ser de clase k ó $k - 1$.

   - Si $s = k$, por (5.38) se verifica que
   $$\tilde{\phi}(x) = xE(x^2).$$
   Por tanto, $\tilde{\phi}$ es un polinomio impar.

- Si $s = k - 1$, entonces por (5.40)

$$\tilde{\phi}(x) = x\phi(x^2),$$

y $\tilde{\phi}$ es un polinomio impar.

□

Proposición 5.1.4 *Sea* $\mathbf{U}$ *un funcional lineal simétrico y semiclásico de clase* $\tilde{s}$. *Supongamos que* $\mathbf{U}$ *es el simetrizado del funcional lineal semiclásico* $\mathbf{L}$ *de clase* s. *Si* $D(\tilde{\phi}\mathbf{U}) = \tilde{\psi}\mathbf{U}$, *entonces*

1. *Cuando* $\tilde{s}$ *es par,* $\tilde{\psi}$ *es un polinomio impar.*
2. *Cuando* $\tilde{s}$ *es impar,* $\tilde{\psi}$ *es un polinomio par.*

Demostración.

1. Si $\tilde{s}$ es par, es decir, $\tilde{s} = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $s = k$ (ver Proposición 5.1.3). Además, por (5.37)

$$\tilde{\psi}(x) = x[G(x^2) + 2E'(x^2)],$$

para ciertos polinomios $G(x)$ y $E(x)$. Así, probamos que $\tilde{\psi}$ es un polinomio impar.

2. Si $\tilde{s}$ es impar, es decir, $\tilde{s} = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones

   - $s = k$ y $\tilde{\psi}(x) = 2[E(x^2) + x^2E'(x^2) + C(x^2)]$ para ciertos polinomios $E(x)$ y $C(x)$. Como consecuencia, $\tilde{\psi}$ es un polinomio par.

   - $s = k - 1$ y $\tilde{\psi}(x) = 2[\phi(x^2) + x^2\phi'(x^2) + x^2C(x^2)]$ para ciertos polinomios $\phi(x), C(x)$. Por tanto, $\tilde{\psi}$ es un polinomio par.

□

A partir de la ecuación de Pearson que satisface una función peso semiclásica ω, $(\phi(x)\omega(x))' = \psi(x)\omega(x)$, es fácil deducir que $\phi(x)\omega'(x) = [\psi(x) - \phi'(x)]\omega(x)$. El siguiente lema generaliza este resultado para derivadas de orden superior.

Lema 5.1.1 *[52] Si* $\omega(x)$ *es una función peso semiclásica, para todo entero no negativo* N,

$$\phi^N(x)D^N(\omega(x)) = \psi(x, N)\omega(x), \tag{5.43}$$

donde $D^N(\omega(x))$ *denota la derivada* N*-ésima de la función* ω *y*

$$\psi(x, 0) = 1,$$

$$\psi(x, N) = \phi(x)\psi'(x, N-1) + \psi(x, N-1)[\psi(x) - N\phi'(x)], \quad N \geq 1. \tag{5.44}$$

El siguiente lema acota el grado de los polinomios $\psi(x,N)$ introducidos en el lema anterior.

Lema 5.1.2 *[52] Dada una función peso semiclásica ω, el polinomio $\psi(x,N)$ definido en el lema previo verifica*

$$\deg(\psi(x,N)) \leq N(s+1), \quad N \geq 0,$$

donde s es la clase del funcional lineal semiclásico definido por ω.

A continuación introducimos un operador diferencial en el espacio vectorial $\mathbb{P}$ a partir de los polinomios $\phi(x)$ y $\psi(x,k)$ definidos en el Lema 5.1.1.

$$F^{(N)} := \phi^N(x)\ I + \sum_{m=1}^{N}(-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \phi^{N-m+i}(x)\psi(x,m-i)D^{m+i}, \quad (5.45)$$

donde I es el operador identidad.

Proposición 5.1.5 *Si ω es una función peso semiclásica, $r = deg(\phi)$, y s' es la clase del funcional lineal semiclásico definido por ω, entonces, para todo entero no negativo N,*

$$\deg(F^{(N)}(x^n)) \leq n + Ns, \quad (5.46)$$

donde $s = \max\{r, s'\}$.

Demostración. A partir de (5.45),

$$F^{(N)}(x^n) = x^n\ \phi^N(x) + \sum_{m=1}^{N}(-1)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \phi^{N-m+i}(x)\psi(x,m-i)D^{m+i}(x^n).$$

Usando el Lema 5.1.2,

$$\begin{aligned}\deg(F^{(N)}(x^n)) &\leq \max_{\substack{i=0:m\\ m=1:N}} \{n+Nr, r(N-m+i)+(m-i)(s'+1)+n-m-i\} \\ &= \max_{\substack{i=0:m\\ m=1:N}} \{n+Nr, n+Nr+m(s'-r)-i(s'+2-r)\}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (1.12), $s'+2-r \geq 0$. Por tanto,

$$\deg(F^{(N)}(x^n)) \leq \max_{m=1:N}\{n+Nr, n+Nr+m(s'-r)\},$$

o, equivalentemente,

$$\deg(F^{(N)}(x^n)) \leq n+Nr+N_0, \quad N_0 = \max_{m=1:N}\{0, m(s'-r)\}.$$

Por (1.12), $s'-r \geq -2$. Si $s'-r \geq 0$, entonces $N_0 = N(s'-r)$ y

$$\deg(F^{(N)}(x^n)) \leq n+Nr+N(s'-r) = n+Ns',$$

Por otro lado, si $s'-r < 0$, entonces $N_0 = 0$ y

$$\deg(F^{(N)}(x^n)) \leq n+Nr,$$

de modo que (5.46) se deduce de forma inmediata. $\square$

5.1.3.2. Relaciones algebraicas explícitas entre $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$

En esta sección encontramos relaciones algebraicas explícitas entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$. Para ello, consideramos el funcional lineal simétrico $\mathbf{U}$ dado por

$$\mathbf{U}(p) = \int_{\mathbb{R}} p(x)\omega(x)dx, \tag{5.47}$$

donde $d\mu = \omega(x)dx$, con μ la medida dada en (5.30). Sea $\{T_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.47). Entonces, $\{T_n\}$ satisface una relación de recurrencia a tres términos

$$xT_n(x) = T_{n+1}(x) + c_n T_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{5.48}$$

Además, dado que $\mathbf{U}$ es un funcional simétrico, existe una sucesión de polinomios mónicos $\{S_n\}$ tal que

$$T_{2n}(x) = S_n(x^2), \quad T_{2n+1}(x) = xS_n^*(x^2), \tag{5.49}$$

donde $\{S_n^*\}$ denota la sucesión de polinomios núcleo con parámetro 0 asociada a $\{S_n\}$.

En lo que sigue, suponemos que ω es un peso semiclásico que verifica $(\phi\omega)' = \psi\omega$, donde $\deg(\phi) = r$. Además, s' es la clase del funcional $\mathbf{U}$ y $s = \text{máx}\{r, s'\}$.

Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.30). El siguiente teorema establece una relación algebraica entre las sucesiones $\{Q_n\}$ y $\{T_n\}$ que nos será muy útil para determinar relaciones algebraicas entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$.

Teorema 5.1.4 *[52] Para todo entero no negativo $n \geq t$, donde $t := deg(F^{(N)}(x^n)) - n$,*

$$\phi^N(x)T_n(x) = \sum_{j=n-t}^{n+Nr} \alpha_{n,j} Q_j(x),$$

con N el orden del producto de Sobolev dado en (5.30).

Corolario 5.1.2 *Para todo entero no negativo $n \geq Ns$,*

$$\phi^N(x)T_n(x) = \sum_{j=n-Ns}^{n+Nr} \alpha_{n,j} Q_j(x). \tag{5.50}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 5.1.5, $t \leq Ns$ y, por tanto, $n - t \geq n - Ns$. Entonces, por el Teorema 5.1.4,

$$\phi^N(x)T_n(x) = \sum_{j=n-t}^{n+Nr} \alpha_{n,j} Q_j(x) = \sum_{j=n-Ns}^{n+Nr} \alpha_{n,j} Q_j(x),$$

aunque esto implica que, en algunos casos, los primeros coeficientes de la suma pueden ser nulos. $\square$

5.1.3.2.1. Relación algebraica en el caso par En esta subsección determinamos una relación algebraica entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ cuando el funcional lineal $\mathbf{U}$ dado en (5.47) es de clase par.

Proposición 5.1.6 *Consideremos el producto interior de Sobolev simetrizado dado en (5.30). Supongamos que la medida μ es absolutamente continua y semiclásica. Sea $\mathbf{U}$ el funcional lineal simétrico definido por μ. Sea, además, $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.30) y sean $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ las sucesiones que verifican (5.3). Entonces, si la clase s' del funcional $\mathbf{U}$ es par, se obtiene la siguiente relación algebraica explícita entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$:*

$$\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m,2j} P_j(x) = \alpha_{2m+1,2m+Nr+1} P^{*s}_{m+N\hat{r}}(x)$$

$$+ \sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}-1} (\alpha_{2m+1,2j+1} + c_{2m}\alpha_{2m-1,2j+1}) P_j^{*s}(x) + c_{2m}\alpha_{2m-1,2m-Ns-1} P^{*s}_{m-N\hat{s}-1}(x). \tag{5.51}$$

Demostración. Dado que la clase s' del funcional lineal $\mathbf{U}$ dado en (5.47) es un número par, entonces, por la Proposición 5.1.3, ϕ es un polinomio par, es decir,

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x^2). \tag{5.52}$$

Por tanto, r es par y, dado que $s = \max\{s', r\}$, s es también un número par. Entonces, escribimos $r = 2\hat{r}$ y $s = 2\hat{s}$. Para $n = 2m$, el Corolario 5.1.2 dice

$$\phi^N(x) T_{2m}(x) = \sum_{j=2m-Ns}^{2m+Nr} \alpha_{2m,j} Q_j(x). \tag{5.53}$$

Como el lado izquierdo de la identidad anterior es un polinomio par, obtenemos

$$\phi^N(x) T_{2m}(x) = \sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m,2j} Q_{2j}(x).$$

Teniendo en cuenta (5.3), (5.49) y (5.52), la ecuación previa puede reescribirse del modo siguiente

$$\tilde{\phi}^N(x) S_m(x) = \sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m,2j} P_j(x). \tag{5.54}$$

Por otro lado, del Corolario 5.1.2, para $n = 2m+1$ se tiene

$$\phi^N(x) T_{2m+1}(x) = \sum_{j=2m-Ns+1}^{2m+Nr+1} \alpha_{2m+1,j} Q_j(x). \tag{5.55}$$

En este caso, el término del lado izquierdo es un polinomio impar. Por tanto,

$$\phi^N(x)T_{2m+1}(x) = \sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m+1,2j+1}Q_{2j+1}(x).$$

Considerando de nuevo (5.3), (5.52) y (5.49)

$$\tilde{\phi}^N(x)S_m^*(x) = \sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x). \tag{5.56}$$

Teniendo en cuenta (5.48) para $n = 2m$, a partir de (5.49) obtenemos

$$S_m(x) = S_m^*(x) + c_{2m}S_{m-1}^*(x). \tag{5.57}$$

Multiplicando (5.57) por $\tilde{\phi}^N$ y usando (5.54) y (5.56), obtenemos

$$\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m,2j}P_j(x) = \sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x) \;+\; c_{2m} \sum_{j=m-N\hat{s}-1}^{m+N\hat{r}-1} \alpha_{2m-1,2j+1}P_j^{*s}(x), \tag{5.58}$$

que nos lleva a la relación algebraica explícita entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ dada en (5.51). □

5.1.3.2.2. Relación algebraica en el caso impar

Proposición 5.1.7 *Consideremos el producto interior de Sobolev simetrizado de orden N dado en (5.30). Supongamos que la medida μ es absolutamente continua y semiclásica. Sea $\mathbf{U}$ el funcional lineal simétrico definido por μ. Sea, además, $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.30) y sean $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ las sucesiones que verifican (5.3). Entonces, si la clase s' del funcional $\mathbf{U}$ es impar, se obtienen las siguientes relaciones algebraicas explícitas entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$:*

1. *Si N es par*

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m,2j}P_j(x) \\
&= \alpha_{2m+1,2m+Nr+1}P_{m+Tr}^{*s}(x) + \sum_{j=m-Ts}^{m+Tr-1} (\alpha_{2m+1,2j+1} \\
&+ c_{2m}\alpha_{2m-1,2j+1})P_j^{*s}(x) + c_{2m}\alpha_{2m-1,2m-Ns-1}P_{m-Ts-1}^{*s}(x).
\end{aligned}$$

2. *Si N es impar*

$$\sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}+1} \alpha_{2m+1,2j} P_j(x) = \alpha_{2m+2,2m+Nr+2} P^{*s}_{m+Tr+\hat{r}+1}(x)$$
$$+ \sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}} (\alpha_{2m+2,2j+1} + c_{2m+1}\alpha_{2m,2j+1}) P^{*s}_j(x)$$
$$+ c_{2m+1}\alpha_{2m,2m-Ns-1} P^{*s}_{m-Ts-\hat{s}-1}(x).$$

Demostración. Suponemos ahora que s' es un número impar. Entonces, por la Proposición 5.1.3, ϕ es un polinomio impar y, como consecuencia, existe un polinomio $\hat{\phi}$ tal que

$$\phi(x) = x\hat{\phi}(x^2). \tag{5.59}$$

Como r es impar, s es también un número impar. En lo que sigue, escribimos $r = 2\hat{r} + 1$ y $s = 2\hat{s} + 1$.

A fin de encontrar una relación algebraica explícita entre $\{P_n\}$ y $\{P^{*s}_n\}$ en el caso impar, es necesario, además, distinguir entre los casos N par y N impar.

1. Supongamos que N es par. Entonces, escribimos $N = 2T$, para algún entero no negativo T. En (5.53), el término del lado izquierdo es un polinomio par, de modo que

$$\phi^N(x)T_{2m}(x) = \sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m,2j} Q_{2j}(x).$$

Teniendo en cuenta (5.3),(5.59) y (5.49) obtenemos

$$x^T\hat{\phi}^N(x)S_m(x) = \sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m,2j} P_j(x). \tag{5.60}$$

Consideremos ahora (5.55) para obtener, de la misma manera,

$$x^T\hat{\phi}^N(x)S^*_m(x) = \sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m+1,2j+1} P^{*s}_j(x). \tag{5.61}$$

Si multiplicamos ambos miembros de (5.57) por $x^T\hat{\phi}^N(x)$, las ecuaciones en (5.60) y (5.61) nos llevan a una relación algebraica explícita entre $\{P_n\}$ y $\{P^{*s}_n\}$.

$$\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m,2j} P_j(x) = \sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m+1,2j+1} P^{*s}_j(x)$$
$$+c_{2m} \sum_{j=m-Ts-1}^{m+Tr-1} \alpha_{2m-1,2j+1} P^{*s}_j(x), \tag{5.62}$$

de la que es fácil deducir el resultado buscado.

2. Supongamos que N es impar de modo que $N = 2T + 1$ para algún entero no negativo T. Ahora, el término del lado izquierdo en (5.53) es un polinomio impar, y considerando (5.3), (5.59) y (5.49), obtenemos

$$x^T \hat{\phi}^N(x) S_m(x) = \sum_{j=m-Ts-\hat{s}-1}^{m+Tr+\hat{r}} \alpha_{2m,2j+1} P_j^{*s}(x). \tag{5.63}$$

Por (5.55) y teniendo en cuenta las mismas consideraciones que en el caso previo, obtenemos

$$x^{T+1} \hat{\phi}^N(x) S_m^*(x) = \sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}+1} \alpha_{2m+1,2j} P_j(x). \tag{5.64}$$

De (5.48) para $n = 2m + 1$, y a partir de (5.49), se obtiene

$$x S_m^*(x) = S_{m+1}(x) + c_{2m+1} S_m(x). \tag{5.65}$$

Reemplazando (5.63) y (5.64) en (5.65), obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}+1} \alpha_{2m+1,2j} P_j(x) \\ = &\sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}+1} \alpha_{2m+2,2j+1} P_j^{*s}(x) + c_{2m+1} \sum_{j=m-Ts-\hat{s}-1}^{m+Tr+\hat{r}} \alpha_{2m,2j+1} P_j^{*s}(x), \end{aligned} \tag{5.66}$$

de la que se deduce de forma inmediata el resultado buscado.

□

5.1.3.3. Relaciones de recurrencia

A continuación deducimos relaciones de recurrencia a un número finito de términos para las sucesiones $\{P_n\}$, $\{P_n^{*s}\}$ y $\{Q_n\}$. El número de términos que presentan dichas relaciones está asociado a la clase del funcional $\mathbf{U}$ así como al grado del polinomio ϕ.

5.1.3.3.1. Relación de recurrencia para $\{P_n\}$

Proposición 5.1.8 *Consideremos el producto interior de Sobolev simetrizado de orden N dado en (5.30). Supongamos que la medida μ es absolutamente contínua y semiclásica. Sea $\mathbf{U}$ el funcional lineal simétrico definido por μ. Sea, además, $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.30) y sean $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ las sucesiones que verifican (5.3). Entonces, se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia para la sucesión $\{P_n\}$:*

1. *Si la clase s' de* **U** *es un número par, la sucesión $\{P_n\}$ verifica la siguiente relación a $[N(\hat{s}+\hat{r})+3]$-términos*

$$\alpha_{2m+2,2m+Nr+1}P_{m+N\hat{r}+1}(x) = (x\alpha_{2m,2m+Nr} - \alpha_{2m+2,2m+Nr}$$
$$- c_{2m+1}\alpha_{2m,2m+Nr} - c_{2m}\alpha_{2m,2m+Nr})P_{m+N\hat{r}}(x) + \sum_{j=m-N\hat{s}+1}^{m+N\hat{r}-1}[x\alpha_{2m,2j}$$
$$- \alpha_{2m+2,2j} - c_{2m+1}\alpha_{2m,2j} - c_{2m}(\alpha_{2m,2j} + c_{2m-1}\alpha_{2m-2,2j})P_j(x)$$
$$+ [x\alpha_{2m,2m-Ns} - c_{2m+1}\alpha_{2m,2m-Ns} - c_{2m}(\alpha_{2m,2m-Ns}$$
$$+ c_{2m-1}\alpha_{2m-2,2m-Ns})]P_{m-N\hat{s}}(x) - c_{2m}c_{2m-1}\alpha_{2m-2,2m-Ns-2}P_{m-N\hat{s}-1}(x).$$

2. *Si la clase s' de* **U** *es un número impar, $\{P_n\}$ verifica una relación a $[N(\hat{s}+\hat{r}+1)+3]$-términos*

   - *Si N es par,*

$$\alpha_{2m+2,2m+Nr+2}P_{m+Tr+1}(x)$$
$$= [\alpha_{2m,2m+Nr}(x - c_{2m+1} - c_{2m}) - \alpha_{2m+2,2m+Nr}]P_{m+Tr}(x)$$
$$+ \sum_{j=m-Ts+1}^{m+Tr-1}[(x-c_{2m+1}-c_{2m})\alpha_{2m,2j}-\alpha_{2m+2,2j}-c_{2m}c_{2m-1}\alpha_{2m-2,2j}]P_j(x)$$
$$+[(x - c_{2m+1} - c_{2m})\alpha_{2m,2m-Ns} - c_{2m}c_{2m-1}\alpha_{2m-2,2m-Ns}]P_{m-Ts}(x)$$
$$-c_{2m}c_{2m-1}\alpha_{2m-2,2m-Ns-2}P_{m-Ts-1}(x).$$

   - *Si N es impar,*

$$\alpha_{2m+3,2m+Nr+4}P_{m+Tr+\hat{r}+2} = (x\alpha_{2m+1,2m+Nr+2} - \alpha_{2m+3,2m+Nr+2}$$
$$- c_{2m+2}\alpha_{2m+1,2m+Nr+2} - c_{2m+1}\alpha_{2m+1,2m+Nr+2})P_{m+Tr+\hat{r}+1}(x)$$
$$\sum_{j=m-Ts-\hat{s}+1}^{m+Tr+\hat{r}}(x\alpha_{2m+1,2j} - \alpha_{2m+3,2j} - (c_{2m+2} + c_{2m+1})\alpha_{2m+1,2j}$$
$$- c_{2m+1}c_{2m}\alpha_{2m-1,2j})P_j(x) - (x\alpha_{2m+1,2m-Ns} - c_{2m+2}\alpha_{2m+1,2m-Ns}$$
$$- c_{2m+1}\alpha_{2m+1,2m-Ns} - c_{2m+1}c_{2m}\alpha_{2m-1,2m-Ns})P_{m-Ts-\hat{s}}(x)$$
$$- c_{2m+1}c_{2m}\alpha_{2m-1,2m-Ns-2}P_{m-Ts-\hat{s}-1}(x).$$

Demostración.

1. Supongamos que s' es par. Multiplicando ambos lados de (5.65) por $\tilde{\phi}^N(x)$, y reemplazando (5.54) y (5.56) en ella, obtenemos

$$x\left[\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}}\alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)\right] = \sum_{j=m-N\hat{s}+1}^{m+N\hat{r}+1}\alpha_{2m+2,2j}P_j(x)$$
$$+ c_{2m+1}\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}}\alpha_{2m,2j}P_j(x). \tag{5.67}$$

Ahora, multiplicamos ambos miembros de (5.58) por x y reemplazamos (5.67) en ella para obtener

$$\begin{aligned} & x\left[\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m,2j}P_j(x)\right] \\ & = \sum_{j=m-N\hat{s}+1}^{m+N\hat{r}+1} \alpha_{2m+2,2j}P_j(x) \ + \ c_{2m+1}\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m,2j}P_j(x) \\ & + \ c_{2m}\left[\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}} \alpha_{2m,2j}P_j(x) + c_{2m-1}\sum_{j=m-N\hat{s}-1}^{m+N\hat{r}-1} \alpha_{2m-2,2j}P_j(x)\right]. \end{aligned}$$

A partir de la expresión anterior, se obtiene la relación de recurrencia a $(N\hat{s}+N\hat{r}+3)$-términos para $\{P_n\}$.

2. Supongamos que s' es impar. En este caso, tenemos que distinguir entre N impar o par.

   a) Supongamos que N es par. Teniendo en cuenta (5.60), (5.61) y (5.65), llegamos a

$$x\left[\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)\right]$$

$$= \sum_{j=m-Ts+1}^{m+Tr+1} \alpha_{2m+2,2j}P_j(x) + c_{2m+1}\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m,2j}P_j(x). \quad (5.68)$$

   Ahora, consideremos (5.62) y reemplacemos el resultado previo en ella. Así obtenemos la siguiente relación de recurrencia a $(N\hat{r}+N\hat{s}+3+N)$-términos para $\{P_n\}$:

$$\begin{aligned} & x\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m,2j}P_j(x) \\ & = \sum_{j=m-Ts+1}^{m+Tr+1} \alpha_{2m+2,2j}P_j(x) \ + \ c_{2m+1}\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m,2j}P_j(x) \\ & + \ c_{2m}\left[\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr} \alpha_{2m,2j}P_j(x) + c_{2m-1}\sum_{j=m-Ts-1}^{m+Tr-1} \alpha_{2m-2,2j}P_j(x)\right], \end{aligned}$$

   de la cual se deduce, de forma inmediata, la relación que aparece en el enunciado de la proposición.

b) Supongamos ahora que N es impar. Teniendo en cuenta (5.57), (5.63) y (5.64), obtenemos

$$x\left[\sum_{j=m-Ts-\hat{s}-1}^{m+Tr+\hat{r}} \alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)\right] = \sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}+1} \alpha_{2m+2,2j}P_j(x)$$
$$+c_{2m}\sum_{j=m-Ts-\hat{s}-1}^{m+Tr+\hat{r}} \alpha_{2m,2j}P_j(x). \tag{5.69}$$

Ahora reemplazamos el resultado anterior en (5.66). Obtenemos una relación de recurrencia a $(N\hat{r}+N\hat{s}+3+N)$-términos para $\{P_n\}$:

$$x\sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}+1} \alpha_{2m+1,2j}P_j(x)$$
$$= \sum_{j=m-Ts-\hat{s}+1}^{m+Tr+\hat{r}+2} \alpha_{2m+3,2j}P_j(x) + \ c_{2m+2}\sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}+1} \alpha_{2m+1,2j}P_j(x)$$
$$+\ c_{2m+1}\left[\sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}+1} \alpha_{2m+1,2j}P_j(x) + \ c_{2m}\sum_{j=m-Ts-\hat{s}-1}^{m+Tr+\hat{r}} \alpha_{2m-1,2j}P_j(x)\right],$$

y, a partir de ella, se obtiene de forma inmediata el resultado buscado.

□

Nota: A partir de ahora y por simplicidad, omitiremos la expresión desarrollada de las relaciones de recurrencia.

5.1.3.3.2. Relación de recurrencia para $\{P_n^{*s}\}$

Proposición 5.1.9 *Consideremos el producto interior de Sobolev simetrizado de orden N dado en (5.30). Supongamos que la medida μ es absolutamente continua y semiclásica. Sea* **U** *el funcional lineal simétrico definido por μ. Sea, además, $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.30) y sean $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ las sucesiones que verifican (5.3). Entonces, se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia para la sucesión $\{P_n^{*s}\}$:*

1. *Si la clase s' de* **U** *es un número par, la sucesión $\{P_n^{*s}\}$ verifica la*

siguiente relación a [$N(\hat{s}+\hat{r})+3$]-términos

$$x\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}}\alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)$$
$$=\sum_{j=m-N\hat{s}+1}^{m+N\hat{r}+1}\alpha_{2m+3,2j+1}P_j^{*s}(x)+\ c_{2m+2}\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}}\alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)$$
$$+\,c_{2m+1}\left[\sum_{j=m-N\hat{s}}^{m+N\hat{r}}\alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)+\ c_{2m}\sum_{j=m-N\hat{s}-1}^{m+N\hat{r}-1}\alpha_{2m-1,2j+1}P_j^{*s}(x)\right].$$

2. *Si la clase s' de* **U** *es un número impar, $\{P_n^{*s}\}$ verifica una relación a* $[N(\hat{s}+\hat{r}+1)+3]$*-términos*

   - *Si N es par,*

$$x\left[\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr}\alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)\right]$$
$$=\sum_{j=m-Ts+1}^{m+Tr+1}\alpha_{2m+3,2j+1}P_j^{*s}(x)+\ c_{2m+2}\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr}\alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)$$
$$+\,c_{2m+1}\left[\sum_{j=m-Ts}^{m+Tr}\alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)+\ c_{2m}\sum_{j=m-Ts-1}^{m+Tr-1}\alpha_{2m-1,2j+1}P_j^{*s}(x)\right].$$

   - *Si N es impar,*

$$x\left[\sum_{j=m-Ts-\hat{s}-1}^{m+Tr+\hat{r}}\alpha_{2m,2j+1}P_j^{*s}(x)\right]$$
$$=\sum_{j=m-Ts-\hat{s}}^{m+Tr+\hat{r}+1}\alpha_{2m+2,2j+1}P_j^{*s}(x)+\ c_{2m+1}\sum_{j=m-Ts-\hat{s}-1}^{m+Tr+\hat{r}}\alpha_{2m,2j+1}P_j^{*s}(x)$$
$$+\,c_{2m}\left[\sum_{j=m-Ts-\hat{s}-1}^{m+Tr+\hat{r}}\alpha_{2m,2j+1}P_j^{*s}(x)\right.$$
$$\left.+\,c_{2m-1}\sum_{j=m-Ts-\hat{s}-2}^{m+Tr+\hat{r}-1}\alpha_{2m-2,2j+1}P_j^{*s}(x)\right].$$

Demostración.

1. Si s' es par, reemplazando (5.58) en (5.67), obtenemos el resultado.

2. Cuando s' es impar, de nuevo distinguimos entre N par ó impar. En ambos casos, reemplazando (5.62) en (5.68) se obtienen los resultados.

□

5.1.3.3.3. Relación de recurrencia para $\{Q_n\}$

Proposición 5.1.10 *Consideremos el producto interior de Sobolev simetrizado de orden N dado en (5.30). Supongamos que la medida μ es absolutamente contínua y semiclásica. Sea* $\mathbf{U}$ *el funcional lineal simétrico definido por μ y $\{T_n\}$ la correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales. Sea, además, $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.30). Entonces, se obtiene la siguiente relación de recurrencia a $(Ns + Nr + 3)$-términos para la sucesión $\{Q_n\}$: :*

$$\begin{aligned}
&\alpha_{n+1,n+Nr+1}Q_{n+Nr+1}(x) = (x\alpha_{n,n+Nr} - \alpha_{n+1,n+Nr})Q_{n+Nr}(x)\\
&+ \sum_{j=n-Ns+1}^{n+Nr-1} (x\alpha_{n,j} - \alpha_{n+1,j} - c_n\alpha_{n-1,j})Q_j(x)\\
&+ (x\alpha_{n,n-Ns} - c_n\alpha_{n-1,n-Ns})Q_{n-Ns}(x) - c_n\alpha_{n-1,n-Ns-1}Q_{n-Ns-1}(x).
\end{aligned}$$

Demostración. Multiplicando ambos miembros de (5.50) por x,

$$x\phi^N(x)T_n(x) = \sum_{j=n-Ns}^{n+Nr} \alpha_{n,j}xQ_j(x).$$

A partir de (5.48),

$$\phi^N(x)[T_{n+1}(x) + c_nT_{n-1}(x)] = \sum_{j=n-Ns}^{n+Nr} \alpha_{n,j}xQ_j(x).$$

Si aplicamos dos veces el Corolario (5.1.2) a la expresión anterior, entonces

$$\sum_{j=n-Ns+1}^{n+Nr+1} \alpha_{n+1,j}Q_j(x) + c_n \sum_{j=n-Ns-1}^{n+Nr-1} \alpha_{n-1,j}Q_j(x) = \sum_{j=n-Ns}^{n+Nr} \alpha_{n,j}xQ_j(x).$$

Por tanto, la sucesión $\{Q_n\}$ satisface la relación de recurrencia dada en el enunciado de la proposición.

□

5.1.4. Ejemplo: Polinomios ortogonales de Freud-Sobolev

En esta sección analizamos el caso en que $d\mu = e^{-x^4}dx$, i.e., consideramos el producto interior

$$\langle p, q\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} pqe^{-x^4}dx + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\mathbb{R}} p^{(i)}q^{(i)}e^{-x^4}dx, \tag{5.70}$$

donde $\{\lambda_i\}$ son números reales no negativos, y aplicamos los resultados obtenidos en secciones previas a este caso particular. Los polinomios $\{Q_n\}$ ortogonales con respecto a (5.70) son un ejemplo de los llamados polinomios de Freud-Sobolev [20].

Es bien sabido que $\omega(x) = e^{-x^4}$ es un peso semiclásico [20]. De hecho, $\omega(x)$ satisface la ecuación de Pearson (1.11), con $\phi(x) = 1$ y $\psi(x) = -4x^3$. Por tanto, usando las notaciones de la sección previa, $r = 0$, $s' = 2$ y $s = 2$. Dado que s' es un número par, podemos decir que

1. Las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ satisfacen relaciones de recurrencia a $(N+3)$-términos (ver Secciones 5.1.3.3.1 y 5.1.3.3.2).

2. La sucesión $\{Q_n\}$ satisface una relación de recurrencia a $(2N+3)$-términos (ver Sección 5.1.3.3.3).

3. Se puede establecer una relación algebraica explícita entre $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$. Esta relación implica $N+1$ términos de la sucesión $\{P_n\}$ y $N+2$ términos de la sucesión $\{P_n^{*s}\}$ (ver sección 5.1.3.2.1).

Para $N = 1$ [3] se obtienen los siguientes resultados:

La sucesión $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto al producto interno de Sobolev diagonal dado por la matriz de medidas

$$d\Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4t \end{bmatrix} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt \,. \tag{5.71}$$

La sucesión $\{P_n^{*s}\}$ es una sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto de Sobolev diagonal dado por la matriz de medidas

$$d\Omega_2 = \begin{bmatrix} 1+4t & 0 \\ 0 & 4t \end{bmatrix} t^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt \,. \tag{5.72}$$

Se verifican las siguientes relaciones algebraicas entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$

$$\begin{aligned}
&x[P_m^{*s}(x) + \alpha_{2m+1,2m-1} P_{m-1}^{*s}(x)] \\
&= P_{m+1}(x) + (\alpha_{2m+2,2m} + c_{2m+1}) P_m(x) + \alpha_{2m,2m-2} c_{2m+1} P_{m-1}(x), \quad m \geq 1, \\
&x[P_1^{*s}(x) + \alpha_{3,1} P_0^{*s}(x)] = P_2(x) + (\alpha_{4,2} + c_3) P_1(x), \\
&x P_0^{*s}(x) = P_1(x) + c_1 P_0(x).
\end{aligned}$$

Así mismo,

$$\begin{aligned}
&P_m(x) + \alpha_{2m,2m-2} P_{m-1}(x) \\
&= P_m^{*s}(x) + (\alpha_{2m+1,2m-1} + c_{2m}) P_{m-1}^{*s}(x) + c_{2m} \alpha_{2m-1,2m-3} P_{m-2}^{*s}(x), \\
&P_1(x) = P_1^{*s}(x) + (\alpha_{3,1} + c_2) P_0^{*s}(x), \quad P_0(x) = P_0^{*s}(x).
\end{aligned} \tag{5.73}$$

[3] Se supone que $\lambda_1 = 1$

Las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ verifican las siguientes relaciones de recurrencia a cuatro términos

$$P_{m+1}(x) = [x - (\alpha_{2m+2,2m} + c_{2m} + c_{2m+1})]P_m(x) + [\alpha_{2m,2m-2}(x - c_{2m} - c_{2m+1}) \\ -c_{2m-1}c_{2m}]P_{m-1}(x) - c_{2m-1}c_{2m}\alpha_{2m-1,2m-3}P_{m-2}(x), \quad m \geq 2,$$

$$P_{m+1}^{*s}(x) = [x - (\alpha_{2m+3,2m+1} + c_{2m+1} + c_{2m+2})]P_m^{*s}(x) + [\alpha_{2m+1,2m-1}(x - c_{2m+1} \\ -c_{2m+2}) - c_{2m}c_{2m+1}]P_{m-1}^{*}(x) - c_{2m}c_{2m+1}\alpha_{2m-2,2m-4}P_{m-2}^{*s}(x) \quad m \geq 0.$$

La sucesión $\{Q_n\}$ verifica la siguiente relación de recurrencia a cinco términos.

$$\begin{aligned}
&Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - (\alpha_{n+1,n-1} + c_n)Q_{n-1}(x) \\
&+x\alpha_{n,n-2}Q_{n-2}(x) - c_n\alpha_{n-1,n-3}Q_{n-3}(x), \quad n \geq 3, \\
&Q_3(x) = xQ_2(x) - (c_2 + \alpha_{3,1})Q_1(x), \quad Q_2(x) = xQ_1(x) - c_1Q_0(x), \\
&Q_0(x) = 1, Q_1(x) = x.
\end{aligned}$$

5.1.4.1. Relación entre las matrices de Hessenberg asociadas a las sucesiones $\{T_n\}$ y $\{Q_n\}$

En este caso particular, el Corolario 5.1.2 afirma que

$$T_n(x) = \sum_{j=n-2N}^{n} \alpha_{n,j}Q_j(x), \tag{5.74}$$

donde $\{T_n\}$ es la sucesión de polinomios de Freud. Este resultado nos permite deducir una relación entre la matriz de Jacobi asociada a la sucesión $\{T_n\}$ y la matriz de Hessenberg asociada a $\{Q_n\}$. Sea J la matriz mónica de Jacobi asociada a la sucesión $\{T_n\}$. Entonces,

$$xv_t = Jv_t, \tag{5.75}$$

donde $v_t = \begin{bmatrix} T_0(x), & T_1(x), & T_2(x), & \ldots \end{bmatrix}^T$. Por otro lado, sea H la matriz de Hessenberg asociada a $\{Q_n\}$,

$$xv_q = Hv_q, \tag{5.76}$$

donde $v_q = \begin{bmatrix} Q_0(x), & Q_1(x), & Q_2(x), & \ldots \end{bmatrix}^T$.

Teniendo en cuenta (5.74), es obvio que existe una matriz triangular inferior a bandas L tal que

$$v_t = Lv_q.$$

Más aún, L es una matriz no singular dado que los polinomios T_n y Q_n tienen grado n. Por tanto, teniendo en cuenta (5.75),

$$xLv_q = JLv_q,$$

o, equivalentemente,

$$xv_q = (L^{-1}JL)v_q.$$

Pero, comparando con (5.76), se obtiene

$$H = L^{-1}JL,$$

que es la relación matricial que estábamos buscando.

5.1.4.2. Medidas de ortogonalidad

De acuerdo con la Subsección 5.1.2, la sucesión $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto al producto interior

$$\langle p, q\rangle_1 = \int_0^\infty pq d\hat{\mu} + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \sum_{s=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \beta_{i,k,s} \int_0^\infty p^{(k)}(x)q^{(s)}(x)x^{k+s-i}d\hat{\mu}, \quad (5.77)$$

donde

$$\beta_{i,k,s} = \frac{2^{2k+2s-2i}(i!)^2}{(2k-i)!(i-k)!(2s-i)!(i-s)!}, \quad d\hat{\mu} = 2\hat{\omega}(x)dx = x^{-1/2}e^{-x^2}dx.$$

Obsérvese que la función peso $\hat{\omega}$ es semiclásica ya que satisface la ecuación de Pearson (1.11) con $\phi(x) = 2x$ y $\psi(x) = 1 - 4x^2$. Entonces, del Lema 5.1.1 se sigue que

$$\phi^N(x)D^N(\hat{\omega}(x)) = \psi(x, N)\hat{\omega}(x), \quad (5.78)$$

donde

$$\begin{aligned} &\psi(x, 0) = 1\,, \\ &\psi(x, N) = 2x\psi'(x, N-1) + \psi(x, N-1)[1 - 2N - 4x^2]\,, \quad N \geq 1\,, \end{aligned}$$

y el Lema 5.1.2 establece que

$$\deg(\psi(x, N)) \leq 2N. \quad (5.79)$$

En general, el producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ es no diagonal. Pero probaremos que, en el caso de los polinomios de Freud-Sobolev, es un producto interior de Sobolev diagonal.

Proposición 5.1.11 *El producto interior dado por (5.77) puede expresarse en términos de una matriz de medidas diagonal de orden $N+1$ $d\Omega_1$ como sigue:*

$$\langle p, q\rangle_1 = \int_0^\infty [p,\ p',\ \ldots,\ p^{(N)}]d\Omega_1 \begin{bmatrix} q \\ q' \\ \vdots \\ q^{(N)} \end{bmatrix}. \quad (5.80)$$

Demostración. La matriz $d\Omega_1$ será diagonal si el producto interior (5.77) puede ser expresado de tal modo que sólo contenga términos en los que p y q estén afectados por la misma derivada, i.e., $p^{(k)}q^{(k)}$. Para un i fijo, $1 \leq i \leq N$, consideramos el cambio de índices

$$l = 2i - k - s\,, \quad r = i - k = s - i + l\,.$$

El término correspondiente de la suma en (5.77) se transforma, entonces, en

$$\begin{aligned}&\sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \sum_{s=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} \beta_{i,k,s} \int_0^\infty p^{(k)}(x) q^{(s)}(x) x^{k+s-i} d\hat{\mu} \\ &= \sum_{l=0}^{2i-2\left[\frac{i+1}{2}\right]} \sum_{r=\tilde{r}}^{\tilde{l}} \beta_{i,i-r,i-l+r} \int_0^\infty p^{(i-r)}(x) q^{(i-l+r)}(x) x^{i-l} d\hat{\mu}\,,\end{aligned} \tag{5.81}$$

donde

$$\tilde{r} = \text{máx}\left\{0, l - i + \left[\frac{i+1}{2}\right]\right\}\,, \quad \tilde{l} = \text{mín}\left\{i - \left[\frac{i+1}{2}\right], l\right\}\,.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}&\tilde{r} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{l} = l\,, \\ &\tilde{r} = l - i + \left[\frac{i+1}{2}\right] \quad \Longrightarrow \quad \tilde{l} = i - \left[\frac{i+1}{2}\right]\,.\end{aligned} \tag{5.82}$$

Para un l fijo, consideramos la suma

$$\begin{aligned}&\sum_{r=\tilde{r}}^{\tilde{l}} \beta_{i,i-r,i-l+r} \int_0^\infty p^{(i-r)}(x) q^{(i-l+r)}(x) x^{i-l} d\hat{\mu} \\ &= \beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}} \sum_{r=\tilde{r}}^{\tilde{l}} \frac{\beta_{i,i-r,i-l+r}}{\beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}}} \int_0^\infty p^{(i-r)}(x) q^{(i-l+r)}(x) x^{i-l} d\hat{\mu}\,.\end{aligned} \tag{5.83}$$

Ahora sumamos y restamos a (5.83) el siguiente término:

$$\beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}} \int_0^\infty [p^{(i-l+\tilde{r})}(x) q^{(i-l+\tilde{r})}(x)]^{(l-2\tilde{r})} x^{i-l} d\hat{\mu}\,,$$

que, usando la regla de Leibniz, puede expresarse como

$$\beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}} \sum_{r=\tilde{r}}^{l-\tilde{r}} \binom{l-2\tilde{r}}{r-\tilde{r}} \int_0^\infty p^{(i-r)}(x) q^{(r+i-l)}(x) x^{i-l} d\hat{\mu}\,.$$

Nótese, a partir de (5.82), que $\tilde{r}+\tilde{l}=l$, de modo que el límite superior de la suma anterior es $l-\tilde{r}=\tilde{l}$. Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned}&\beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}}\sum_{r=\tilde{r}}^{\tilde{l}}\beta^{(1)}_{i,i-r,i-l+r}\int_0^\infty p^{(i-r)}(x)q^{(i-l+r)}(x)x^{i-l}d\hat{\mu}\\&+\ \beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}}\int_0^\infty [p^{(i-l+\tilde{r})}(x)q^{(i-l+\tilde{r})}(x)]^{(l-2\tilde{r})}x^{i-l}d\hat{\mu}\ ,\end{aligned}\tag{5.84}$$

donde

$$\beta^{(1)}_{i,i-r,i-l+r}=\frac{\beta_{i,i-r,i-l+r}}{\beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}}}-\binom{l-2\tilde{r}}{r-\tilde{r}}\ .$$

Dado que $\tilde{r}+\tilde{l}=l$, y $\beta_{i,k,s}=\beta_{i,s,k}$, se verifica la siguiente propiedad,

$$\beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}}=\beta_{i,i-\tilde{l},i-l+\tilde{l}}\ .\tag{5.85}$$

Notemos que $\beta^{(1)}_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}}=\beta^{(1)}_{i,i-\tilde{l},i-l+\tilde{l}}=0$. Entonces, (5.84) se simplifica como sigue

$$\begin{aligned}&\beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}}\sum_{r=\tilde{r}+1}^{\tilde{l}-1}\beta^{(1)}_{i,i-r,i-l+r}\int_0^\infty p^{(i-r)}(x)q^{(i-l+r)}(x)x^{i-l}d\hat{\mu}\\&+\ \beta_{i,i-\tilde{r},i-l+\tilde{r}}\int_0^\infty [p^{(i-l+\tilde{r})}(x)q^{(i-l+\tilde{r})}(x)]^{(l-2\tilde{r})}x^{i-l}d\hat{\mu}\ .\end{aligned}\tag{5.86}$$

Si $i-l=0$, entonces $\tilde{r}=\left[\frac{i+1}{2}\right]$ y $l-2\tilde{r}=0$, y basta aplicar el procedimiento anterior a la primera integral en (5.86) para obtener el resultado. Si $i-l\neq 0$, aplicamos integración por partes a la segunda integral en (5.86) y obtenemos

$$-2\int_0^\infty p^{(i-l+\tilde{r})}(x)q^{(i-l+\tilde{r})}(x)[x^{i-l}\hat{\omega}(x)]^{(l-2\tilde{r})}dx\ ,\tag{5.87}$$

dado que $x^{i-l}\hat{\omega}(x)\big|_0^\infty=0$. Entonces,

$$\begin{aligned}{}[x^{i-l}\hat{\omega}(x)]^{(l-2\tilde{r})}&=\sum_{j=0}^{l-2\tilde{r}}\binom{l-2\tilde{r}}{j}(x^{i-l})^{(l-2\tilde{r}-j)}(\hat{\omega}(x))^{(j)}\\&=\sum_{j=0}^{l-2\tilde{r}}\binom{l-2\tilde{r}}{j}(i-2l+2\tilde{r}+j-1)_{l-2\tilde{r}-j}\ x^{i-2l+2\tilde{r}+j}(\hat{\omega}(x))^{(j)}\ .\end{aligned}\tag{5.88}$$

Teniendo en cuenta (5.78), encontramos que

$$\begin{aligned}&[x^{i-l}\hat{\omega}(x)]^{(l-2\tilde{r})}\\&=\sum_{j=0}^{l-2\tilde{r}}\binom{l-2\tilde{r}}{j}(i-2l+2\tilde{r}+j-1)_{l-2\tilde{r}-j}\ x^{i-2l+2\tilde{r}}\frac{1}{2^j}\,\psi(x,j)\,\hat{\omega}(x)\\&\equiv\hat{\omega}(x)R(x)\ ,\end{aligned}$$

donde $\deg(R(x)) \leq i-2\tilde{r}$ debido a Eq. (5.79). Finalmente, sustituímos el resultado anterior en (5.87) y obtenemos

$$-\int_0^\infty p^{(i-l+\tilde{r})}(x)q^{(i-l+\tilde{r})}(x)R(x)d\hat{\mu}\ ,$$

lo cual completa la demostración. □

Un razonamiento semejante nos permite probar que, en el caso Freud-Sobolev, la Proposición 5.1.11 también se verifica para el producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$.

5.2. Productos internos de Sobolev discreto-continuos y simetrizados

5.2.1. Introducción

En esta sección consideramos un caso particular de funcional bilineal simetrizado, el *producto de Sobolev simetrizado de orden* 1 definido por

$$\langle p,q\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} p(t)q(t)d\mu_0 + \int_{\mathbb{R}} p'(t)q'(t)d\mu_1, \quad p,q\in\mathbb{P}, \tag{5.89}$$

donde μ_0 y μ_1 son medidas de Borel con soporte en subconjuntos de la recta real simétricos con respecto al origen de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2n+1}d\mu_k = 0, \quad k=0,1, \quad \text{y} \quad n\geq 0.$$

En la sección anterior, estudiamos el proceso de simetrización relacionado con productos de Sobolev de orden N cuando todas las medidas eran medidas de Borel positivas y no discretas. El objeto de esta sección es el análisis del proceso de simetrización asociado al producto (5.89) cuando una de las medidas es simétrica y discreta mientras que la otra es una medida simétrica continua.

En la literatura se han estudiado exhaustivamente las propiedades analíticas de las sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a (5.89) cuando μ_1 es una medida discreta y μ_0 es una medida no discreta. En [6, 7], los autores tratan esencialmente el caso

$$d\mu_0 = \chi_{[-1,1]}(1-x^2)^\alpha dx + M_0[\delta(x+1)+\delta(x-1)]dx, \quad \alpha>-1,$$

(medida tipo Gegenbauer) y

$$d\mu_1 = M_1[\delta(x+1)+\delta(x-1)]dx,$$

mientras que en [1] se considera una situación más general: μ_0 es una medida simétrica y $d\mu_1 = M\delta(x)dx$. Estos tipos de productos internos se llaman *productos internos tipo Sobolev*. En [30] se ha realizado un detallado análisis de las relaciones de recurrencia que satisfacen las correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales.

En [62] aparece un primer ejemplo de un producto de Sobolev de orden 1 en el que μ_0 es una medida discreta y μ_1 es no discreta. En particular, los autores estudian los polinomios de Laguerre de parámetro -1, $L_n^{(-1)}$, como un ejemplo canónico de polinomios ortogonales con respecto a tal tipo de productos internos. Observemos que esta sucesión de polinomios no es ortogonal con respecto a una medida de Borel positiva. Sin embargo, es ortogonal con respecto al producto de Sobolev

$$\langle p, q\rangle_s = Mp(0)q(0) + \int_0^\infty p'(t)q'(t)e^{-t}dt.$$

Una extensión natural de este producto interior se da en [46], donde, además, se estudian algunas propiedades analíticas de las sucesiones de polinomios ortogonales con respecto al funcional bilineal

$$\langle p, q\rangle_s = Mp(c)q(c) + \mathbf{L}(p'q').$$

Se puede consultar [2] para un estudio unificado de estos casos.

Nuesta aportación es la siguiente: Consideremos el producto (5.89). Sea $\{Q_n\}$ la correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales y sean $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ su componentes simétricas, es decir, las sucesiones tales que

$$Q_{2n}(x) = P_n(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xP_n^{*s}(x^2), \quad n \geq 0. \tag{5.90}$$

En esta sección estudiamos el proceso de simetrización cuando μ_0 es discreta y soportada en $\{0\}$, y μ_1 es absolutamente continua así como el caso inverso. En particular, cuando μ_1 es discreta, distinguimos el caso en que el soporte de μ_1 es el punto cero y cuando el soporte es un subconjunto finito de la recta real simétrico con respecto al origen. Determinamos, en cada situación, los funcionales bilineales tales que $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ son las correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales, presentamos relaciones algebraicas explícitas entre ambas sucesiones y obtenemos relaciones de recurrencia a un número finito de términos que ellas verifican. Ilustramos los resultados con algunos ejemplos.

5.2.2. Productos de Sobolev simetrizados de orden 1

Consideremos dos medidas de Borel positivas μ_0 y μ_1 con soporte en la recta real y tales que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} x^n d\mu_i\right| < \infty, \quad i = 0, 1, \quad n \geq 0.$$

Supongamos que los soportes de μ_0 y μ_1 son subconjuntos de la recta real simétricos con respecto al origen de modo que las correspondientes sucesiones de momentos

$$c_n^{(i)} = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu_i, \quad i = 0, 1,$$

verifican $c_{2n+1}^{(i)} = 0,\ i = 0, 1,\ n \geq 0$.

Introducimos el producto interno de Sobolev simetrizado de orden 1 definido en (5.89). Bajo estas condiciones, si denotamos por $\{Q_n\}$ la correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a (5.89), entonces se verifica (5.90). Estamos interesados en el estudio de las propiedades de ortogonalidad de las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ dadas en (5.90).

En lo que sigue, analizaremos el caso particular en que μ_0 y μ_1 son, respectivamente, una medida discreta y no discreta así como la situación en que μ_0 y μ_1 son, respectivamente, no discreta y discreta. De una forma más precisa,

- Daremos las medidas de ortogonalidad para las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$.
- Presentaremos relaciones algebraicas explícitas entre $\{P_n\}$ and $\{P_n^{*s}\}$.
- Finalmente, determinaremos relaciones de recurrencia a un número finito de términos que satisfacen dichas sucesiones.

5.2.3. Modelo 1: μ_0 es discreta y μ_1 es una medida absolutamente continua

En esta subsección, estudiamos el proceso de simetrización asociado a un producto de Sobolev de orden 1 simetrizado tal que la medida μ_0 es discreta y μ_1 es una medida absolutamente continua, i.e., $d\mu_1 = \omega(x)dx$. Primero, probamos que la sucesión de polinomios $\{Q_n\}$ ortogonal con respecto al producto interior simetrizado puede ser expresada del modo siguiente:

$$Q_{2n}(x) = P_n(x^2) = x^2 S_{n-1}(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xP_n^{*s}(x^2), \quad n \geq 0.$$

Entonces, encontramos los productos internos tales que $\{S_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ son las correspondientes sucesiones de polinomios mónicos ortogonales. Más adelante, suponiendo que la función peso ω *es semiclásica*, determinamos un relación algebraica explícita entre las sucesiones $\{S_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ así como ciertas relaciones de recurrencia que satisfacen.

Consideremos el producto interno dado en (5.89). Supongamos que μ_0 es una medida discreta con soporte en $\{0\}$ y μ_1 es una medida no discreta. Entonces, el producto interno que estamos considerando es

$$\langle p, q\rangle_s = \lambda p(0)q(0) + \int_{\mathbb{R}} p'q'd\mu_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{5.91}$$

Supongamos que μ_1 es una medida con soporte en un intervalo de la recta real que es simétrico con respecto al origen. Entonces, los momentos de orden impar se anulan, i.e., $\langle x^{2n}, x^{2m+1}\rangle_s = 0$ para todo $n, m \geq 0$. En otras palabras, las entradas (i, j) de la matriz de momentos asociada a (5.91) se anulan cuando $i + j$ es un entero impar.

Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a (5.91). Obsérvese que, por (5.91)

$$\begin{cases} \langle 1,1\rangle_s = \lambda, & \\ \langle Q_n,1\rangle_s = \lambda Q_n(0) = 0, & \text{i.e. } Q_n(0)=0,\ n\geq 1, \\ \langle Q_n,Q_m\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} Q_n' Q_m' d\mu_1, & n,m\geq 1. \end{cases}$$

A partir de las expresiones previas, deducimos

$$\langle Q_n, p\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} Q_n' p' d\mu_1, \quad n\geq 1, \quad p\in\mathbb{P}.$$

Más aún,

$$\begin{cases} Q_{2n}(x) = P_n(x^2) = x^2 S_{n-1}(x^2), & n\geq 1, \quad Q_0(x)=P_0(x)=1, \\ Q_{2n+1}(x) = xP_n^{*s}(x^2), & n\geq 0. \end{cases} \tag{5.92}$$

Observemos que hemos introducimos una nueva sucesión de polinomios $\{S_n\}$ dado que la sucesión $\{P_n\}$ verifica $P_n(x) = xS_{n-1}(x)$.

Debido a las condiciones de ortogonalidad que satisface la sucesión $\{Q_n\}$, para $n\neq m$, con $n,m\geq 1$,

$$0 = \langle Q_{2n}, Q_{2m}\rangle_s = 4\int_0^\infty [xS_{n-1}(x)S_{m-1}(x)$$
$$+x^2 S_{n-1}(x)S_{m-1}'(x) + x^2 S_{n-1}'(x)S_{m-1}(x) + x^3 S_{n-1}'(x)S_{m-1}'(x)]d\hat{\mu}_1,$$

donde $d\hat{\mu}_1 = 2d\mu_1(t^{1/2})$. Por tanto, $\{S_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto de Sobolev no diagonal

$$\langle p,q\rangle_1 = 4\int_0^\infty \begin{bmatrix} p, & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix} x d\hat{\mu}_1 . \tag{5.93}$$

Por otro lado, para $n\neq m$

$$0 = \langle Q_{2n+1}, Q_{2m+1}\rangle_s = \int_0^\infty [P_n^{*s} + 2x(P_n^{*s})'][P_m^{*s} + 2x(P_m^{*s})']d\hat{\mu}_1 .$$

Por tanto, $\{P_n^{*s}\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto de Sobolev no diagonal

$$\langle p,q\rangle_2 = \int_0^\infty \begin{bmatrix} p, & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 2x & 4x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix} d\hat{\mu}_1 . \tag{5.94}$$

5.2.4. Relaciones algebraicas explícitas entre $\{S_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ y relaciones de recurrencia

Dado que μ_1 es una medida absolutamente continua, puede expresarse en términos de una función peso, $d\mu_1 = \omega(x)dx$. Supongamos que ω es una función peso semiclásica que satisface la ecuación de Pearson

$$(\phi\omega)' = \psi\omega, \tag{5.95}$$

donde ϕ y ψ son los polinomios de grado mínimo que verifican la ecuación previa. Sea $\deg(\phi) = r \geq 0$, $\deg(\psi) = t > 0$. Además, elegimos como ϕ un polinomio mónico.

La dos proposiciones que aparecen a continuación son la clave para encontrar las relaciones de recurrencia que verifican $\{S_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ así como para deducir relaciones algebraicas entre ambas sucesiones.

Proposición 5.2.1 *Si s es la clase del funcional lineal semiclásico definido por $\omega(x)$, para $n \geq s+2$, se obtiene*

$$\phi(x)Q_n'(x) = nQ_{n+r-1}(x) + \sum_{j=n-s-1}^{n+r-2} \alpha_{n,j} Q_j(x) + \alpha_{n,0} Q_0(x). \tag{5.96}$$

Demostración. Sea $\phi(x)Q_n'(x) = \sum_{j=0}^{n+r-1} \alpha_{n,j} Q_j(x)$ el desarrollo en serie de Fourier de $\phi(x)Q_n'(x)$ en términos de los polinomios $\{Q_n\}$. Entonces, tenemos

$$\alpha_{n,j} = \frac{\langle \phi Q_n', Q_j\rangle_s}{\langle Q_j, Q_j\rangle_s},$$

donde

$$\langle \phi Q_n', Q_j\rangle_s = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} (\phi' Q_n' + \phi Q_n'') Q_j' d\mu_1, & \text{para } j > 0, \\ \lambda \phi(0) Q_n'(0), & \text{j=0.} \end{cases}$$

Así pues, para $j > 0$

$$\langle \phi Q_n', Q_j\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} Q_n' \phi' Q_j' \omega(x) dx + \int_{\mathbb{R}} Q_n'' \phi Q_j' \omega(x) dx.$$

Aplicando integración por partes a la segunda integral de la expresión anterior y teniendo en cuenta (5.95), obtenemos

$$\langle \phi Q_n', Q_j\rangle_s = -\int_{\mathbb{R}} Q_n' \phi Q_j'' \omega(x) dx - \int_{\mathbb{R}} Q_n' Q_j' (\psi - \phi') \omega(x) dx\,.$$

El polinomio $\phi Q_j''$ es la derivada de un polinomio de grado $j + r - 1$. Por tanto, la primera integral será cero si $j < n - r + 1$. De modo análogo, la segunda integral se anula si $0 < j < n - s - 1$, donde $s + 1 = \text{máx}\{r - 1, t\}$. Por tanto, $n - r + 1 \geq n - s - 1$. Como consecuencia, si $1 \leq j < n - s - 1$, entonces

$$\langle \phi Q_n', Q_j\rangle_s = 0.$$

□

Proposición 5.2.2 *Si s es la clase del funcional lineal semiclásico definido por $d\mu_1 = \omega(x)dx$, para $n \geq s+2$, entonces obtenemos*

$$x\phi(x)Q_n'(x) = nQ_{n+r}(x) + \sum_{j=n-s-2}^{n+r-1} \alpha_{n,j} Q_j(x)\,. \tag{5.97}$$

Demostración.

$$\langle x\phi Q_n', Q_j\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} [x\phi Q_n']' Q_j' \omega(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi Q_n' Q_j' \omega(x)dx + \int_{\mathbb{R}} x\phi' Q_n' Q_j' \omega(x)dx + \int_{\mathbb{R}} x\phi Q_n'' Q_j' \omega(x)dx,$$

aplicando integración por partes a la tercera integral, obtenemos

$$= -\int_{\mathbb{R}} [x\phi Q_n' Q_j'' + x Q_n' Q_j' (\psi - \phi')]\omega(x)dx.$$

Deducimos que la integral anterior se anula si $j < n-s-2$ utilizando argumentos semejantes a los usados en la demostración de la Proposición 5.2.1, lo que prueba la proposición. □

En lo que sigue, cuando s es un número par, escribimos $s = 2\hat{s}$, $r = 2\hat{r}$ y $\phi(x) = \tilde{\phi}(x^2)$. Cuando s es impar, escribimos $s = 2\hat{s}+1$, $r = 2\hat{r}+1$ y $\phi(x) = x\hat{\phi}(x^2)$.

Proposición 5.2.3 *Consideremos un producto interior de Sobolev simetrizado como el dado en (5.91) y supongamos que* $d\mu_1 = \omega(x)dx$ *es una medida absolutamente continua y semiclásica que verifica (5.95). Sea* $\{Q_n\}$ *la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.91). Supongamos que* $\{S_n\}$ *y* $\{P_n^{*s}\}$ *son las sucesiones que verifican (5.92). Si* s *denota la clase del funcional lineal semiclásico definido por* ω*, entonces, se verifican las siguientes relaciones algebraicas entre* $\{S_n\}$ *y* $\{P_n^{*s}\}$*.*

1. *Cuando* s *es par,* $\phi(x) = \tilde{\phi}(x^2)$ *y*

$$\begin{aligned} &2\tilde{\phi}(x)[S_{m-1}(x) + xS_{m-1}'(x)] \\ &= 2mP_{m+\hat{r}-1}^{*s}(x) + \sum_{j=m-\hat{s}-1}^{m+\hat{r}-2} \alpha_{2m,2j+1} P_j^{*s}(x)\,. \end{aligned} \tag{5.98}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\phi}(x)[P_m^{*s}(x) + 2x(P_m^{*s})'(x)] = (2m+1)xS_{m+\hat{r}-1}(x) \\ &+ \sum_{j=m-\hat{s}-1}^{m+\hat{r}-2} \alpha_{2m+1,2j+2} xS_j(x) + \alpha_{2m+1,0}\,. \end{aligned} \tag{5.99}$$

2. *Cuando* s *es impar,* $\phi(x) = x\hat{\phi}(x^2)$ *y*

$$\begin{aligned} &2\hat{\phi}(x)[xS_{m-1}(x) + x^2S_{m-1}'(x)] \\ &= 2mP_{m+\hat{r}}^{*s}(x) + \sum_{j=m-\hat{s}-2}^{m+\hat{r}-1} \alpha_{2m,2j+1} P_j^{*s}(x). \end{aligned} \tag{5.100}$$

$$\hat{\phi}(x)[P_m^{*s}(x)+2x(P_m^{*s})'(x)]$$
$$=(2m+1)S_{m+\hat{r}}(x)+\sum_{j=m-\hat{s}-2}^{m+\hat{r}-1}\alpha_{2m+1,2j+2}S_j(x)\,. \quad (5.101)$$

Demostración. Para $n=2m$, (5.96) se escribe

$$\phi(x)Q'_{2m}(x)=2mQ_{2m+r-1}(x)+\sum_{j=2m-s-1}^{2m+r-2}\alpha_{2m,j}Q_j(x)+\alpha_{2m,0}\,. \quad (5.102)$$

Supongamos que la clase s del funcional lineal semiclásico asociado a ω es par. Por el Lema 5.1.3, ϕ es una función par y $\phi(x)=\tilde{\phi}(x^2)$. Más aún, podemos escribir $r=2\hat{r}$ y $s=2\hat{s}$. En tal caso, teniendo en cuenta (5.92), la expresión (5.102) puede reescribirse de la forma siguiente

$$2x\tilde{\phi}(x^2)[S_{m-1}(x^2)+x^2S'_{m-1}(x^2)]=2mP^{*s}_{m+\hat{r}-1}(x^2)+\sum_{i=m-\hat{s}-1}^{m+\hat{r}-2}\alpha_{2m,2j+1}xP_j^{*s}(x^2),$$

y se obtiene (5.98).

Si expresamos (5.96) para $n=2m+1$, se puede obtener (5.99) de una forma semejante.

El razonamiento previo también es válido para deducir las relaciones algebraicas (5.100) y (5.101) si consideramos (5.97) en lugar de (5.96). □

Proposición 5.2.4 *Consideremos un producto interior de Sobolev simetrizado como el dado en (5.91) y supongamos que $d\mu_1=\omega(x)dx$ es una medida absolutamente continua y semiclásica que verifica (5.95). Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.91). Supongamos que $\{S_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ son las sucesiones que verifican (5.92). Si s denota la clase del funcional lineal semiclásico definido por ω, entonces, se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia para $\{S_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$.*

1. *Cuando s es par, $\phi(x)=\tilde{\phi}(x^2)$ y*

$$2\tilde{\phi}(x)[S_{m-1}(x)+xS'_{m-1}(x)]$$
$$=2mS_{m+\hat{r}-1}(x)+\sum_{j=m-\hat{s}-2}^{m+\hat{r}-2}\alpha_{2m,2j+2}S_j(x)\,. \quad (5.103)$$

$$\tilde{\phi}(x)[P_m^{*s}(x)+2x(P_m^{*s})'(x)]$$
$$=(2m+1)P^{*s}_{m+\hat{r}}(x)+\sum_{j=m-\hat{s}-1}^{m+\hat{r}-1}\alpha_{2m+1,2j+1}P_j^{*s}(x)\,. \quad (5.104)$$

2. *Cuando* s *es impar,* $\phi(x) = x\hat{\phi}(x^2)$ *y*

$$\begin{aligned} &2\hat{\phi}(x)[S_{m-1}(x) + xS'_{m-1}(x)] \\ &= 2mS_{m+\hat{r}-1}(x) + \sum_{j=m-\hat{s}-2}^{m+\hat{r}-2} \alpha_{2m,2j+2}S_j(x) + \alpha_{2m,0}\,. \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} &\hat{\phi}(x)[P^{*s}_m(x) + 2x(P^{*s}_m)'(x)] = (2m+1)P^{*s}_{m+\hat{r}}(x) \\ &+ \sum_{j=m-\hat{s}-1}^{m+\hat{r}-1} \alpha_{2m+1,2j+1}P^{*s}_j(x)\,. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Demostración. Para $n = 2m$, (5.97) se expresa como

$$x\phi(x)Q'_{2m}(x) = 2mQ_{2m+r}(x) + \sum_{j=2m-s-2}^{2m+r-1} \alpha_{2m,j}Q_j(x). \quad (5.107)$$

Supongamos que s es par. Entonces, por el Lema 5.1.3, ϕ es una función par y $\phi(x) = \tilde{\phi}(x^2)$. Teniendo en cuenta (5.92), la expresión (5.107) se puede reescribir del modo siguiente

$$2x^2\tilde{\phi}(x^2)[S_{m-1}(x^2) + x^2S'_{m-1}(x^2)] = 2mx^2S_{m+\hat{r}-1}(x^2) + \sum_{j=m-\hat{s}-2}^{m+\hat{r}-2} \alpha_{2m,2j}x^2S_j(x^2),$$

y se obtiene el resultado en (5.103). El resto de las relaciones de recurrencia se prueba de forma semejante. □

5.2.5. El caso Hermite

En la subsección previa, hemos probado que si $\{Q_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.91), entonces

$$\langle Q_n, Q_m\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} Q'_nQ'_m d\mu_1, \quad n+m \geq 1.$$

Por tanto, $\{Q'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonal con respecto al producto interior

$$\langle p, q\rangle = \int_{\mathbb{R}} pq d\mu_1\,.$$

Si $d\mu_1 = e^{-x^2}dx$, entonces

$$Q'_n(x) = nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

donde $H_n(x)$ denota el n-ésimo polinomio mónico de Hermite. En tal caso, teniendo en cuenta que $Q_n(0) = 0$ para $n \geq 1$, deducimos que

$$\frac{Q_n(x)}{n} = \int_0^x H_{n-1}(t)dt\,. \tag{5.108}$$

Aplicando integración por partes a la integral anterior y considerando que $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$,

$$\frac{Q_n(x)}{n} = xH_{n-1}(x) - \int_0^x (n-1)tH_{n-2}(t)dt\,.$$

Utilizando la relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios de Hermite (1.15),

$$\frac{Q_n(x)}{n} = xH_{n-1}(x) - \int_0^x (n-1)[H_{n-1}(t) + \frac{n-2}{2}H_{n-3}(t)]dt =$$

$$= xH_{n-1}(x) - (n-1)\frac{Q_n(x)}{n} - \frac{n-1}{2}Q_{n-2}(x)\,.$$

Por tanto,

$$xH_{n-1}(x) = Q_n(x) + \frac{n-1}{2}Q_{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{5.109}$$

Aplicando de nuevo la relación de recurrencia a tres términos,

$$H_n(x) + \frac{n-1}{2}H_{n-2}(x) = Q_n(x) + \frac{n-1}{2}Q_{n-2}(x), \quad n \geq 3\,.$$

Observemos que esta expresión presenta la misma estructura que aparece en el caso de pares coherentes simétricos [48, 57], pero hemos de resaltar que este concepto sólo tiene sentido en el caso continuo.

Por otro lado, de (5.108)

$$Q_n(x) = H_n(x) - H_n(0),$$

es decir,

$$Q_{2n}(x) = H_{2n}(x) - H_{2n}(0), \quad Q_{2n+1}(x) = H_{2n+1}(x).$$

Así, como se verifica (5.92), teniendo en cuenta que $H_{2m}(x) = L_m^{(-1/2)}(x^2)$, y $H_{2m+1}(x) = xL_m^{(1/2)}(x^2)$, deducimos

$$P_n(x) = xS_{n-1}(x) = L_n^{(-1/2)}(x) - L_n^{(-1/2)}(0), \tag{5.110}$$

$$P_n^{*s}(x) = L_n^{(1/2)}(x). \tag{5.111}$$

5.2.5.1. Medidas de ortogonalidad para $\{S_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$

Según (5.93), $\{S_n\}$ es ortogonal con respecto al producto de Sobolev no diagonal

$$\langle p, q\rangle_1 = 4\int_0^\infty \begin{bmatrix} p, & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix} t^{1/2}e^{-t}dt.$$

Sin embargo, aplicando integración por partes, el producto anterior se puede reducir a la forma diagonal, aunque la medida asociada a la parte estándar es una medida con signo.

$$\langle p, q\rangle_1 = 4\int_0^\infty \begin{bmatrix} p, & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t-1/2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix} t^{1/2}e^{-t}dt.$$

Por (5.94), $\{P_n^{*s}\}$ es ortogonal con respecto al producto de Sobolev no diagonal

$$\langle p, q\rangle_2 = \int_0^\infty \begin{bmatrix} p, & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 2t & 4t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix} t^{-1/2}e^{-t}dt\,.$$

De nuevo, teniendo en cuenta una integración por partes, el producto interior $\langle , \rangle_2$ puede expresarse

$$\langle p, q\rangle_2 = \int_0^\infty \begin{bmatrix} p, & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix} t^{1/2}e^{-t}dt\,,$$

es decir, puede reducirse a la forma diagonal.

5.2.5.2. Relaciones de recurrencia y relaciones algebraicas explícitas

Dado que $\{P_n^{*s}\}$ es la sucesión de polinomios de Laguerre de parámetro 1/2, sólo deduciremos relaciones de recurrencia para las sucesiones $\{S_n\}$ y $\{Q_n\}$. También presentamos dos relaciones algebraicas explícitas entre las sucesiones $\{P_n^{*s}\}$ y $\{S_n\}$.

Consideremos la ecuación dada en (5.109) para $n = 2m$. Entonces, teniendo en cuenta (5.92), obtenemos

$$L_n^{(1/2)}(x) = S_n(x) + \frac{2n+1}{2} S_{n-1}(x). \tag{5.112}$$

La relación de recurrencia a tres términos que satisfacen los polinomios de Laguerre de parámetro 1/2 (1.14) es

$$L_n^{(1/2)}(x) = (x - 2n + \frac{1}{2})L_{n-1}^{(1/2)}(x) - (n-1)(n - \frac{1}{2})L_{n-2}^{(1/2)}(x)\,. \tag{5.113}$$

Sustituyendo (5.112) en (5.113) y simplificando el resultado, deducimos una relación de recurrencia a cuatro términos para $\{S_n\}$.

$$S_n(x) = (x-3n)S_{n-1}(x) + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left[x - 3\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] S_{n-2}(x)$$
$$-(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right) S_{n-3}(x), \quad n \geq 3\,. \tag{5.114}$$

A continuación, deducimos la relación de recurrencia que verifican los polinomios $\{Q_n\}$. Teniendo en cuenta la relación de recurrencia a tres términos que satisfacen los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = xH_{n-1}(x) - \frac{1}{2}(n-1)H_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

y reemplazando la expresión (5.109) en ella, obtenemos una relación de recurrencia a cinco términos para $\{Q_n\}$.

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + \left(\frac{1}{2} - n\right) Q_{n-1}(x)$$
$$+\left(\frac{n-1}{2}\right) xQ_{n-2}(x) - \frac{(n-1)(n-2)}{4} Q_{n-3}(x), \quad n \geq 3\,. \tag{5.115}$$

Finalmente, deducimos relaciones algebraicas explícitas entre las sucesiones $\{S_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$. Observemos que (5.112) puede reescribirse del modo siguiente

$$P_n^{*s}(x) = S_n(x) + \frac{2n+1}{2} S_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

lo que nos da una relación algebraica explícita entre las dos sucesiones en consideración.

Por otro lado, si expresamos (5.115) para $n = 2m+1$, por (5.92), para $m \geq 1$, se obtiene

$$S_m(x) + \left(2m + \frac{1}{2}\right) S_{m-1}(x) + \frac{m(2m-1)}{2} S_{m-2}(x) = P_m^{*s}(x) + mP_{m-1}^{*s}(x),$$

o, equivalentemente,

$$S_m(x) + \left(2m + \frac{1}{2}\right) S_{m-1}(x) + \frac{m(2m-1)}{2} S_{m-2}(x) = L_m^{(1/2)}(x) + mL_{m-1}^{(1/2)}(x)\,.$$

5.3. Modelo 2: μ_0 absolutamente continua y μ_1 discreta

A continuación nos ocupamos del estudio del proceso de simetrización relacionado con productos de Sobolev simetrizados de orden 1

$$\langle p, q\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} pq d\mu_0 + \int_{\mathbb{R}} p'q' d\mu_1\,,$$

donde μ_1 es una medida discreta y μ_0 es una medida positiva de Borel no discreta. Consideramos las dos siguientes situaciones: Primero, suponemos que μ_1 tiene su soporte en cero. Después, estudiamos el caso general en que μ_1 tiene su soporte en un subconjunto finito de la recta real simétrico con respecto al origen y que contiene más de un punto.

5.3.1. μ_1 tiene su soporte en el cero

Primero analizamos el caso en que μ_1 tiene su soporte en $\{0\}$. Consideremos el producto

$$\langle p, q\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} pq d\mu_0 + \lambda p'(0)q'(0) \tag{5.116}$$

donde λ denota un número real positivo. Supongamos que μ_0 es una medida no discreta con soporte en un subconjunto de la recta real simétrico con respecto al origen, y tal que los momentos de orden impar correspondientes se anulan, i.e.,

$$c_{2n+1} = \int_{\mathbb{R}} x^{2n+1} d\mu_0 = 0, \quad \text{para todo } n \geq 0\,.$$

Estos productos internos reciben el nombre *productos internos tipo Sobolev* [1].

5.3.1.1. Medidas de ortogonalidad para $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$

Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.116). Entonces, se verifica (5.90) para ciertas sucesiones de polinomios mónicos $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$. Para $n \neq m$,

$$0 = \langle Q_{2n}, Q_{2m}\rangle_s = \int_0^\infty P_n(x)P_m(x)d\hat{\mu}_0\,,$$

donde $d\hat{\mu}_0 = 2d\mu_0(x^{1/2})$. Por tanto, $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto estándar

$$\langle p, q\rangle_1 = \int_0^\infty pq d\hat{\mu}_0 \tag{5.117}$$

Por otro lado, si $n \neq m$, entonces

$$0 = \langle Q_{2n+1}, Q_{2m+1}\rangle_s = 2\int_0^\infty xP_n^{*s}(x)P_m^{*s}(x)d\mu_0(x^{1/2}) + \lambda P_n^{*s}(0)P_m^{*s}(0)\,.$$

Así $\{P_n^{*s}\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto estándar

$$\langle p, q\rangle_2 = \int_0^\infty xpq\; d\hat{\mu}_0 + \lambda p(0)q(0)\,. \tag{5.118}$$

5.3.1.2. Relaciones algebraicas explícitas entre $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$.

En este caso, la Proposición 5.3.2 proporciona una relación algebraica entre las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$. Observemos que el polinomio P_n^{*s} está expresado en términos de los polinomios P_n^* y P_{n-1}^{**} , i.e., en términos de las sucesiones de polinomios núcleo con parámetro 0 asociadas a $\{P_n\}$ y $\{P_n^*\}$, respectivamente, es decir, dado que $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto a un producto estándar, podemos hablar de la sucesión de polinomios núcleo ortogonal respecto del funcional lineal $\mathbf{xL}$, $\{P_n^*\}$. Además, teniendo en cuenta (1.21), se obtiene de forma inmediata la relación algebraica explícita que estábamos buscando.

Consideremos ahora el producto estándar

$$\langle p, q\rangle = \int_{\mathbb{R}} pq d\mu_0, \tag{5.119}$$

y sea $\{T_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales correspondiente. Entonces, se verifica la siguiente relación.

Proposición 5.3.1 *Supongamos que $\{Q_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.116), $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios tales que $Q_{2n}(x) = P_n(x^2)$, $\{P_n^*\}$ es la sucesión de polinomios núcleo con parámetro 0 asociada a $\{P_n\}$, y $\{T_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto interior dado en (5.119), entonces*

$$T_{2n}(x) = P_n(x^2) = Q_{2n}(x), \quad T_{2n+1}(x) = xP_n^*(x^2), \quad n \geq 0. \tag{5.120}$$

Demostración. Consideremos el desarrollo en serie de Fourier de Q_n en términos de $\{T_n\}$

$$Q_n(x) = T_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n,j} T_j(x), \quad n \geq 1\,. \tag{5.121}$$

Entonces, para $0 \leq j < n$, por (5.116)

$$\alpha_{n,j} = \frac{\langle Q_n, T_j\rangle}{\langle T_j, T_j\rangle} = \frac{\int_{\mathbb{R}} Q_n T_j d\mu_0}{\|T_j\|^2} = \frac{-\lambda Q_n'(0)T_j'(0)}{\|T_j\|^2}\,.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (5.121) obtenemos

$$Q_n(x) = T_n(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda Q_n'(0)T_j'(0)}{\|T_j\|^2} T_j(x)\,. \tag{5.122}$$

Dado que $Q_{2m}(x) = P_m(x^2)$, $Q_{2m}'(0) = 0$. Así, para $n = 2m$, (5.122) se transforma en

$$Q_{2m}(x) = T_{2m}(x), \quad m \geq 0,$$

o, equivalentemente,

$$T_{2m}(x) = P_m(x^2), \quad m \geq 0\,.$$

Más aún, teniendo en cuenta que (5.119) es un producto estándar

$$T_{2m+1}(x) = xP_m^*(x^2), \quad m \geq 0.$$

□

Proposición 5.3.2 *Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.116). Si $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ son las sucesiones de polinomios tales que se verifica (5.90), entonces se cumplen las siguientes relaciones.*

$$P_0^{*s}(x) = P_0^*(x), \quad P_n^{*s}(x) = P_n^*(x) + \alpha_n P_{n-1}^{**}(x), \quad n \geq 1,$$

$$\alpha_n = -\frac{\lambda P_n^{*s}(0)P_{n-1}^*(0)}{\|P_{n-1}^*\|_*^2}\,, \tag{5.123}$$

con $\|P_n^*\|_* = \|xP_n^*\|$. Además, $\{P_n^{**}\}$ denota la sucesión de polinomios núcleo con parámetro 0 *asociada a $\{P_n^*\}$.*

Demostración. Si hacemos $n = 2m+1$ en (5.122) se obtiene

$$Q_{2m+1}(x) = T_{2m+1}(x) - \sum_{j=0}^{2m} \frac{\lambda Q'_{2m+1}(0)T'_j(0)}{\|T_j\|^2}T_j(x), \quad m \geq 0\,. \tag{5.124}$$

Pero $Q'_{2m+1}(x) = P_m^{*s}(x^2) + 2x^2(P_m^{*s})'(x^2)$, por tanto,

$$Q'_{2m+1}(0) = P_m^{*s}(0), \quad m \geq 0\,.$$

Por otro lado, por la Proposición 5.3.1

$$T'_{2j}(x) = 2xP'_j(x^2), \quad j \geq 1,$$

$$T'_{2j+1}(x) = P_j^*(x^2) + 2x^2(P_j^*)'(x^2), \quad j \geq 0,$$

y, por tanto,

$$T'_j(0) = \begin{cases} 0 & \text{si j es par,} \\ P^*_{\frac{j-1}{2}}(0) & \text{si j es impar.} \end{cases}$$

De (5.124) obtenemos

$$P_m^{*s}(x^2) = P_m^*(x^2) - P_m^{*s}(0)\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda P_j^*(0)P_j^*(x^2)}{\|xP_j^*(x^2)\|^2}, \quad m \geq 1\,.$$

Recordemos [23] que, dada una sucesión de polinomios $\{V_n\}$, la sucesión $\{V_n^*\}$ de polinomios núcleo mónicos con parámetro 0 asociada a $\{V_n\}$ satisface

$$\frac{V_n(0)V_n^*(x)}{\|V_n\|^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{V_k(x)V_k(0)}{\|V_k\|^2}.$$

Entonces, teniendo en cuenta la definición previa

$$P_m^{*s}(x) = P_m^*(x) - \frac{\lambda P_m^{*s}(0)P_{m-1}^*(0)}{\|P_{m-1}^*\|_*^2}P_{m-1}^{**}(x), \quad m \geq 1,$$

y se obtiene el resultado buscado. □

5.3.1.3. Relaciones de recurrencia

En esta subsección damos las relaciones de recurrencia a tres términos que verifican las sucesiones $\{Q_n\}$, $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$.

Proposición 5.3.3 *Consideremos una producto de Sobolev simetrizado como en (5.116). Sea $\{Q_n\}$ la correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales. Supongamos que $\{S_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ son las sucesiones que satisfacen (5.92). Entonces, se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia.*

$$Q_{n+2}(x) = (x^2 - \beta_{nn})Q_n(x) - \beta_{n,n-2}Q_{n-2}(x), \quad n \geq 2\,. \tag{5.125}$$

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{2n,2n})P_n(x) - \beta_{2n,2n-2}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{5.126}$$

$$R_{n+1}(x) = (x - \beta_{2n+1,2n+1})R_n(x) - \beta_{2n+1,2n-1}R_{n-1}(x), \quad n \geq 1\,. \tag{5.127}$$

Demostración. La multiplicación por x^2 es un operador simétrico con respecto al producto interior (5.116), i.e.,

$$\langle x^2 Q_n, Q_j\rangle_s = \langle Q_n, x^2 Q_j\rangle_s\,.$$

Además, $\langle x^2 Q_n, Q_j\rangle_s = 0$, para $0 \leq j < n-2$, y, en consecuencia,

$$x^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + \beta_{nn}Q_n(x) + \beta_{n,n-2}Q_{n-2}(x), \quad n \geq 1.$$

Por (5.125), para $n = 2m$ y $n = 2m+1$, respectivamente, se obtienen las relaciones de recurrencia para $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$. □

5.3.1.4. Caso particular: $d\mu_0 = e^{-x^4}dx$

Consideremos el producto interior

$$\langle p, q\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} pq e^{-x^4} dx + \lambda p'(0)q'(0). \tag{5.128}$$

Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.128). Consideremos las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ tales que se verifica (5.90).

Por (5.117), $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto estándar

$$\langle p, q\rangle_1 = \int_0^\infty pq x^{-1/2} e^{-x^2} dx. \tag{5.129}$$

De forma semejante, por (5.118), $\{P_n^{*s}\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto estándar

$$\langle p, q\rangle_2 = \int_0^\infty pq x^{1/2} e^{-x^2} dx + \lambda p(0)q(0). \tag{5.130}$$

Teniendo en cuenta (1.21) y la Proposición 5.3.2, se obtiene una relación algebraica explícita entre $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$.

$$x^2 P_n^{*s}(x) = (x+\alpha_n)P_{n+1}(x) - \left[(x+\alpha_n)\frac{P_{n+1}(0)}{P_n(0)} + \frac{P_n^*(0)}{P_{n-1}^*(0)}\alpha_n\right] P_n(x)$$
$$+\frac{P_n^*(0)P_n(0)}{P_{n-1}^*(0)P_{n-1}(0)}\alpha_n P_{n-1}(x),$$

con α_n definido en (5.123). Dado que $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ son ortogonales con respecto a productos estándar, satisfacen relaciones de recurrencia a tres términos cuyos parámetros pueden calcularse mediante las fórmulas de Stieltjes [34].

Finalmente, expresamos los parámetros de la relación de recurrencia que verifica la sucesión $\{Q_n\}$ en términos de los parámetros de la relación de recurrencia a tres términos que satisfacen los polinomios de Freud.

Consideremos el producto estándar

$$\langle p, q\rangle = \int_{\mathbb{R}} pq e^{-x^4} dx. \tag{5.131}$$

Sea $\{F_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.131). Se trata de un ejemplo básico de *polinomios de Freud*. Es bien sabido [59, 60, 20] que $\{F_n\}$ verifica un relación de recurrencia a tres términos

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) - c_n F_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{5.132}$$

con condiciones iniciales

$$F_0(x) = 1, \quad F_1(x) = x,$$

y

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}, \quad n = 4c_n(c_{n+1} + c_n + c_{n-1}).$$

Para $n = 2m-1$, (5.132) se transforma en

$$F_{2m}(x) = xF_{2m-1}(x) - c_{2m-1}F_{2m-2}(x), \quad m \geq 1.$$

Teniendo en cuenta (5.120), se obtiene

$$P_m(x) = xP_{m-1}^*(x) - c_{2m-1}P_{m-1}(x).$$

Por (1.21), obtenemos

$$c_{2m-1} = -\frac{P_m(0)}{P_{m-1}(0)}, \quad m \geq 1. \tag{5.133}$$

Para $n = 2m$, (5.132) se transforma en

$$F_{2m+1}(x) = xF_{2m}(x) - c_{2m}F_{2m-1}(x), \quad m \geq 1.$$

De nuevo por (5.120), obtenemos

$$P_m^*(x) = P_m(x) - c_{2m}P_{m-1}^*(x), \quad m \geq 1.$$

Por (1.21) y (5.133), se obtiene

$$P_{m+1}(x) = [x - c_{2m+1} - c_{2m}]P_m(x) - c_{2m}c_{2m-1}P_{m-1}(x). \tag{5.134}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (5.126), por (5.133) y (5.134) deducimos

$$\beta_{2m,2m} = c_{2m} + c_{2m+1}, \quad \beta_{2m,2m-2} = c_{2m}c_{2m-1}. \tag{5.135}$$

Supongamos que $\{\xi_m\}$ y $\{\gamma_m\}$ son las sucesiones de parámetros de la relación de recurrencia a tres términos que verifica la sucesión $\{P_m^*\}$, i.e,

$$P_{m+1}^*(x) = (x - \xi_m)P_m^*(x) - \gamma_m P_{m-1}^*(x), \quad m \geq 1. \tag{5.136}$$

Teniendo en cuenta la definición de polinomios núcleo, (5.134), y (5.133) se obtiene

$$\begin{aligned} \xi_m &= c_{2m+1} + c_{2m+2}, \quad m \geq 0, \\ \gamma_m &= c_{2m}c_{2m+1}, \quad m \geq 1. \end{aligned} \tag{5.137}$$

Por otro lado, sabemos que $\{P_n^{*s}\}$ satisface una relación de recurrencia a tres términos dada por (5.127). Teniendo en cuenta la Proposición 5.3.2 y (5.136), llegamos a

$$\begin{aligned} &\beta_{1,1} = c_1 + c_2 - \alpha_1, \\ &\beta_{2m+1,2m+1} = \alpha_m - \alpha_{m+1} + c_{2m+1} + c_{2m+2}, \quad m \geq 1, \\ &\beta_{3,1} = c_2 + c_3 + \alpha_1 + \alpha_2 \left[c_3 + c_4 - \frac{P_2^*(0)}{P_1^*(0)} \right], \\ &\beta_{2m+1,2m-1} = \frac{c_{2m-1}c_{2m-2}P_{m-2}^*(0)}{\alpha_{m-1}P_{m-1}^*(0)} \left[\alpha_{m+1} \left(c_{2m+1} + c_{2m+2} + \frac{P_{m+1}^*(0)}{P_m^*(0)} \right) \right. \\ &\left. -\alpha_m(\alpha_m - \alpha_{m-1} + c_{2m+1} + c_{2m+2}) \right], \quad m \geq 2. \end{aligned}$$

5.3.2. μ_1 tiene su soporte en un subconjunto finito de la recta real simétrico con respecto al origen

Por simplicidad, consideraremos el conjunto $\{0\} \cup \{\pm\, c\}$ como soporte de la medida μ_1. Los resultados que se obtienen en esta sección se pueden extender de forma natural a $\{0\} \cup \{\pm\, c_k\}_{k=1}^N$.

Consideremos el producto interior

$$\langle p, q \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} pq\,d\mu_0 + \lambda_1 p'(0)q'(0) + \lambda_2[p'(c)q'(c) + p'(-c)q'(-c)], \tag{5.138}$$

donde μ_0 es una medida no discreta con soporte en un intervalo de la recta real simétrico con respecto al origen de modo que los correspondientes momentos de orden impar se anulan.

Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto a (5.138). Sean $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ las sucesiones que verifican (5.90).

5.3.2.1. Medidas de ortogonalidad asociadas a $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$

Para $n \neq m$,

$$0 = \langle Q_{2n}, Q_{2m} \rangle_s = \int_0^\infty P_n(x)P_m(x)d\hat{\mu}_0(x) + 8c^2\lambda_2 P_n'(c^2)P_m'(c^2)\,.$$

donde $d\hat{\mu}_0 = 2d\mu_0(x^{1/2})$. Entonces, $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto interior

$$\langle p, q \rangle_1 = \int_0^\infty pq d\hat{\mu}_0 + 8c^2\lambda_2 p'(c^2)q'(c^2). \tag{5.139}$$

Del mismo modo, para $n \neq m$

$$\begin{aligned}
&0 = \langle Q_{2n+1}, Q_{2m+1} \rangle_s \\
&= \int_0^\infty xP_n^{*s}(x)P_m^{*s}(x)d\hat{\mu}_0 + \lambda_1 P_n^{*s}(0)P_m^{*s}(0) + 2\lambda_2 P_n^{*s}(c^2)P_m^{*s}(c^2) \\
&+4\lambda_2 c^2[(P_n^{*s})'(c^2)P_m^{*s}(c^2) + P_n^{*s}(c^2)(P_m^{*s})'(c^2)] + 8\lambda_2 c^4 (P_n^{*s})'(c^2)(P_m^{*s})'(c^2)]\,.
\end{aligned}$$

Entonces, $\{P_n^{*s}\}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonal con respecto al producto de Sobolev

$$\begin{aligned}
\langle p, q \rangle_2 = \int_0^\infty & xp(x)q(x)d\hat{\mu}_0(x) + \lambda_1 p(0)q(0) + 2\lambda_2 p(c^2)q(c^2) + \\
& +4\lambda_2 c^2[p'(c^2)q(c^2) + p(c^2)q'(c^2)] + 8\lambda_2 c^4 p'(c^2)q'(c^2)\,.
\end{aligned} \tag{5.140}$$

El producto interior en (5.140) puede reescribirse de forma alternativa como

$$\begin{aligned}
\langle p, q \rangle_2 &= \int_0^\infty xp(x)q(x)d\hat{\mu}_0(x) + \lambda_1 p(0)q(0) \\
&+2\lambda_2 \begin{bmatrix} p(c^2), & p'(c^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2c^2 \\ 2c^2 & 4c^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(c^2) \\ q'(c^2) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.141}$$

5.3.2.2. Relaciones algebraicas entre $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$

Para $0 \leq j \leq 2n-4$, se obtiene

$$\langle (x^5 - \frac{5}{3}c^2x^3)Q_{2n+1}(x), Q_j(x) \rangle_s = \langle Q_{2n+1}(x), (x^5 - \frac{5}{3}c^2x^3)Q_j(x) \rangle_s = 0\,,$$

y, como consecuencia,

$$(x^5 - \frac{5}{3}c^2x^3)Q_{2n+1}(x) = Q_{2n+6}(x) + \sum_{j=n-2}^{n+2} \alpha_{2n+1,2j}Q_{2j}(x)\,. \tag{5.142}$$

Teniendo en cuenta (5.90), de (5.142) deducimos una relación algebraica entre los polinomios $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$

$$(x^3 - \frac{5}{3}c^2x^2)P_m^{*s}(x) = P_{m+3}(x) + \sum_{j=m-2}^{m+2} \alpha_{2m+1,2j}P_j(x)\,. \tag{5.143}$$

5.3.2.3. Relaciones de recurrencia

A continuación probamos un resultado que será útil para deducir las relaciones de recurrencia que verifican las sucesiones $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$.

Proposición 5.3.4 *La multiplicación por $x^4-2c^2x^2$ es un operador simétrico con respecto al producto interior (5.138). Además, es el polinomio de grado mínimo que satisface tal propiedad.*

Demostración.

La multiplicación por un polinomio $h(x)$ es un operador simétrico con respecto al producto interior (5.138) si

$$< hp, q >_s = < p, hq >_s .$$

Es decir,

$$\begin{aligned}&\lambda_1[h'(0)p(0)+h(0)p'(0)]q'(0)+\lambda_2[h'(c)p(c)+h(c)p'(c)]q'(c)\\&+\lambda_2[h'(-c)p(-c)+h(-c)p'(-c)]q'(-c)=\\&\lambda_1 p'(0)[h'(0)q(0)+h(0)q'(0)]+\lambda_2 p'(c)[h'(c)q(c)+h(c)q'(c)]\\&+\lambda_2 p'(-c)[h'(-c)q(-c)+h(-c)q'(-c)],\end{aligned}$$

para cualesquiera polinomios p, q. Esto significa que

$$\begin{aligned}&\lambda_1 h'(0)[p(0)q'(0)-p'(0)q(0)]+\lambda_2 h'(c)[p(c)q'(c)-p'(c)q(c)]\\&+\lambda_2 h'(-c)[p(-c)q'(-c)-p'(-c)q(-c)]=0,\end{aligned} \tag{5.144}$$

para cualesquiera polinomios p y q. Cuando $p(x) = 1$, (5.144) se transforma en

$$\lambda_1 h'(0)q'(0)+\lambda_2 h'(c)q'(c)+\lambda_2 h'(-c)q'(-c)=0.$$

Tomando $q(x) = x, x^2, x^3$, respectivamente, obtenemos

1. $\lambda_1 h'(0)+\lambda_2 h'(c)+\lambda_2 h'(-c)=0,$
2. $2c\lambda_2[h'(c)-h'(-c)]=0,$
3. $3c^2\lambda_2[h'(c)+h'(-c)]=0\,.$

Por tanto,

$$h'(c)=h'(-c)=h'(0)=0.$$

Esto significa que el polinomio $h(x)$ de grado mínimo verifica

$$h'(x)=x(x-c)(x+c)\,,$$

y, en consecuencia,

$$h(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{c^2x^2}{2}.$$

Si h se elige mónico, entonces

$$h(x)=x^4-2c^2x^2\,.$$

□

Proposición 5.3.5 *Consideremos un producto de Sobolev simetrizado como en (5.138). Sea* $\{Q_n\}$ *la correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales. Supongamos que* $\{S_n\}$ *y* $\{P_n^{*s}\}$ *son las sucesiones que verifican (5.92). Entonces, se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia.*

$$(x^4 - 2c^2x^2)Q_n(x) = Q_{n+4}(x) + \sum_{j=n-4}^{n+3} \alpha_{nj} Q_j(x), \quad n \geq 4\,. \tag{5.145}$$

$$(x^2 - 2c^2x)P_n(x) = P_{n+2}(x) + \sum_{j=0}^{3} \alpha_{2n,2(n-2+j)} P_{n-2+j}(x), \quad n \geq 2\,. \tag{5.146}$$

$$(x^2 - 2c^2x)R_n(x) = R_{n+2}(x) + \sum_{j=0}^{3} \alpha_{2n+1,2(n-2+j)+1} R_{n-2+j}(x), \quad n \geq 2\,. \tag{5.147}$$

Demostración. Por la Proposición 5.3.4, para $0 \leq j < n-4$, se obtiene

$$\langle (x^4 - 2c^2x^2)Q_n, Q_j\rangle_s = \langle Q_n, (x^4 - 2c^2x^2)Q_j\rangle_s = 0, \tag{5.148}$$

de donde se deduce (5.145).

Para $n = 2m$, (5.145) se transforma en (5.146). Para $n = 2m+1$ (5.145) se transforma en (5.147).

Por tanto, las componentes simétricas $\{P_n\}$ y $\{P_n^{*s}\}$ son polinomios de Sobolev y satisfacen las relaciones de recurrencia a cinco términos dadas en (5.146) y (5.147). $\square$

Apéndice A

Problemas abiertos

Finalizamos con un conjunto de problemas y cuestiones que han surgido de forma natural en el desarrollo de los contenidos de esta Memoria y que aún no hemos abordado. Algunos de ellos ya están siendo estudiados y otros constituyen posibles líneas futuras de trabajo.

1. En el Capítulo 3 se llevó a cabo el estudio de estabilidad numérica y condicionamiento relativos a la transformación de Darboux sin parámetro con shift 0. Queda pendiente realizar ese análisis para el caso en que el shift puede tomar cualquier valor α real.

2. Otro estudio de estabilidad numérica y condicionamiento que también queda pendiente de estudio es el relativo a la transformación de Darboux con shift. Este estudio exige tomar en cuenta dos parámetros, el shift y el parámetro que surge en la factorización UL de la matriz mónica de Jacobi inicial.

3. Desarrollar nuevos algoritmos para ambas transformaciones de Darboux que sean estables en el sentido mixto backward-forward.

4. En el Capítulo 4 planteamos el siguiente problema abierto: determinar todos los funcionales bilineales simétricos casi-definidos $\mathbf{L}^*$ tales que, junto a otro funcional $\mathbf{L}$ del mismo tipo, den sentido a un determinado problema de simetrización. Una formulación en términos matriciales de este problema es estudiar todas las posibles factorizaciones del tipo Lh, con L triangular inferior y h, Hessenberg inferior, de una matriz de Hessenberg H asociada a un funcional bilineal simétrico de modo que la matriz $\tilde{H} = hL$ sea la matriz de Hessenberg asociada a un funcional bilineal simétrico casi definido $\mathbf{L}^*$ que, junto a $\mathbf{L}$, defina un problema de simetrización.

5. Las matrices de Hessenberg inferior a bandas con cuatro diagonales no nulas están asociadas a un problema de multiortogonalidad. Sería interesante aplicar los resultados del Capítulo 4 a este tipo de matrices

e interpretar los resultados en términos de propiedades de polinomios multiortogonales.

6. En el capítulo 4 se estudió una extensión de la transformación de Christoffel para el caso bilineal. Sin embargo, no se contemplaron posibles transformaciones racionales de funcionales bilineales simétricos casi-definidos así como la composición de transformaciones polinómicas y racionales de los mismos.

7. En el capítulo 5 se demostró que si consideramos un producto de Sobolev simetrizado $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ en el caso contínuo y si la componente simétrica que define los polinomios pares de la sucesión $\{Q_n\}$ ortogonal con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ es ortogonal respecto del producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, entonces la otra componente simétrica es ortogonal con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ dada por
$$\langle p, q \rangle_2 = \langle x^{1/2} p, x^{1/2} q \rangle_1.$$
Una cuestión por estudiar es determinar condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir un funcional bilineal simétrico y simetrizado para que el resultado anterior se verifique.

Apéndice B

Deducción de Eq. (5.9) a partir de la fórmula de Faà di Bruno

El problema de encontrar una expresión explícita para la derivada n-ésima de una composición de funciones tiene una larga historia. Según Lukacs [49], la necesidad de tal fórmula fue mencionada explícitamente en 1810 en el tratado de cálculo de Lacroix. Aunque mucho antes se habían resuelto varios casos especiales, el primero en obtener una solución general fue C. F. Faà di Bruno [10]. La fórmula de Faà di Bruno para la derivada i-ésima de la composición $f(g(x))$ dice que

$$\frac{d^i f(g(x))}{dx^i} = i! \sum_{k=0}^{i} f^{(k)}(g(x)) \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_i} \prod_{j=1}^{i} \frac{[g^{(j)}(x)]^{k_j}}{(j!)^{k_j}\, k_j!} \; , \tag{B.1}$$

donde la suma interior se extiende a todas las particiones que verifican

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_i = k \; , \qquad k_1 + 2k_2 + \ldots + ik_i = i \; . \tag{B.2}$$

En particular, cuando $g(x) = x^2$, $[g^{(j)}(x)]^{k_j}$ se anula para $j \geq 3$ a menos que $k_j = 0$, en cuyo caso, es igual a uno. Entonces, las condiciones (B.2) dicen

$$k_1 + k_2 = k \; , \qquad k_1 + 2k_2 = i \; , \qquad k_3 = \ldots = k_i = 0 \; ,$$

y las dos primeras de estas ecuaciones determinan de forma única los valores de k_1 y k_2 en términos de k e i,

$$k_1 = 2k - i \; , \qquad k_2 = i - k \; .$$

La aplicación de la fórmula de Faà di Bruno (B.1) entonces da

$$\frac{d^i f(x^2)}{dx^i} = i! \sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{i} f^{(k)}(x^2) \frac{(2x)^{2k-i}}{(2k-i)!(i-k)!} \; , \tag{B.3}$$

donde la cota inferior en la suma sobre k, con $[x]$ denotando la parte entera de x, se deduce del hecho de que $k_1 = 2k - i$ es un entero no negativo. Cuando $f(x) = P_n(x)$ es un polinomio de grado n en x, $f^{(k)}(x^2)$ se anula para $k > n$, de modo que la cota superior i puede reemplazarse por $\min\{i, n\}$. Así obtenemos (5.9).

Bibliografía

[1] Alfaro M., Marcellán F., Meijer H. G. y Rezola M. L., *Symmetric Orthogonal Polynomials for Sobolev-Type Inner Products*, J. Math. Anal. and Appl. 184(1994) 360–381.

[2] Alfaro M., Pérez T. E., Piñar M. A., y Rezola M. L., *Sobolev Orthogonal Polynomials: The discrete-continuous case*, Methods and Appl. of Anal. 6(1999) 593–616.

[3] Alvarez-Nodarse R., Marcellán F., y Petronilho J., *WKB Approximation and Krall-Type Orthogonal Polynomials*, Acta Appl. Math. 54(1998) 25–58.

[4] Arvesú J., Atia J. y Marcellán F., *On Semiclassical Linear Functionals: The Symmetric Companion*, Comm. Anal. Theory of Continued Fractions 10 (2002) 13–29.

[5] Barrlund A., *Perturbation bounds for the LDL^H and LU decompositions*, BIT 31 (1991) 358–363.

[6] Bavinck H. y Meijer H. G., *Orthogonal polynomials with respect to a symmetric inner product involving derivatives*, Appl. Anal. 33(1989) 103–117.

[7] Bavinck H. y Meijer H. G., *On orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives: zeros and recurrence relations*, Indag. Math. N. S. 1(1990) 7–14.

[8] Blankenagel J., *Anwendungen adjungierter Polynomoperatoren.* Doctoral Dissertation. Universitat zu Köln, 1971.

[9] Boas R. P., *The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation*, Bull. Amer. Math. Soc. 45(1939) 399–404.

[10] Faá di Bruno C. F., *Note sur une nouvelle formule du calcul différentiel*, Quart. J. Math. 1(1855) 359–360.

[11] Bueno M. I. y Dopico F. M., *Stability and sensitivity of tridiagonal LU factorization without pivoting.* BIT. En prensa.

[12] Bueno M. I. y Dopico F. M., *Stability and sensitivity of Darboux transformation without parameter*, sometido.

[13] Bueno M. I., Kwon K. H., y Marcellán F., *Discrete-continuous symmetrized Sobolev inner products*. Acta Applicandae Mathematica. En prensa.

[14] Bueno M. I. y Marcellán F., *Continuous symmetric Sobolev inner products*, Intern. Math. Journal 3(2003) 319–342.

[15] Bueno M. I. y Marcellán F., *Darboux Transformation and Perturbation of linear functionals*. Linear Algebra Appl. 384(2004) 215-242.

[16] Bueno M. I., *Polynomial perturbations of bilinear functionals and Hessenberg matrices*, sometido.

[17] Bueno M. I., Marcellán F., y Sánchez-Ruiz J., *Continuous symmetric Sobolev inner products of order N (I)*, sometido.

[18] Bueno M. I., Marcellán F., y Sánchez-Ruiz J., *Continuous symmetric Sobolev inner products of order N (II)*, sometido.

[19] Buhmann M. y Iserles A., *On orthogonal polynomials transformed by the QR algorithm*, Journal Comp. Appl. Math. 43 (1992) 117–134.

[20] Cachafeiro A., Marcellán F. y Moreno-Balcázar J. J., *On Asymptotic properties of Freud-Sobolev Orthogonal Polynomials*, J. Approx. Theory 125 (2003) 26–41.

[21] Chang X. y Paige C. C., *On the sensitivity of the LU factorization*, BIT 38(1998) 486–501.

[22] Chang X. W. y Paige C. C., *Sensitivity analyses for factorizations of sparse or structured matrices*, Linear Algebra Appl. 284 (1998) 53–71.

[23] Chihara T. S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York. 1978.

[24] Chihara T. S., *Orthogonal Polynomials and Measures with End Point Masses*, Rocky Mount. J. Math. 15(1985) 705–719.

[25] Darboux G., *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, 2éme partie. Gauthiers-Villars. Paris. 1889.

[26] Demmel J., Gu M., Eisenstat S., Slapničar I., Veselić K. y Drmač Z., *Computing the singular value decomposition with high relative accuracy*, Linear Algebra Appl. 299 (1999) 21-80.

[27] Dhillon I. S., *A new $O(n^2)$ algorithm for the symmetric tridiagonal eigenvalue/eigenvector problem.* Ph.D. Thesis, Computer Science Division, University of California, Berkeley, 1997.

[28] Durán A. J., *The Stieltjes moment problem for rapidly decreasing functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 107(1989) 731–741.

[29] Durán A. J., *A Generalization of Favard's Theorem for Polynomials Satisfying a Recurrence Relation*, J. Approx. Theory 74(1993) 83–109.

[30] Evans W. D., Littlejohn L. L., Marcellán F., Markett C., y Ronveaux A., *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. 26(1995) 446–467.

[31] Fernando K. V. y Parlett B. N., *Accurate singular values and differential qd algorithms*, Numer. Math. 67 (1994) 191–229.

[32] Galant D., *An Implementation of Christoffel's Theorem in the Theory of Orthogonal Polynomials*, Math. Comp. 25(1971) 111–113.

[33] Galant D., *Algebraic Methods for Modified Orthogonal Polynomials*, Math. Comp. 59(1992) 541–546.

[34] Gautschi W., *An algorithmic implementation of the generalized Christoffel theorem*, En Numerical Integration, G. Hämmerlin Editor, Internat. Ser. Numer. Math., vol 57. Birkhäuser, Basel. 1982. 89–106.

[35] Gautschi W., *The interplay between classical analysis and (numerical) linear algebra. A tribute to Gene H. Golub*, ETNA 13(2002) 119–147.

[36] Geronimus Ya L., *On the polynomials orthogonal with respect to a given number sequence and a theorem by W. Hahn*, Izv. Akad. Nauk SSSR 4(1940) 215–228.

[37] Golub G. H. y Kautsky J., *Calculation of Gauss Quadratures with Multiple Free and Fixed Knots*, Numer. Math. 41(1983) 147-163.

[38] Golub G. H. y Van Loan C. F., *Matrix Computations*, 3rd ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore. 1996.

[39] Grünbaum F. A. y Haine L., *Orthogonal Polynomials satisfying Differential Equations: the Role of the Darboux Transformation*, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 9. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 1996 143–154.

[40] Grünbaum F. A. y Haine L., *Bispectral Darboux Transformations: An Extension of the Krall Polynomials*, Internat. Math. Res. Notices 8 (1997) 359–392.

[41] Grünbaum F. A., Haine L., y Horozov E., *Some functions that generalize the Krall-Laguerre polynomials*, J. Comp. Appl. Math. 106 (1999) 271–297.

[42] Harnad J. y Kasman A., *The bispectral problem*, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 14. American Mathematical Society. Providence. Rhode Island. 1998.

[43] Hendriksen E. y van Rossum H. *Semiclassical Orthogonal Polynomials.* En Polynômes Orthogonaux et Applications, C. Brezinski et al Editors. Lecture Notes in Mathematics 1171. Springer Verlag. Berlin, 1985. 354-361.

[44] Higham N. J., *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, 2nd. ed., SIAM, Philadelphia. 2002.

[45] http://www.functions.wolfram.com.

[46] Jung I. H., Kwon K. H., y Lee J. K., *Sobolev Orthogonal Polynomials relative to* $\lambda p(c)q(c) + < \tau, p'(x)q'(x) >$, Comm. Korean Math. Soc. 12(1997) 603–617.

[47] Kautsky J. y Golub G. H., *On the Calculation of Jacobi Matrices*, Linear Algebra Appl. 52/53 (1983) 439–455.

[48] Kim D. H., Kwon K. H., Marcellán F., y Yoon G. J., *Sobolev orthogonality and coherent pairs of moment functionals: An inverse problem.* Int. Math. J. 2(2002) 877-888.

[49] Lukacs E., *Applications of Faa di Bruno's formula in Mathematical Statistics*, Amer. Math. Monthly 62(1955) 340–348.

[50] Marcellán F. y Sansigre G., *Orthogonal polynomials on the unit circle: symmetrization and quadratic decomposition*, J. Approx. Theory 65(1991) 109–119.

[51] Marcellán F. y Maroni P., *Sur l'adjonction d'une masse de Dirac à une forme régulière et semiclassique*, Annal. Mat. Pura ed Appl. 162(1992) 1–22.

[52] Marcellán F., Pérez T. E., Piñar M. A., y Ronveaux A., *General Sobolev orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. 200 (1996) 614–634.

[53] Maroni P., *Sur la Suite de Polynômes Orthogonaux Associée à la forme* $u = \delta_c + \lambda(x-c)^{-1}L$, Period. Math. Hungar. 21(3)(1990) 223–248.

[54] Maroni P.,*Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semiclassiques.* En Orthogonal polynomials and their applications, C. Brezinski et al Editores. IMACS Annals on Computing and Applications Math. 9 (1991) 95-130.

[55] Matveev V. B. y Salle M. A., *Differential-Difference Evolution Equations. II (Darboux Transformation for the Toda Lattice)*, Letters in Math. Physics 3(1979), 425-429.

[56] Matveev V. B. and Salle M. A, *Darboux transformations and solitons*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Berlin, 1991.

[57] Meijer H. G., *Determination of all coherent pairs of measures.* J. Approx. Theory 89(1997) 321-343.

[58] Mishkov R. L., *Generalization of the formula of Faa di Bruno for a composite function with a vector argument*, Internat. J. Math. and Math. Sci. 24 7(2000) 481–491.

[59] Nevai P., *Orthogonal polynomials associated with* $exp(-x^4)$, Proc. Canad. Math. Soc. 3(1983) 263–285.

[60] Nevai P., *Asymptotics for orthogonal polynomials associated with* $exp(-x^4)$, SIAM J. Math. Anal. 15(1984) 1177–1187.

[61] Parlett B. N., *The new qd algorithms*, Acta Numerica (1995) 459–491.

[62] Pérez T. E. y Piñar M. A., *On Sobolev orthogonality for Generalized Laguerre polynomials*, J. Approx. Theory, 86(1996) 278–285.

[63] Roman S., *The formula of Faa di Bruno*, Amer. Math. Monthly 87(1980) 805–809.

[64] Spiridonov V., Vinet L. y Zhedanov A., *Spectral transformations, self-similar reductions, and orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Gen. 30(1997) 7621–7637.

[65] Spiridonov V., *Universal superpositions of coherent states and self-similar potentials.* Phys. Rev. 52(1995) 1909–35.

[66] Spiridonov V. y Zhedanov A., *Self-similarity, spectral transformations and orthogonal and biorthogonal polynomials.* En self-similar systems, V. B. Priezzhev and V. P. Spiridonov Editores. Proc. International Workshop JINR. Dubna, 1999. 349-361.

[67] Stewart G. W., *On the perturbation of LU and Cholesky factors*, IMA J. Numer. Anal. 17 (1997) 1–6.

[68] Stewart G. W., *On the perturbation of LU, Cholesky and QR factorizations*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 14 (1993) 1141–1145.

[69] Sun J. G., *Componentwise perturbation bounds for some matrix decompositions*, BIT 32 (1992) 702–714.

[70] Uvarov V. B., *The Connection between Systems of Polynomials Orthogonal with respect to Different Distribution Functions*, USSR Comp. Math. Phys. 9(1969) 25–36.

[71] Zhedanov A., *Rational Spectral Transformations and Orthogonal Polynomials*, J. Comp. Appl. Math. 85(1997) 67–86.