UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Departamento de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

Teoría de Momentos y Propiedades Asintóticas para Polinomios Ortogonales de Sobolev

Héctor E. Pijeira Cabrera

Dirigida por:

Guillermo López Lagomasino

Junio de 1998.

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Departamento de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

Teoría de Momentos y Propiedades Asintóticas para Polinomios Ortogonales de Sobolev

Memoria presentada por D. Héctor Esteban Pijeira Cabrera para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad Carlos III de Madrid en el Programa de Tercer Ciclo Ingeniería Matemática.

Realizada bajo la dirección del Dr. D. Guillermo López Lagomasino, Caterático Visitante del Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid.

Leganés, 9 de Junio de 1998.

A la memoria de mi madre, a Margot Cabrera.

Agradecimientos.

En primer lugar quiero expresar mi profunda gratitud al director de esta tesis, Guillermo López Lagomasino por su amistad, por todos los conocimientos que me ha transmitido y por su confianza en mi durante los últimos veinte años. Extiendo este agradecimiento a su familia por al cariño que me han profesado.

Agradezco a Francisco Marcellán Español por su apoyo, sugerencias y esmeradas revisiones.

Mi agradecimiento a Dolores Barrios y Andrei Martínez por su colaboración en la realización de parte del material contenido en esta memoria. A José M. Rodríguez por la revisión del manuscrito.

Mi agradecimiento por la ayuda y la solidaridad durante todos estos años a las personas de los siguientes colectivos: Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Matanzas, Seminario de Polinomios Ortogonales de la Universidad Carlos III de Madrid y Academias Delfos.

Por los diversos medios y facilidades que me han brindado para la realización de esta memoria, agradezco a las siguientes instituciones: Agencia Española de Cooperación Internacional, Universidad Carlos III de Madrid y Universidad de Matanzas.

He tenido la suerte de contar con muchos amigos, algunos de aquí, otros de allá, unos de antes y otros de ahora, a todos ellos mi profunda gratitud.

Mi agradecimiento a Esteban Moro, Enrique Diez, Fracisco Padilla, Jesús Devís, Miguel Moscoso, Domingo Pestana, Bernardo de la Calle, Pedro J. Hernando, Jorge Arvesú, Gerardo Oleaga, Jorge Sánchez, Venancio Álvarez, Delfín y Ana Santa Teresa, Marta Ugarte, Ramón Vázquez, Pedro Sosa, Víctor Padrón, Juan J. Pastrana, Alfredo Fundora, Mario Guillot, a mis compañeros de cursos de doctorado y tantos otros que me es imposible mencionar.

Finalmente agradezco a mi familia su cariño, paciencia y sacrificios durante todos estos años. A Marcela, Héctor Javier, Cuso y José E. López. A mi madre, que lamentablemente no podrá compartir conmigo estos momentos.

Héctor E. Pijeira Cabrera.
Madrid, Junio de 1998.

Contenidos

Capítulo I

Introducción

§ I.1 Ortogonalidad: caso estándar vs. caso Sobolev.

En el análisis moderno sobre espacios abstractos se destacan, por la riqueza de sus propiedades y la amplia gama de aplicaciones, aquellos espacios que poseen estructura métrica y estructura vectorial compatibles. Particular importancia cobran los espacios dotados de un producto escalar.

Una de las realizaciones que mayor interés tiene es el espacio $L^2(\mu)$ formado por las funciones de cuadrado integrable con respecto a una medida μ. En toda la tesis por medida entendemos a una medida no negativa, finita, de Borel, y con soporte (compacto) Δ contenido en el eje real $\mathbb{R}$. $L^2(\mu)$ tiene estructura de espacio de Hilbert con el producto interior y la norma dados por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{\Delta} f(x)\, g(x)\, d\mu(x) \\ \|f\| &= \sqrt{\langle f, f \rangle} \end{aligned}\right. \qquad f, g \in L^2(\mu) \tag{1.1}$$

Se dice que dos funciones $f, g \in L^2(\mu)$ son ortogonales si $\langle f, g \rangle = 0$. Los sistemas completos de funciones ortogonales tienen la virtud de que los espacios lineales que ellos generan son densos en todo $L^2(\mu)$. Esto permite obtener representaciones aproximadas de los elementos de dicho espacio. Existen distintas posibilidades para seleccionar sistemas de funciones ortogonales. Entre los mas importantes figuran los formados por polinomios algebraicos y por polinomios trigonométricos. Las ventajas de trabajar con polinomios son muchas. Podemos enumerar: facilidad de cálculo numérico, densidad en el espacio de las funciones continuas con la norma uniforme, forman sistemas de Chebyshev por lo que son buenos interpolantes.

Un sistema de polinomios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ se dice que es ortogonal con respecto a la medida μ , si para cada n, $grad\,P_n = n$ (en lo sucesivo, $grad\,P$ denota el grado del polinomio P), y

$$\langle P_n, P_m \rangle \begin{cases} \neq 0, & n = m, \\ = 0, & n \neq m. \end{cases} \tag{1.2}$$

Si para cada n se tiene además que $\|P_n\| = 1$, entonces se dice que el sistema es ortonormal. El ejemplo mas clásico de familia de polinomios ortogonales es el formado por los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ que son ortogonales con respecto a la medida $d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ soportada en el intervalo $[-1, 1]$. Mas precisamente

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = m > 0, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Tales polinomios verifican la fórmula

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} x^{n-2k} \left(x^2 - 1\right)^k, \quad n = 0,\ 1,\ \cdots, \tag{1.3}$$

donde $\left[\frac{n}{2}\right]$ denota la parte entera de $\frac{n}{2}$. Para $x \in [-1, 1]$ se tiene que $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

De la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con valores frontera, surge el interés por considerar productos interiores que involucren no solo a las funciones, sino también a sus derivadas hasta un orden dado. Dichos productos reciben el nombre de *productos interiores de Sobolev.* La definición de los espacios de Sobolev sobre los cuales tales productos tienen sentido es un asunto delicado. Por ello, por el momento nos restringimos a la definición de producto de Sobolev sobre el espacio de los polinomios, que admiten derivada de cualquier orden y que son integrables con respecto a cualquier medida finita de Borel. Sea $\{\mu_k\}_{k=0}^{d}$, $d \in \mathbb{Z}_+$ fijo, un sistema de $d+1$ medidas finitas de Borel con soporte $\Delta_k \subset \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \cdots, d$. Supondremos que al menos el soporte de μ_0 contiene una cantidad infinita de puntos y, para evitar casos triviales, que

μ_d no es la medida nula. Se llama *producto interior de Sobolev* asociado a dicha familia de medidas al producto definido (sobre el espacio de los polinomios) por la relación

$$\langle f,g\rangle_S := \sum_{k=0}^{d} \int f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)d\mu_k(x) = \sum_{k=0}^{d} \langle f^{(k)}, g^{(k)}\rangle_{L^2(\mu_k)}\ , \tag{1.4}$$

donde los superíndices entre paréntesis denotan orden de derivación. La norma asociada a (1.4) se llama *norma de Sobolev* y viene dada por la expresión

$$\|f\|_S = (\langle f,f\rangle_S)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{d} \langle f^{(k)}, f^{(k)}\rangle_{L^2(\mu_k)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{d} \|f^{(k)}\|_{L^2(\mu_k)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

Es claro que si $d = 0$ tanto (1.4) como (1.5) admiten extensión a todo el espacio $L^2(\mu_0)$.

Dado el producto interior (1.4) diremos que una familia de polinomios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal con respecto al mismo, si para cada $n \in I\!N$ se tiene que $grad\, Q_n = n$ y

$$\langle Q_n, Q_m\rangle_S \begin{cases} \neq 0, & n = m, \\ = 0, & n \neq m. \end{cases}$$

En tal caso $Q_n(x)$ se llama n-ésimo *polinomio ortogonal de Sobolev* respecto a (1.4). Si $\langle Q_n, Q_n\rangle_S = 1$ para todo $n \in I\!N$ se dice que la familia es ortonormal.

La teoría estándar de polinomios ortogonales ha sido tema preferente de este siglo. De ello dan fé las monografías clásicas [80], [25], [29] y [21], y las mas recientes [63], [82] y [78] (para una perspectiva histórica más amplia ver [64], [48] y [47]). Sin embargo, el estudio de los polinomios ortogonales de Sobolev es relativamente nuevo (sobre propiedades algebraicas ver [4] y [61], para propiedades analíticas [56]). El trabajo [42] de 1947 es la primera publicación donde se estudian normas de tipo (1.5). Ello se hace en relación con problemas de mínimos cuadrados. Sin embargo, los polinomios de Sobolev se consideran por primera vez en forma explícita hace menos de cuarenta años en [7] y el mayor volúmen de investigaciones corresponde a la última década (ver [53]).

Ya en [7] se advierte que aunque en principio el estudio de los polinomios orto- gonales de Sobolev puede parecer análogo al caso estándar esto no es así. De manera inmediata se tropieza uno con diferencias sustanciales que requieren de otros enfoques para su estudio. A continuación analizaremos algunas de estas disparidades.

En el caso de la ortogonalidad en sentido usual, la localización de los ceros de la familia de polinomios ortogonales en la envoltura convexa del soporte de la medida de ortogonalidad es un resultado inmediato de la propia definición de ortogonalidad. Para un producto de Sobolev tan sencillo como el considerado por Althamer en [7]

$$\langle f, g\rangle_S := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx + 10 \int_{-1}^{0} f^{(\prime)}(x)g^{(\prime)}(x)dx + \int_{0}^{1} f^{(\prime)}(x)g^{(\prime)}(x)dx, \quad (1.6)$$

se comprueba que los ceros no solo pueden estar fuera de la envoltura convexa del soporte de las medidas que intervienen, sino que incluso pueden ser complejos. Mas aún, es sorprendente el hecho que no se sabe siquiera si para un producto de Sobolev arbitrario el conjunto de ceros de los polinomios ortogonales correspondientes se mantiene o no acotado en el plano complejo. Para la ortogonalidad de Sobolev el resultado más general que se conoce en tal sentido, es la condición suficiente que se demuestra en la sección § III.4 de este trabajo usando técnicas de la teoría de operadores acotados. Hasta el presente, solo se habían obtenido resultados de esta naturaleza para productos de Sobolev que involucran a pesos clásicos o cercanos a los mismos.

Una herramienta fundamental en el estudio de los polinomios (1.2) es la relación de recurrencia a tres términos que ellos satisfacen

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_n P_n(x) + b_n P_{n-1}(x)\ , \quad (1.7)$$

donde para todo $n \in I\!N$ se tiene que a_n es real y positivo y b_n es real. En el caso Sobolev, por regla general, el número de términos en la relación de recurrencia crece con el índice del polinomio. En [24] se demostró que relaciones de recurrencia con un número de términos que no dependa del índice del polinomio son posibles solamente cuando las medidas de la parte del producto interior que involucra a las derivadas son atómicas con un número finito de puntos de masa; es decir, una combinación finita de deltas de Dirac.

Es conocido que (1.7) es una consecuencia de la simetría del producto interior usual con respecto a x. Es decir, que para todo par de polinomios P y Q, $\langle xP, Q\rangle = \langle P, x\,Q\rangle$. Obsérvese que esto no es cierto en un producto de Sobolev arbitrario. La fórmula de recurrencia que satisfacen los productos de Sobolev se estudia en la sección § II.6 de este trabajo. En ella se obtiene una relación que describe la estructura de dicha fórmula y su conexión con la correspondiente matriz de momentos.

§ I.2 Génesis.

En este apartado no se pretende hacer un análisis exhaustivo sobre la historia de la teoría de polinomios ortogonales de Sobolev, pues a tales efectos ya existen varios trabajos como [4] y [61] sobre propiedades algebraicas y diferenciales, [56] sobre propiedades asintóticas, la recopilación bibliográfica [53] y la tesis doctoral [62] en cuya sección 1.3 se encuentra un análisis histórico pormenorizado. Aquí nos limitaremos a esbozar las características predominantes de lo que a nuestro juicio son tres períodos de desarrollo de esta teoría con el objetivo de situar en contexto nuestro propio trabajo, así como destacar el interés y la actualidad del tema.

En los últimos treinta años el estudio de los espacios (abstractos) de Sobolev han atraído gran atención. Al interés clásico por los mismos, debido a su conexión con la teoría de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales (ver [1], [39] y [40]), se han añadido el tratamiento numérico de soluciones para problemas con valores frontera (ver [40]), estudio de aproximaciones en espacios con pesos o mediante funciones suaves (ver [17] y [49]) y el estudio comparativo respecto a otros resultados conocidos (por ejemplo de teoría de potencial [35], de aproximación mediante splines [68]-[69] y de la teoría de polinomios ortogonales en el sentido usual a los que nos referiremos continuamente).

En concordancia con la teoría clásica de espacios de Sobolev en particular y de espacios de Banach en general, los tópicos cuyo estudio despiertan el mayor interés en los espacios de Sobolev con peso son:

1.- Densidad de funciones suaves.

2.- Teoremas y operadores de inmersión en espacios más generales.

3.- Espacios con derivada fraccionaria.

5.- Espacio dual.

6.- Interpolación y aproximación por funciones suaves.

7.- Sistemas ortogonales de funciones y series de Fourier-Sobolev.

El estudio de sistemas ortogonales de polinomios ha tenido especial preferencia. Como puede observarse en los trabajos de enfoque histórico que mencionamos anteriormente y en las fechas de nuestras citas bibliográficas, estos estudios han sido particularmente intensos en la década actual.

Antes de reseñar las etapas de desarrollo de esta teoría haremos una distinción de los productos de Sobolev en dos categorías. Un producto (1.4) se llama:

1.- *Producto de Sobolev discreto o tipo-Sobolev,* cuando las medidas $\{\mu_k\}_{k=1}^{d}$ tienen soporte formado por un número finito de puntos. En nuestro trabajo solo se considera este caso en la sección (§ III.8), con el objetivo de extender los resultados de las secciones precedentes del capítulo (III). El término tipo-Sobolev es usado frecuentemente, pues en ocasiones se hacen consideraciones que rebasan el marco de los productos interiores. Una formulación general de los mismos es

$$\langle f, g\rangle_S = \int f\, g\, d\mu_0 + \sum_{k=0}^{d} \mathcal{F}_k^t\, \mathcal{M}_k\, \mathcal{G}_k\ ,\ d \in \mathbb{Z}_+\ , \tag{1.8}$$

donde

$$\mathcal{F}_k = \begin{pmatrix} f(c_k) \\ f^{(1)}(c_k) \\ \vdots \\ f^{(n_k)}(c_k) \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m_k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_k,1} & a_{n_k,2} & \cdots & a_{n_k,m_k} \end{pmatrix} \quad \mathcal{G}_k = \begin{pmatrix} g(c_k) \\ g^{(1)}(c_k) \\ \vdots \\ g^{(m_k)}(c_k) \end{pmatrix},$$

μ_0 es una medida finita positiva de Borel y para $k = 0,\ 1,\ \cdots,\ d$ ($d \in \mathbb{Z}_+$), $c_k \in \mathbb{R}$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ y $n_k, m_k > 0$. $\mathcal{F}^t$ denota la transpuesta del vector $\mathcal{F}$.

2.- *Producto de Sobolev continuo,* cuando las medidas involucradas en el producto interior de Sobolev son de Borel con soporte formado por una cantidad infinita de puntos. Este es el tipo de productos estudiado en esta memoria, con la hipótesis adicional de que todas las medidas tienen soporte contenido en un intervalo acotado de la recta real. Los resultados del capítulo (IV) también son válidos para medidas soportadas sobre un arco analítico o una curva cerrada de Jordan con capacidad logarítmica mayor que cero (nos restringimos al caso de la recta para conservar la unidad en la exposición).

El primer período de desarrollo de esta teoría se puede ubicar entre el trabajo de Althammer y la publicación [19] de E.A. Cohen en 1975. Las características fundamentales son:

1. Consideración de productos de Sobolev como en (1.4) con $d = 1$, donde μ_0 y μ_1 son medidas absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue dadas por funciones de distribución suaves. Fundamentalmente se consideran pesos clásicos.

2. El objeto de investigación estuvo centrado en el estudio de propiedades algebraicas y entrelazamiento de ceros.

3. Al igual que en los espacios de Sobolev clásicos, la fórmula de integración por partes juega un papel fundamental en las demostraciones.

Entre los resultados obtenidos, mención especial merecen los de los trabajos [75], y [74]. En el primero de ellos se consideran medidas de tipo Jacobi soportadas en un intervalo y se dan condiciones suficientes para que los ceros sean simples y reales. En el segundo se prueba para la derivadas de los polinomios de Legendre-Sobolev (Q_n) que

$$Q_n'(x) = nP_{n-1} + \sqrt{\|Q_n\|_S}\, O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right),$$

donde P_n es el n-ésimo polinomio de Legendre. Este parece ser el primer resultado de carácter asintótico para polinomios ortogonales de Sobolev.

Después de este período y durante algo más de una década nadie abordó el estudio de los polinomios ortogonales con respecto a productos de Sobolev. Esto puede estar relacionado con el hecho de que esos años fueron decisivos en la sistematización y consolidación de la teoría de polinomios ortogonales en el sentido usual, los cuales constituyen la principal motivación para el estudio de los polinomios de Sobolev.

A fines de la década de los ochenta, comienza a gestarse una nueva etapa. Por un lado, con [9] y [10] se inicia el estudio sistemático de los productos discretos de Sobolev. Por otro, se retoma el caso continuo con [34]. Como características fundamentales de esta etapa (en la que se ha trabajado hasta muy reciente) cabe destacar:

1. Con el objetivo de ampliar la clase de productos de Sobolev continuos bajo consideración, se introduce el concepto de *par coherente de medidas*. Estos son pares de medidas para las cuales los polinomios ortogonales con respecto a una de ellas satisfacen fórmulas de recurrencias (con un número de términos que no crece con el grado del polinomio) en términos de las derivadas de los polinomios ortogonales respecto a la otra medida. Se hacen extensiones y ampliaciones de este concepto. Cuando las medidas consideradas son clásicas o cercanas a estas (semiclásicas) se obtienen buenos resultados.

2. El objeto de estudio se amplía. Al interés por las propiedades algebraicas y la localización de ceros se agregan las investigaciones sobre propiedades diferenciales y asintóticas.

Son importantes en esta línea los trabajos de H. G. Meijer ([59] y [60]) y de F. Marcellán y colaboradores (ver [6], [50], [51], [52] y [24] entre otros). Respecto a propiedades asintóticas, son de interés [57] así como los trabajos de A. Martínez y J. J. Moreno contenidos en la tesis doctoral [62] de este último.

Un tercer estadío tiene su nacimiento en [54], que es continuado con [44]. Estos dos trabajo se centran en el estudio de propiedades asintóticas de las familias de polinomios ortogonales con respecto a productos de tipo-Sobolev. Como objetivo principal está la determinación del comportamiento asintótico relativo entre los polinomios ortogonales respecto a (1.8) y los polinomios ortogonales respecto a μ_0. Recientemente en [26] se extienden los resultados de [44] a productos discretos muy generales que incluyen casos en que la medida μ_0 está soportada en una curva del plano complejo. Esta nueva etapa se caracteriza por:

1. Se consideran productos de Sobolev con medidas de Borel muy generales y derivadas de orden superior a uno.

2. El objeto de estudio se centra básicamente en las propiedades asintóticas y sus consecuencias. Se inician las investigaciones sobre teoría de momentos con respecto a productos de Sobolev con nuestro trabajo [15].

3. Se amplía el espectro de técnicas de trabajo. A las tradicionales herramientas de la teoría de funciones se agregan otras de aproximación racional en

[44], teoría de potencial en [27] y [46], espacios H^p en [55] y [58], y teoría de operadores acotados en [46].

De los trabajos previos realizados por otros autores, [27] y [55] han tenido una influencia directa en parte del material contenido en esta memoria. Las ideas de [27] nos han servido como fuente de inspiración para el desarrollo del tercer capítulo. La extensión de los resultados alcanzados en [55] a productos con derivadas de orden superior es el objetivo del cuarto capítulo.

§ I.3 Propósitos y estructura de este trabajo.

El capítulo (II) está dedicado al problema de momentos para productos de Sobolev y los resultados alcanzados aparecen en [58]. La teoría de momentos y la teoría de polinomios ortogonales en sentido usual comparten un mismo entorno histórico y teórico, con numerosos puntos de contacto. Por ello, resulta sorprendente que dicho tema no haya sido tratado con anterioridad a nuestras investigaciones. Para introducir y comentar los resultados alcanzados, supongamos que se tiene un sistema de $d+1$ ($d \in \mathbb{Z}_+$) conjuntos Δ_k, $\Delta_k \subset \mathbb{R}$ para $k = 0, 1, \ldots, d$, y una matriz simétrica e infinita de números reales $\mathcal{M} = (s_{i,j})$. Dada una medida μ, mediante $Sop\ \mu$ denotamos el soporte de la misma. Recordamos que el soporte de una medida μ consiste en el menor cerrado cuyo complemento tiene medida μ cero.

El *problema de momentos de Sobolev* o *S-problema de momentos* asociado a $(\mathcal{M}; \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_d)$ consiste en encontrar un sistema de $d+1$ medidas positivas $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d$ cuyos soportes cumplen $Sop\ \mu_k \subset \Delta_k$, $k = 0, 1, \ldots, d$, y tales que

$$s_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle_S = \sum_{k=0}^{d} \frac{i!\ j!}{(i-k)!\,(j-k)!} \int_{\Delta_k} x^{i+j-2k} d\mu_k(x) \ ,\ i, j = 0, 1, \ldots .$$

Cuando el S-problema de momentos para $(\mathcal{M}; \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_d)$ tiene al menos una solución, diremos que está *definido*. Si además dicha solución es única se dice que el problema está *determinado*.

En el segundo capítulo se estudia, en primer término, la estructura que debe tener la matriz $\mathcal{M}$ para que el problema de momentos de Sobolev tenga sentido y se reduce la caracterización de los S-problemas de momentos definidos y/o determinados al estudio de la definición y/o determinación de $d+1$ problemas de momentos ordinarios. De ello se derivan condiciones para las distintas realizaciones del pro- blema de momentos de Sobolev que extienden los resultados de la teoría clásica de momentos. Colateralmente, se obtiene una relación que describe la estructura de la fórmula de recurrencia que satisfacen los polinomios de Sobolev y una expresión para sus ceros.

Los capítulos (III) y (IV) se dedican a las propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales de Sobolev, considerando clases amplias de medidas. El estudio del comportamiento de los polinomios ortogonales, cuando su grado crece indefinidamente, es uno de los tópicos de mayor interés en esta teoría. El interés inicial por las propiedades asintóticas viene dado por la importancia que tiene en problemas de desarrollos ortogonales, interpolación de Lagrange y aproximación racional. En la actualidad, el análisis del comportamiento asintótico de familias de polinomios ortogonales ha adquirido personalidad e interés propios.

Para introducir los distintos puntos de atención en el estudio de las propiedades asintóticas, consideremos de nuevo los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ dados en (1.3). Debido a la fórmula $\cos(n\,\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right)$, haciendo $\theta = \arccos(z)$, se deduce de manera inmediata que

$$T_n(z) = \frac{(z+\sqrt{z^2-1})^n + (z-\sqrt{z^2-1})^n}{2}\,. \tag{1.9}$$

La rama de la raíz cuadrada se toma de modo que $|z+\sqrt{z^2-1}| > 1$ cuando $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Es fácil de verificar que para $z \in (\mathbb{C} \setminus [-1,1])$ se tiene que $|z-\sqrt{z^2-1}| = |z+\sqrt{z^2-1}|^{-1} < 1$. Luego, de (1.9) se obtiene de manera inmediata el llamado *comportamiento asintótico fuerte*. O sea,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n(z)}{(z+\sqrt{z^2-1})^n} = \frac{1}{2}\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]. \tag{1.10}$$

De aquí se sigue inmediatamente el *comportamiento asintótico del cociente*. Esto es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n(z)}{T_{n-1}(z)} = z + \sqrt{z^2-1}\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]. \tag{1.11}$$

Finalmente, de la conocida propiedad de convergencia de los promedios de una sucesión convergente se llega al *comportamiento asintótico de la raíz n-ésima* de la sucesión de polinomios

$$\lim_{n\to\infty} |T_n(z)|^{1/n} = |z+\sqrt{z^2-1}|\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]. \tag{1.12}$$

En (1.10), (1.11) y (1.12) la convergencia tiene lugar uniformemente sobre cada subconjunto compacto de la región $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

Es obvio que la asintótica fuerte implica la asintótica del cociente y esta a su vez la asintótica de la raíz n-ésima independientemente de la familia de polinomios bajo consideración. Las afirmaciones recíprocas no son ciertas. La teoría asintótica de polinomios ortogonales trata de identificar clases de polinomios (o de medidas) para las cuales una u otra forma de relación asintótica tiene lugar. En la teoría de polinomios ortogonales en sentido usual se tienen múltiples resultados de esta naturaleza. Es de destacar que para productos de Sobolev los primeros resultados para clases generales de medidas aparecen hace apenas siete años en el caso discreto (ver [54] y [44]) y para los llamados productos continuos solo en los dos últimos años. Los resultados mas generales hasta el presente en esta dirección se encuentran en esta tesis.

El capítulo III, como indica su nombre, está dedicado al estudio de los ceros de la familia de polinomios ortogonales de Sobolev y a determinar el comportamiento asintótico de tipo (1.12) de los dichos polinomios. En la sección § III.4 se obtiene una condición suficiente para que el conjunto de los ceros esté acotado. Se introducen los conceptos de productos secuencialmente dominados (ver la definición 3.3) y l-regulares (ver definición 3.4). Bajo la condición de l-regularidad se prueba en la sección § III.6 que los polinomios tienen distribución asintótica regular de ceros. Con la hipótesis adicional de que el producto esté secuencialmente dominado y restringiéndonos a productos 0-regulares, se obtiene la asintótica de la raíz n-ésima de los polinomios de Sobolev y de sus derivadas (tanto la de los mónicos como ortonormales). Se hace una breve consideración del caso discreto en la sección § III.8 con el objeto de dar una clase amplia de productos de este tipo donde hay asintótica de la raíz n-ésima y para la cual no tiene lugar asintótica del cociente (que es el tipo de resultado que se deduce en [44]). Los resultados de este capítulo provienen de [46].

La primera sección del capítulo IV recoge nuestros primeros frutos en el estudio de polinomios de Sobolev los cuales fueron publicados en [57]. En ella se consideran productos de Sobolev con pesos de Gegenbauer. Se encuentra el comportamientos asintótico relativo entre los correspondientes polinomios de Sobolev y los de Gegenbauer clásicos. El resto del capítulo IV está dedicado a obtener el comportamiento asintótico fuerte (de tipo (1.10)), de productos de Sobolev superiormente dominados (ver la definición 4.5) y cuyas medidas están en la clase de Szegő. La última sección se dedica al análisis de las consecuencias de lo demostrado en la sección § IV.5.

El capítulo final contiene las conclusiones del trabajo con una valoración de los resultados alcanzados y la proyección de futuro de los mismos. Asimismo se comentan algunos problemas abiertos y posibles extensiones de esta investigación.

Capítulo II

El Problema de Momentos.

§ II.1 Introducción.

La primera ocasión en que se utilizó el término **Problema de Momentos** fue en la memoria clásica de T.J. Stieltjes (1856-1894) [77] (Cap. IV, publicada póstumamente entre 1894 y 1895), dedicada al estudio de las fracciones continuas. En ella Stieltjes escribió:

> Daremos el nombre de problema de momentos al siguiente problema: encontrar una distribución de masa positiva sobre el intervalo $[0, \infty)$, dados los momentos de orden l $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ de la distribución.

Por encontrar una distribución de masa positiva en el semieje se entiende hallar una función no decreciente $\mu(x)$, tal que dados los números $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ arbitrarios $(\beta > \alpha)$, el incremento $\mu(\beta) - \mu(\alpha)$ representa la masa (medida) del intervalo $[0, \infty)$. El vocablo *momentos*, Stieltjes lo tomó de la mecánica, como también hizo con los de masa, estabilidad, etc.. El llamó momento generalizado de orden l asociado a la distribución $\mu(x)$ al número m_l dado por

$$m_l = \int_0^\infty x^l \, d\mu(x), \qquad l = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.1}$$

Nótese que si $d\mu(x)$ es una masa distribuida sobre el intervalo $[x,\, x + dx]$ y en consecuencia $\int_0^x d\mu(t)$ representa la masa distribuida en todo el intervalo $[0,\, x]$ entonces m_0 y m_1 representan respectivamente los momentos de estática y de inercia de la distribución en cuestión con respecto al punto $x = 0$.

Reformulando el **Problema de Momentos de Stieltjes** mediante el lenguaje moderno, se plantea que: dada una sucesión numérica infinita $\{m_l\}_{l=0}^{\infty}$ encontrar una medida positiva μ con soporte en el semieje $[0, \infty)$ tal que se cumplan las relaciones (2.1). Por supuesto que tal medida no tiene por qué existir y aún en caso de que existiera no tendría por qué ser única. Así, el Problema de Momentos de Stieltjes consta en su planteamiento de dos partes:

1. Encontrar condiciones necesarias y/o suficientes que garanticen la existencia de solución al Problema de Momentos sobre $[0, \infty)$. En caso de que ésta exista se dice que **el problema de momentos está definido**.

2. En caso de estar definido, encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para la unicidad de la solución sobre $[0, \infty)$. Si dicha solución es única se dice que **el problema de momentos está determinado**.

Los pioneros en abordar este tipo de problemas fueron el matemático ruso P.L. Chebyshev (1821-1894) en [20] de 1874 y su discípulo A.A. Markov (1856-1922) en varios trabajos comprendidos entre su tesis de 1884 y 1896. Su interés era la obtención de cierto teorema límite en teoría de probabilidades, donde como medio utilizaban la determinación de $\mu(x)$ a partir de sus momentos. Sin embargo, el problema de momentos aparecía como secundario, sin que el estudio de la existencia o construcción de soluciones centrara su atención.

Por su parte, Stieltjes dió como condiciones necesarias y suficientes para la existencia de solución al problema de momentos el siguiente resultado:

Si los determinantes de Hankel asociados a las sucesiones $\{m_l\}_{l=0}^{\infty}$ y $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$, satisfacen:

$$\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n} \end{vmatrix} > 0, \qquad n \in I\!N, \tag{2.2}$$

y

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n+1} & m_{n+2} & \cdots & m_{2n+1} \end{vmatrix} > 0, \qquad n \in I\!N, \tag{2.3}$$

entonces existe solución al problema de momentos de Stieltjes.

La matriz

$$\begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de *matriz de momentos asociada a la sucesión* $\{m_l\}_{l=0}^{\infty}$.

Después de Stieltjes, el próximo gran paso fue dado por H. Hamburger en [32], cuando extendió el problema de momentos a la búsqueda de solución con medidas soportadas sobre toda la recta real en lugar del semieje $[0, \infty)$, por lo que hoy se denomina dicho problema como **Problema de Momentos de Hamburger**. El probó que análogo al caso de Stieltjes una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución es la positividad de los determinantes de Hankel (2.2). Es importante destacar que el problema de momentos de Hamburger puede no estar determinado, mientras que el de Stieltjes con los mismos momentos sí lo está.

Posteriormente R. Nevanlinna (1895-1980) introdujo las nuevas técnicas de la teoría de funciones en lugar de las fracciones continuas para el estudio del problema de momentos y estableció los nexos entre éste y cierto problema extremal. En esta dirección, M. Riesz (1886-1969) en [70] y [71] estableció la estrecha conexión existente entre la densidad de los polinomios en el espacio L^2 y el problema de momentos, su resultado expresa lo siguiente:

> Sea μ una medida positiva sobre $(-\infty, \infty)$. Si el problema de momentos de Hamburger para $m_l = \int x^l \, d\mu(x)$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ está determinado, entonces los polinomios son densos en $L^2(\mu)$. En caso de no estar determinado dicho problema, entonces la densidad de los polinomios en $L^2(\mu)$ se tiene si y solo si μ es una medida extremal según el concepto introducido por Nevanlinna.

Por otra parte, en 1923 F. Hausdorff (1869-1942) en [33] estudió el problema de momentos para medidas con soporte en un intervalo finito $[\alpha, \beta]$. El así llamado **Problema de Momentos de Hausdorff** siempre está determinado y para que esté definido hace falta que la sucesión numérica $\{m_l\}_{l=0}^{\infty}$ sea completamente monótona, es decir que

$$\triangle^k m_l \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} m_{l+i} \geq 0$$

donde l, k son enteros no negativos y $\triangle^0 m_l \equiv m_l$.

Más adelante se evidenció la estrecha relación existente entre formas cuadráticas de infinitas variables y operadores en espacios de Hilbert, tarea desarrollada por T. Carleman (1892-1949) y M. Stone (1903-1989). Es de gran interés la condición suficiente, que estableció Carleman en [18], para la determinación del problema de momentos de Hamburger. En ella se pide que

$$\sum_{l=1}^{\infty} m_{2l}^{-1/2l} = \infty. \tag{2.4}$$

Como referencia usual sobre los tópicos tratados en esta introducción se remite al lector a los textos [3], [76] y [38]. En el resto del capítulo se abordará el problema de momentos para los productos interiores de Sobolev, al que hacemos extensivos los conceptos que se han introducido aquí. No tenemos conocimiento de que dicho problema haya sido abordado con anterioridad por lo que sólo damos como referencia nuestro trabajo [15].

§ II.2 Problema de Momentos de Sobolev.

Sea $\{\mu_k\}_{k=0}^{d}$, con $d \in I\!N$ fijo, un conjunto de $d+1$ medidas positivas, donde para cada k

$$Sop\ (\mu_k) \subset \Delta_k \subset I\!R\,,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ d\,.$$

Por $\langle \cdots, \cdots \rangle_k$ denotaremos el producto interior usual en el espacio de Hilbert $L^2(\mu_k)$, es decir:

$$\langle f, g \rangle_k := \int_{\Delta_k} f(x) g(x) d\mu_k(x)\,,\ k = 0, 1, \ldots, d.$$

Los momentos de orden l asociados a cada una de las medidas μ_k, por extensión de la notación usada en (2.1) se denotan por $m_{k,l}$, luego:

$$m_{k,l} := \int_{\Delta_k} x^l d\mu_k(x)\,,\ k = 0, 1, \ldots, d \ \text{ y } \ l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

mientras que $\mathcal{M}_k := (m_{k,l})$ denotará la matriz de momentos asociada a las medidas μ_k , $k = 0, 1, \ldots, d$. Obviamente, cada $\mathcal{M}_k$, $k = 0, 1, \ldots,$, es una matriz de Hankel.

Definición 2.1 *Dado el conjunto de medidas* $\{\mu_k\}_{k=0}^{d}$, $\mu_d \neq 0$, *llamaremos* **producto interior de Sobolev**, $\langle \cdots, \cdots \rangle_S$, *sobre el espacio* $I\!P$ *de todos los polinomios, a*

$$\langle f, g\rangle_S := \sum_{k=0}^{d} \langle f^{(k)}, g^{(k)}\rangle_k = \sum_{k=0}^{m} \int_{\Delta_k} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\mu_k(x)\,, \tag{2.6}$$

donde $f^{(k)}$ *es la derivada* k*-ésima del polinomio* f. *Además, llamaremos* **momentos de Sobolev**, *o en forma abreviada* **S-Momentos** *a los números:*

$$s_{i,j} := \langle x^i, x^j\rangle_S \ , \ i, j = 0, 1, \ldots . \tag{2.7}$$

Denotemos por $\mathcal{M} = (s_{i,j})$ la matriz infinita cuyo elemento en la posición (i, j) es el momento de Sobolev $s_{i,j}$; en virtud de (2.6) es claro que $\mathcal{M}$ es simétrica. Si $d = 0$, $\mathcal{M}$ coincide con la matriz de momentos o de Hankel asociada a la medida μ_0.

Ahora bien, sean dados a priori un sistema de $d + 1$ conjuntos Δ_k, $\Delta_k \subset I\!R$ para $k = 0, 1, \ldots, d$ y una matriz $\mathcal{M} = (s_{i,j})$ simétrica e infinita de números reales; entonces:

> El **problema de momentos de Sobolev** o **S-problema de momentos** asociado a $(\mathcal{M}; \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_d)$ consiste en encontrar un sistema de $d+1$ medidas positivas $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d$ con *Sop* $\mu_k \subset \Delta_k$, $k = 0, 1, \ldots, d$ tales que se cumpla (2.7).

Si el S-Problema de Momentos para $(\mathcal{M}; \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_d)$ tiene al menos una solución, diremos que está **definido**. En caso de que la solución $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d)$ de un S-Problema de Momentos definido sea única, diremos que el mismo está **determinado**.

Para simplificar las expresiones, cuando $\Delta_k = I\!R$, $k = 0, 1, \ldots, d$, no utilizaremos Δ_k en las notaciones y nos referiremos al problema de momentos como

problema de momentos de Sobolev-Hamburger o **SH-problema de momentos** para $\mathcal{M}$.

Nuestro objetivo en adelante es reducir el estudio del S-problema de momentos a un sistema de $d+1$ problemas de momentos ordinarios. Luego si k es un entero fijo entre 0 y d, el correspondiente problema de momentos se enuncia como:

> Dada $(\mathcal{M}_k, \Delta_k)$, donde $\mathcal{M}_k$ es la matriz de Hankel generada por una sucesión $\{m_{k,j}\}_{j=0}^{\infty}$ de números reales y $\Delta_k \subset I\!R$, encontrar una medida μ_k con $Sop\ \ \mu_k \subset \Delta_k$ tal que:
>
> $$m_{k,j} = \int_{\Delta_k} x^j \, d\mu_k(x) \ , \ j = 0, 1, \ldots .$$

Acerca del problema de momentos ordinario existen muchas referencias, algunas de las cuales ya fueron citadas en la introducción de este capítulo. Comencemos entonces por establecer nexos entre los momentos asociados a cada una de las medidas μ_k (2.5) y los momentos de Sobolev (2.7). Usando (2.6) puede verse que:

$$\begin{aligned} s_{i,j} &= \sum_{k=0}^{d} \langle (x^i)^{(k)}, (x^j)^{(k)} \rangle_k \\ &= \sum_{k=0}^{\delta} \frac{i!\ j!}{(i-k)!\,(j-k)!} \int_{\Delta_k} x^{i+j-2k} d\mu_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\delta} \frac{i!\ j!}{(i-k)!\,(j-k)!}\, m_{k,i+j-2k} \, . \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $\delta = \min\{i, j, d\}$, $i, j = 0, 1, \ldots$.

Considerando ahora el producto formal entre matrices infinitas, la representación matricial de la igualdad (2.8) será:

$$\mathcal{M} = \sum_{k=0}^{d} \mathcal{D}_k \mathcal{M}_k {\mathcal{D}_k}^t \, , \mathcal{M}_d \neq 0 \tag{2.9}$$

donde $\mathcal{D}_k = \left(c_{i,j}^k \right)_{i,j=0}^{\infty}$, ${\mathcal{D}_k}^t$ es la transpuesta de $\mathcal{D}_k$ y para $k = 0, \ldots, d$

$$c_{i,j}^k = \begin{cases} \dfrac{i!}{(i-k)!} & \text{si } \ i - j = k \, . \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Nótese que $\mathcal{D}_0$ es la matriz identidad infinita y que por ejemplo:

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 0 & & \\ & 0 & 3 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 6 & 0 & 0 & & \\ & 12 & 0 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

La descomposición (2.9) es fundamental para nuestro propósito. Por ello durante el resto de esta sección y las dos siguientes nos concentraremos en estudiar cuando para una matriz infinita $\mathcal{M}$ (no necesariamente de momentos) existe una familia de matrices de Hankel $\{\mathcal{M}_k : k = 0, 1, \ldots, d\}$ tal que se cumpla (2.9). Los aspectos que se tratarán son puramente algebraicos y por ello temporalmente no impondremos la condición de que las matrices $\mathcal{M}_k$ sean matrices de momentos.

En primer lugar analizaremos la consistencia de la mencionada descomposición, es decir su unicidad.

Teorema 2.1 *Sean $\mathcal{M} = (s_{i,j})$ una matriz infinita y $\mathcal{M}_k$, $k = 0, 1, \ldots, d$, matrices infinitas de Hankel tales que* (2.9) *se cumple y $\mathcal{M}_d \neq 0$. Entonces dicha descomposición es única.*

Demostración.- Supongamos que $\widetilde{\mathcal{M}}_0$, $\widetilde{\mathcal{M}}_1$, $\ldots$, $\widetilde{\mathcal{M}}'_d$ son $d+1$ matrices infinitas de Hankel con respecto a las cuales también se cumple (2.9), $\mathcal{M}'_d \neq 0$. Probaremos que:

$$d = d' \;\text{ y }\; \mathcal{M}_k = \widetilde{\mathcal{M}}_k\,,\; k = 0, \ldots, d\,.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $d \leq d'$ (si $d \geq d'$ la demostración se tiene de los mismos argumentos). Si $d < d'$, completemos la familia de matrices $\widetilde{\mathcal{M}}_k$ con matrices nulas para $k = d' + 1, \cdots, d$.

Nótese que para cualquier matriz $\mathcal{A}$, los elementos correspondientes a las primeras k filas y las primeras k columnas de $\mathcal{D}_k \mathcal{A} {\mathcal{D}_k}^t$, $k = 1, \ldots, d$, son todos ceros. Luego como:

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_0 \mathcal{M}_0 {\mathcal{D}_0}^t + \sum_{k=1}^{d} \mathcal{D}_k \mathcal{M}_k {\mathcal{D}_k}^t = \mathcal{D}_0 \widetilde{\mathcal{M}}_0 {\mathcal{D}_0}^t + \sum_{k=1}^{d} \mathcal{D}_k \widetilde{\mathcal{M}}_k {\mathcal{D}_k}^t \tag{2.11}$$

y

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{D}_0{}^t \ , \ \ \widetilde{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{D}_0 \widetilde{\mathcal{M}}_0 \mathcal{D}_0{}^t$$

se sigue que la primera fila de $\mathcal{M}_0$ y la de $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ coinciden con la primera fila de $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}_0$ y $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ son matrices de Hankel obtenemos que $\mathcal{M}_0 = \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

De aquí y de (2.11), tendremos:

$$\mathcal{M} - \mathcal{D}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{D}_0{}^t = \mathcal{D}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{D}_1{}^t + \sum_{k=2}^{d} \mathcal{D}_k \mathcal{M}_k \mathcal{D}_k{}^t = \mathcal{D}_1 \widetilde{\mathcal{M}}_1 \mathcal{D}_1{}^t + \sum_{k=2}^{d} \mathcal{D}_k \widetilde{\mathcal{M}}_k \mathcal{D}_k{}^t \, .$$

Los elementos de la segunda fila de

$$\sum_{k=2}^{d} \mathcal{D}_k \mathcal{M}_k \mathcal{D}_k{}^t \quad \text{y} \quad \sum_{k=2}^{d} \mathcal{D}_k \widetilde{\mathcal{M}}_k \mathcal{D}_k{}^t$$

son todos iguales a cero; por consiguiente, las segundas filas de $\mathcal{D}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{D}_1{}^t$ y $\mathcal{D}_1 \widetilde{\mathcal{M}}_1 \mathcal{D}_1{}^t$ coinciden con la segunda fila de $\mathcal{M} - \mathcal{D}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{D}_0{}^t$. Identificando los elementos por la operación de matrices indicada, se sigue que las primeras filas de $\mathcal{M}_1$ y $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ son idénticas. Como estas matrices son de Hankel, entonces coinciden totalmente. Repitiendo los mismos argumentos obtenemos que $\mathcal{M}_k = \widetilde{\mathcal{M}}_k$, $k = 0, \ldots, d$. Es claro entonces que $d < d'$ no es posible pues $\mathcal{M}_d \neq 0 = \widetilde{\mathcal{M}}_d$. Luego $d = d'$ y consecuentemente $\mathcal{M}_k = \widetilde{\mathcal{M}}_k$, $k = 0, \ldots, d$, con lo que queda demostrado el teorema. ■

Notemos que la demostración del teorema anterior nos da un método práctico para encontrar la descomposición de tipo (2.9), si conocemos a priori que esto es posible. Pero ¿qué condiciones debe cumplir una matriz infinita $\mathcal{M}$ para que ésta admita tal descomposición?, la respuesta a esta pregunta la encontraremos en la sección § II.4.

§ II.3 Resultados auxiliares.

Esta sección está dedicada a la obtención de ciertas identidades combinatorias que serán de utilidad para la demostración de los principales resultados del capítulo. Por ello, los índices y variables que intervienen han sido tomados del contenido precedente, aunque la validez de los resultados no depende de cualquier interpretación de los mismos que se haya hecho con anterioridad.

Lema 2.1 *Para todo $i, j \in I\!N$ se cumple que:*

$$\sum_{k=\nu}^{i} \frac{(-1)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \frac{(i+j-\nu-k-1)!}{(i-k)!(j-k)!} = 0 \ , \quad \nu = 0, 1, \ldots , \ i-1 \ , \quad j \geq i \, . \tag{2.12}$$

Demostración.- Consideremos el polinomio

$$p(z) := (1+z)^{i-\nu-1} = (1+z)^{i+j-2\nu-1} \left(1 - \frac{z}{1+z}\right)^{j-\nu} .$$

Teniendo en cuenta la fórmula de los coeficiente binomiales, $p(z)$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{n=0}^{j-\nu} (-1)^n \binom{j-\nu}{n} z^n (1+z)^{i+j-2\nu-n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{j-\nu} (-1)^n \binom{j-\nu}{n} \sum_{m=0}^{i+j-2\nu-n-1} \binom{i+j-2\nu-n-1}{m} z^{m+n} . \end{aligned}$$

Ya que *grad* $(p(z)) = i - \nu - 1$, el coeficiente correspondiente a $z^{i-\nu}$ en la expresión anterior es igual a cero, es decir:

$$0 = \sum_{n=0}^{i-\nu} (-1)^n \binom{j-\nu}{n} \binom{i+j-2\nu-n-1}{i-\nu-n} .$$

Tomando $n = k - \nu$, se obtiene (2.12). Con lo que queda demostrado el lema. ■

La identidad que sigue a continuación será utilizada posteriormente en varias ocasiones. A pesar de lo confusa que puede parecer en su formulación, por el exceso de índices que intervienen en la misma, su demostración es atractiva. En ella intervienen las funciones especiales Gamma ($\Gamma(x)$) y Beta ($\beta(a, b)$), (ver [66], Capítulo 2, páginas 8-19) por lo que es conveniente recordar que:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} \, t^{x-1} \, dt \, , \quad \text{para } x > 0, \tag{2.13}$$

$$\beta(a, b) := \int_0^1 t^{a-1} \, (1-t)^{b-1} \, dt \, , \quad \text{para } 0 \, < \, a, \, b \, . \tag{2.14}$$

Y se cumple que

$$\Gamma(x+1) = x \, \Gamma(x) \, , \tag{2.15}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{para } n \in I\!N, \tag{2.16}$$

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a) \, \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \, . \tag{2.17}$$

Como se dijo anteriormente el siguiente lema es fundamental para el trabajo posterior.

Lema 2.2 *Sea $d \in \mathbb{Z}_+$ fijo. Para todo $i, j, \nu \in \mathbb{Z}_+$ tales que $i, j > d$ y $0 \leq \nu \leq d$ se cumple que:*

$$\sum_{k=\nu}^{d} \frac{(-1)^{d-k}}{(k-\nu)!(d-k)!} \frac{i+j-2k}{(i-k)(j-k)} \frac{(i+j-k-d-1)!}{(i+j-k-\nu)!} = \frac{(i-d-1)!\,(j-d-1)!}{(i-\nu)!\,(j-\nu)!} .$$

Demostración.- Primeramente, probemos que la identidad del Lema 2.2 se cumple para $\nu = 0$; es decir:

$$\sum_{k=0}^{d} \frac{(-1)^{d-k}}{k!\,(d-k)!} \left(\frac{1}{i-k} + \frac{1}{j-k} \right) \frac{(i+j-k-d-1)!}{(i+j-k)!} = \frac{(i-d-1)!\,(j-d-1)!}{i!\,j!} . \tag{2.18}$$

Denotemos

$$r_i(i+j,d) := \sum_{k=0}^{d} \frac{(-1)^{d-k}}{k!(d-k)!} \frac{1}{i-k} \frac{(i+j-k-d-1)!}{(i+j-k)!} .$$

De (2.16) y (2.17) tendremos que:

$$\begin{aligned} r_i(i+j,d) &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)} \sum_{k=0}^{d} \frac{(-1)^{d-k}}{i-k} \binom{d}{k} \frac{\Gamma(i-k+j-d)\Gamma(d+1)}{\Gamma(i-k+j+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)} \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} \binom{d}{k} \frac{1}{i-k} \beta(i-k+j-d, d+1) . \end{aligned}$$

Usando ahora (2.14), llegamos a que:

$$\begin{aligned} r_i(i+j,d) &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)} \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} \binom{d}{k} \int_0^1 \frac{x^{i-k}}{i-k} x^{j-d-1} (1-x)^d dx \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)} \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} \binom{d}{k} \int_0^1 x^{j-d-1}(1-x)^d \left[\int_0^x t^{i-k-1} dt \right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)} \int_0^1 x^{j-d-1}(1-x)^d \left[\int_0^x t^{i-d-1} \left(\sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} \binom{d}{k} t^{d-k} \right) dt \right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)} \int_0^1 x^{j-d-1}(1-x)^d \left[\int_0^x t^{i-d-1}(1-t)^d dt \right] dx . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Análogamente,

$$r_j(i+j,d) = \frac{1}{\Gamma^2(d+1)} \int_0^1 t^{i-d-1}(1-t)^d \left[\int_0^t x^{j-d-1}(1-x)^d dx \right] dt . \tag{2.20}$$

Entonces, las fórmulas (2.19) y (2.20) (después de intercambiar las integrales en (2.20)) nos permiten escribir el lado izquierdo de la identidad del Lema 2.18 como:

$$\begin{aligned} r_i(i+j,d)+r_j(i+j,d) &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)}\left[\int_0^1 x^{j-d-1}(1-x)^d\int_0^x t^{i-d-1}(1-t)^d dtdx + \right. \\ &\left. + \int_0^1 x^{j-d-1}(1-x)^d\int_x^1 t^{i-d-1}(1-t)^d dtdx\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)}\left[\int_0^1 x^{j-d-1}(1-x)^d\right]\left[\int_0^1 t^{i-d-1}(1-t)^d\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)}\beta(j-d,d+1)\beta(i-d,d+1) \\ &= \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(i-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(i+1)}\,, \end{aligned}$$

lo que prueba la identidad del Lema 2.2 para $\nu=0$.

Sea ahora $\nu\in\{1,2,\ldots,d\}$, el cambio $k=\overline{k}+\nu$, $d=\overline{d}+\nu$, $i=\overline{i}+\nu$, $j=\overline{j}+\nu$ permite reducir el lado izquierdo de la expresión del Lema 2.2 al caso ya estudiado. Es decir, el lado izquierdo de la expresión del Lema 2.2 es igual a:

$$\sum_{\overline{k}=0}^{\overline{d}}\frac{(-1)^{\overline{d}-\overline{k}}}{\overline{k}!(\overline{d}-\overline{k})!}\frac{\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}}{(\overline{i}-\overline{k})(\overline{j}-\overline{k})}\frac{(\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}-\overline{d}-1)!}{(\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})!}=\frac{(\overline{i}-\overline{d}-1)!(\overline{j}-\overline{d}-1)!}{\overline{i}!\overline{j}!} \tag{2.21}$$

con $\overline{i}$, $\overline{j}>\overline{d}$, lo que es equivalente a la expresión de la derecha en la identidad del Lema 2.2 y con ello concluye la demostración. ■

§ II.4 Matrices de Hankel-Sobolev.

En el próximo resultado, se obtienen las condiciones bajo las cuales una matriz infinita $\mathcal{M}$ verifica (2.9).

Teorema 2.2 *Sea $\mathcal{M}=(s_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ una matriz infinita real. Una condición necesaria y suficiente para que existan matrices infinitas de Hankel $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, $\ldots,\mathcal{M}_d$ que cumplan la descomposición* (2.9) *es que:*

$$\left.\begin{array}{rcll} s_{i,j} &=& \sum_{k=0}^{d}\alpha_k(i,j)s_{k,i+j-k} & ,\ \forall i,j\in I\!N\,,\ i,j>d, \\ s_{i,j} &=& s_{j,i} & ,\ \forall i,j=0,1,\ldots\,, \end{array}\right\} \tag{2.22}$$

donde

$$\alpha_k(i,j) := \frac{(-1)^{d-k}\,(i+j-2k)\,(i+j-k-d-1)!\,i!\,j!}{k!\,(d-k)!\,(i-k)\,(j-k)\,(i+j-k)!\,(i-d-1)!\,(j-d-1)!} \tag{2.23}$$

Demostración.- Primeramente probaremos que la condición (2.22) es necesaria. Como las matrices de Hankel $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_d$ son simétricas, de (2.9) tendremos que $\mathcal{M}$ es una matriz simétrica y la segunda parte de (2.22) se cumple. Además, si (2.9) se cumple con $\mathcal{M}_k = \left(m_{i,j}^k\right)$, $i,j = 0,1,\ldots$, para cada $k = 0,1,\ldots,d$, entonces como $\mathcal{M}_k$ es una matriz de Hankel existe una sucesión de números $\{m_{k,p}\}$, $p = 0,1,\ldots$, tal que $m_{i,j}^k = m_{k,p}$ cuando $i+j = p$. Por la definición de los números $m_{k,p}$, se tiene en virtud de (2.9) que (2.8) se cumple para todo $s_{i,j}$. En particular, para cada $k = 0,1,\ldots,d$ fijo y $i,j \geq d$,

$$s_{k,i+j-k} = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{k!}{(k-\nu)!}\frac{(i+j-k)!}{(i+j-k-\nu)!} m_{\nu,i+j-2\nu}\,. \tag{2.24}$$

Además, de (2.8), el Lema 2.2 y (2.23), para $i,j > d$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
s_{i,j} &= \sum_{\nu=0}^{d} \frac{i!}{(i-\nu)!}\frac{j!}{(j-\nu)!} m_{\nu,i+j-2\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{d} \frac{i!}{(i-d-1)!}\frac{j!}{(j-d-1)!} m_{\nu,i+j-2\nu}\left[\frac{(i-d-1)!(j-d-1)!}{(i-\nu)!(j-\nu)!}\right] \\
&= \sum_{\nu=0}^{d} \frac{i!}{(i-d-1)!}\frac{j!}{(j-d-1)!} m_{\nu,i+j-2\nu} \\
&\quad \cdot \left[\sum_{k=\nu}^{d} \frac{(-i)^{d-k}}{(k-\nu)!(d-k)!}\frac{i+j-2k}{(i-k)(j-k)}\frac{(i+j-k-d-1)!}{(i+j-k-\nu)!}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{d} \frac{i!}{(i-d-1)!}\frac{j!}{(j-d-1)!}\frac{(-1)^{d-k}}{(d-k)!}\frac{i+j-2k}{(i-k)(j-k)}\frac{(i+j-k-d-1)!}{k!(i+j-k)!} \\
&\quad \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{k} m_{\nu,i+j-2\nu}\frac{k!}{(k-\nu)!}\frac{(i+j-k)!}{(i+j-k-\nu)!}\right].
\end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta la definición (2.23) de α_k tenemos

$$s_{i,j} = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k(i,j) \sum_{\nu=0}^{k} \frac{k!}{(k-\nu)!}\frac{(i+j-k)!}{(i+j-k-\nu)!} m_{\nu,i+j-2\nu}\ ,\ i,j > d\,.$$

Usando (2.24) llegamos a (2.22).

Ahora, demostraremos que la condición (2.22) es suficiente. Definamos las matrices de Hankel $\mathcal{M}_k = \left(m^k_{l,n}\right)$ para $k = 0, 1, \ldots, d$, donde $m^k_{l,n} = m_{k,j}$ si $l + n = j$ y $m_{k,j}$ se define como:

$$m_{k,j} := \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^{k-\nu}}{\nu!(k-\nu)!} \frac{(j+2k-2\nu)(j+k-\nu-1)!}{(j+2k-\nu)!} s_{\nu,j+2k-\nu} \, . \tag{2.25}$$

Nuestro propósito es probar que (2.22) se cumple, para ello tomemos:

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \sum_{k=0}^{d} \mathcal{D}_k \mathcal{M}_k {\mathcal{D}_k}^t \, . \tag{2.26}$$

Si $\widetilde{\mathcal{M}} = (\widetilde{s}_{i,j})$, de (2.26) obtenemos

$$\widetilde{s}_{i,j} = \sum_{k=0}^{\delta} \frac{i!}{(i-k)!} \frac{j!}{(j-k)!} m_{k,i+j-2k} \ , \ i, j = 0, 1, \ldots \, , \tag{2.27}$$

donde $\delta = \min\{i, j, d\}$. Usando la expresión para $m_{k,i+j-2k}$ dada en (2.25) y sustituyendo en (2.26), encontramos que

$$\begin{aligned} \widetilde{s}_{i,j} &= \sum_{k=0}^{\delta} \frac{i!}{(i-k)!} \frac{j!}{(j-k)!} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^{k-\nu}}{\nu!(k-\nu)!} \frac{(i+j-2\nu)(i+j-k-\nu-1)!}{(i+j-\nu)!} s_{\nu,i+j-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\delta} \frac{i!j!(i+j-2\nu)}{\nu!(i+j-\nu)!} \sum_{k=\nu}^{\delta} \frac{(-1)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \frac{(i+j-k-\nu-1)!}{(i-k)!(j-k)!} s_{\nu,i+j-\nu} \, . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ahora debemos probar que $\widetilde{s}_{i,j} = s_{i,j}$, $i, j = 0, 1, \ldots$. Como $\mathcal{M}$ es una matriz simétrica (ver (2.22)) es suficiente suponer que $i \leq j$. Primeramente, si $i \leq d$ tenemos $\delta = i$ y

$$\widetilde{s}_{i,j} = s_{i,j} + \sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{i!j!(i+j-2\nu)}{\nu!(i+j-\nu)!} \sum_{k=\nu}^{i} \frac{(-1)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \frac{(i+j-k-\nu-1)!}{(i-k)!(j-k)!} s_{\nu,i+j-\nu}.$$

En virtud de (2.12) en el Lema 2.1, obtenemos

$$\widetilde{s}_{i,j} = s_{i,j} \, . \tag{2.29}$$

Por el contrario, si $d < i$ de (2.22) y (2.27), ya que $\widetilde{s}_{k,i+j-k} = s_{k,i+j-k}$ para $k \leq d$ (ver (2.29)), se tiene:

$$\begin{aligned}
s_{i,j} &= \sum_{k=0}^{d} \alpha_k(i,j)\widetilde{s}_{k,i+j-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{d} \alpha_k(i,j) \sum_{\nu=0}^{k} \frac{k!(i+j-k)!}{(k-\nu)!(i+j-k-\nu)!} m_{\nu,i+j-2\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{d} \left(\sum_{k=\nu}^{d} \alpha_k(i,j) \frac{k!(i+j-k)!}{(k-\nu)!(i+j-k-\nu)!} \right) m_{\nu,i+j-2\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{d} \frac{i!}{(i-d-1)!} \frac{j!}{(j-d-1)!} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{k=\nu}^{d} \frac{(-1)^{d-k}}{(d-k)!} \frac{i+j-2k}{(i-k)(j-k)} \frac{(i+j-k-d-1)!}{(i+j-k-\nu)!(k-\nu)!} \right) m_{\nu,i+j-2\nu} \,.
\end{aligned}$$

Así, del Lema 2.2 obtenemos

$$s_{i,j} = \sum_{\nu=0}^{d} \frac{i!}{(i-\nu)!} \frac{j!}{(j-\nu)!} m_{\nu,i+j-2\nu} \,,$$

que es $\widetilde{s}_{i,j}$ por (2.27). ■

Notemos que si $\mathcal{M}$ es una matriz infinita (no necesariamente de momentos), para la que es posible encontrar una descomposición del tipo (2.9) en término de $d+1$ matrices de Hankel $(\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_d)$, entonces: dicha descomposición es única (Teorema 2.1) y $\mathcal{M}$ es una matriz simétrica con elementos reales. En el caso $d = 0$, obviamente esta afirmación es trivial y $\mathcal{M}$ es de Hankel. Además, aplicando el Lema 2.2 para $\nu = 0$ puede verse que:

$$\sum_{k=0}^{d} \alpha_k(i,j) = 1$$

para cada par de índices (i,j). Es decir, por el Teorema 2.2 conocemos que es posible escribir cada elemento $s_{i,j}$ de una antidiagonal como la combinación lineal (2.22) de los primeros $d+1$ elementos en esa antidiagonal, $s_{0,i+j}, s_{1,i+j-1}, \ldots, s_{d,i+j-d}$. En otras palabras, estas matrices generalizan el concepto de *matriz de Hankel* y en concordancia introducimos el siguiente concepto:

Definición 2.2 *Llamaremos* **matriz de Hankel-Sobolev** *a toda matriz simétrica infinita real cuyos elementos* $\{s_{i,j}\}$ *satisfacen las relaciones* (2.22) – (2.23).

Luego, el Teorema 2.2 da una caracterización de las matrices de Hankel-Sobolev.

El siguiente resultado es una consecuencia de la demostración de la suficiencia del Teorema 2.2 y del Teorema 2.1.

Corolario 2.1 *Supongamos que* $\mathcal{M} = (s_{i,j})$ *admite una descomposición de la forma* (2.9)*, entonces para cada* $k = 0, \ldots, d$*, la sucesión* $\{m_{k,j}\}$, $j = 0, 1, \ldots$, *que determina la matriz de Hankel* $\mathcal{M}_k = \left(m_{l,n}^k\right)$ *donde* $m_{l,n}^k = m_{k,j}$, *si* $l + n = j$ *está dada para* $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_d$ *por la fórmula*

$$m_{k,j} := \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^{k-\nu}}{\nu!(k-\nu)!} \frac{(j+2k-2\nu)(j+k-\nu-1)!}{(j+2k-\nu)!} s_{\nu,j+2k-\nu} \,. \tag{2.30}$$

Demostración.- En efecto, si existen matrices $(\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_d)$ tales que $\mathcal{M}$ tiene una descomposición de tipo (2.9), entonces (2.22) se cumple. En este caso, en la demostración del Teorema 2.2, se probó que $\mathcal{M}$ también satisface (2.9) para $\widetilde{\mathcal{M}}_0, \ldots, \widetilde{\mathcal{M}}_d$, donde $\widetilde{\mathcal{M}}_k = \left(m_{l,n}^k\right)$ y

$$m_{l,n}^k = m_{k,j} = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^{k-\nu}}{\nu!(k-\nu)!} \frac{(j+2k-2\nu)(j+k-\nu-1)!}{(j+2k-\nu)!} s_{\nu,j+2k-\nu} \;, \quad \text{si } m+n = j \,.$$

Pero de acuerdo al Teorema 2.1 la descomposición de $\mathcal{M}$ en la forma (2.9) es única, así $\mathcal{M}^k = \widetilde{\mathcal{M}}^k$ y los elementos de $\mathcal{M}^k$ están dados por la fórmula (2.25), es decir (2.30). ∎

§ II.5 Condiciones necesarias y/o suficientes.

Sean $\{s_{i,j}\}$, $i, j = 0, 1, \ldots$, una sucesión de números complejos y $d \in \mathbb{Z}_+$ fijo. Ahora estudiaremos bajo qué condiciones, para un sistema de conjuntos dados $(\Delta_0, \Delta_1, \ldots \Delta_d)$, $\Delta_k \subset \mathbb{R}$ con $k = 0, 1, \ldots, d$, el S-problema de momentos tiene solución y bajo qué condiciones ésta es única.

Teorema 2.3 *Dado* $(\mathcal{M}; \Delta_0, \ldots, \Delta_d)$ *el problema de momentos de Sobolev está definido (determinado) si y solo si*

i) $\mathcal{M}$ *es una Matriz de Hankel-Sobolev.*

ii) *Para cada $k = 0, 1, \ldots, d$, el problema de momentos ordinarios* $(\mathcal{M}_k; \Delta_k)$ *está definido (determinado), donde $\mathcal{M}_k = (m_{k,j})$ está dada por* (2.30) *del Corolario* 2.1.

Demostración.- Supongamos que el S-problema de momentos está definido. Como vimos anteriormente en la sección § II.2, la descomposición (2.9) se cumple cuando $\mathcal{M}_k$ es la matriz de momentos asociada a la medida μ_k. Así, por el Teorema 2.2, (2.22) se cumple y el Corolario 2.1 afirma que los momentos de $\mathcal{M}^k$ están dados por (2.30), o lo que es igual por (2.25). Luego el problema de momentos ordinario asociado a $(\mathcal{M}_k; \Delta_k)$ estará definido para cada $k = 0, \ldots, d$. Si para algún k el problema de momentos $(\mathcal{M}_k; \Delta_k)$ está indeterminado, entonces obviamente el S-problema de momentos está indeterminado porque tendríamos dos medidas μ_k, $\widetilde{\mu}_k$ con la misma matriz de momentos $\mathcal{M}_k$ sin afectar las relaciones (2.8) (equivalente a (2.9)) y así (2.7) se cumplirá para el conjunto de medidas $(\mu_0, \ldots, \mu_k, \ldots, \mu_d)$ y $(\mu_0, \ldots, \widetilde{\mu}_k, \ldots, \mu_d)$. Con lo que se establece la necesidad.

Recíprocamente, si (2.22) se cumple, entonces se cumple la descomposición (2.9). Si para cada $k = 0, \ldots, d$ el problema de momentos $(\mathcal{M}_k; \Delta_k)$ está definido, entonces existen medidas $\mu_0, \ldots, \mu_d$ cuyas matrices de momentos son $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_d$ respectivamente. Entonces los elementos $s_{i,j}$ de $\mathcal{M}$ y los de las matrices de Hankel $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_d$ están relacionados mediante (2.8) (equivalente a (2.9)) de donde se tiene (2.7). Es decir, el S-problema de momentos está definido. Supongamos que el S-problema de momentos no es determinado. Entonces existen dos conjuntos de medidas

$$\begin{array}{cc} (\mu_0,\, \mu_1,\, \ldots\, ,\, \mu_d) & (\widetilde{\mu}_0,\, \widetilde{\mu}_1,\, \ldots\, ,\, \widetilde{\mu}_d) \\ Sop\ \ \mu_k \subset \Delta_k\ ;\ k = 0,\, 1, \ldots, d & Sop\ \ \widetilde{\mu}_k \subset \Delta_k\ ;\ k = 0,\, 1, \ldots, d\,, \end{array}$$

cuyas respectivas matrices de Hankel $(\mathcal{M}_0,\, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_d)$ y $(\widetilde{\mathcal{M}}_0,\, \widetilde{\mathcal{M}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{M}}_d)$ están relacionadas con $\mathcal{M}$ a travéz de (2.9). De acuerdo con el Teorema 2.1 $\mathcal{M}_k = \widetilde{\mathcal{M}}_k$, $k = 0, \ldots, d$. Pero al menos para algún k, $\mu_k \neq \widetilde{\mu}_k$, con $Sop\ \ \mu_k \subset \Delta_k$ y $Sop\ \ \widetilde{\mu}_k \subset \Delta_k$. Esto significa que el problema de momentos ordinario asociado a $(\mathcal{M}_k; \Delta_k)$ está indeterminado. Con esto concluye la demostración. ■

Notemos que de acuerdo con el Teorema 2.2 son equivalentes (2.22)-(2.23) y (2.9). Por otro lado, del Corolario 2.1 se tiene que bajo (2.9) los elementos

$m_{0,n}^{k} = m_{k,n}$ de la primera fila de la matriz de Hankel $\mathcal{M}_k$ vienen dados por la fórmula (2.30). Luego si sustituimos i) en el Teorema 2.3 por la condición de que $\mathcal{M}$ admita una descomposición de tipo (2.9), se obtiene una formulación equivalente del mismo.

Destaquemos además la generalidad del resultado anterior, es decir hemos establecido la interdependencia entre la solubilidad del problema de momentos de Sobolev y la de $d+1$ problemas de momentos ordinários en forma simultánea. En el resto de la sección analizaremos varias consecuencias del mismo. Para ello definamos para todo $n \in I\!N$ los determinantes:

$$\mathcal{H}_{k,n} := \begin{vmatrix} m_{k,0} & m_{k,1} & \cdots & m_{k,n-1} \\ m_{k,1} & m_{k,2} & \cdots & m_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k,n-1} & m_{k,n} & \cdots & m_{k,2n-2} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{H}_{k,n}^{(\prime)} := \begin{vmatrix} m_{k,1} & m_{k,2} & \cdots & m_{k,n} \\ m_{k,2} & m_{k,3} & \cdots & m_{k,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k,n} & m_{k,n+1} & \cdots & m_{k,2n-1} \end{vmatrix}$$

donde $m_{k,i}$, $i = 0, 1, \dots$, está dado por (2.25). Los resultados siguientes resultan de combinar el Teorema 2.3 y teoremas clásicos de la teoría de momentos.

Corolario 2.2 *Dada la matriz infinita $\mathcal{M}$, el problema de momentos de Sobolev-Hamburger asociado a $\mathcal{M}$ está definido si y solo si*

i) *$\mathcal{M}$ es una Matriz de Hankel-Sobolev.*

ii) *Para cada $k \in \{0, 1, \dots, d\}$,*

$$\mathcal{H}_{k,n} > 0 \text{ para todo } n = 1, 2, \dots$$

o para algún $m \in I\!N$ se tiene que:

$$\mathcal{H}_{k,1}, \mathcal{H}_{k,2}, \dots, \mathcal{H}_{k,m} > 0\,,\ \mathcal{H}_{k,j} = 0 \text{ para todo } j = m+1, m+2, \dots.$$

Demostración.- La demostración es una consecuencia inmediata del Teorema 2.3 y la condición clásica para la determinación del problema de momentos de Hamburger (ver [76], Teorema 1.2, página 5). ■

Corolario 2.3 *Un S-problema de momentos definido tiene solución con*

$$Sop\,\mu_k \subset [0, +\infty)$$

para algún $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ si y solo si o bien

$$\mathcal{H}_{k,n} > 0 \ , \ \ \mathcal{H}^{(\prime)}_{k,n} > 0 \ \ \textit{para todo } n = 0, 1, \ldots$$

o para algún $m \in I\!N$ se tiene que:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{H}_{k,n} > 0 \ , \ \mathcal{H}^{(\prime)}_{k,n} > 0 & \textit{para} & n = 0, 1, \ldots, m \quad y \\ \mathcal{H}_{k,n} = \mathcal{H}^{(\prime)}_{k,n} = 0 & \textit{para} & n = m+1, \ldots . \end{array}$$

Demostración.- Al igual que en el corolario anterior, aquí la demostración es una consecuencia inmediata del Teorema 2.3 y la condición clásica para la determinación del problema de momentos de Stieltjes (ver [76], Teorema 1.3, página 6). ■

Corolario 2.4 *Un Problema de Momentos de Sobolev definido tiene solución con $Sop\,\mu_k \subset [\alpha, \beta]$ para algún $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ si y solo si:*

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} m_{k,i+j}\, x_i\, x_j \quad y \quad \sum_{i,j=0}^{\infty} \left[(\alpha+\beta)\, m_{k,i+j-1} - \alpha\,\beta\, m_{k,i+j} - m_{k,i+j-2}\right] x_i\, x_j$$

son dos formas cuadráticas no negativas.

Demostración.- En efecto, la prueba es una consecuencia del Teorema 2.3 y el Teorema 2.5 de [38] página 64. Aclaremos que se entiende por no negatividad de una forma infinita $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}\, x_i\, x_j$ que para todo $n \in I\!N$ la forma $\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}\, x_i\, x_j$ es no negativa. ■

Acerca de la determinación del S-problema de momentos, se tiene que:

Corolario 2.5 *Un S-problema de momentos definido $(\mathcal{M}; \Delta_0, \ldots, \Delta_d)$ donde cada conjunto Δ_k, $k = 0, \ldots, d$, es un intervalo acotado de la recta real, está determinado.*

Demostración.- Como en resultados anteriores este corolario se obtiene del Teorema 2.3 combinado ahora con el Teorema 2.6.4 de [3], páginas 74-75. ■

Corolario 2.6 *Un SH-problema de momentos definido, está determinado si para cada* $i = 0, \ldots, d$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |m_{k,2n}|^{-1/2n} = \infty. \tag{2.31}$$

En particular, esto es cierto si:

$$\sum_{n=d}^{\infty} |s_{d,2n-d}|^{-1/2n} = \infty. \tag{2.32}$$

Demostración.- Por (2.31), se tiene que la condición suficiente de Carleman para que un problema de momentos definido esté determinado se cumple para cada $(\mathcal{M}_k, \Delta_k)$, $k = 0, \ldots, d$. Entonces por el Teorema 2.3, el problema de momentos de Sobolev está determinado.

De (2.8) se ve que:

$$s_{d,2n-d} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d!}{(d-k)!} \frac{(2n-d)!}{(2n-d-k)!} m_{k,2n-2k}, \qquad n = d,\, d+1,\, \ldots.$$

Como los términos del lado derecho de la igualdad anterior son todos positivos, se tiene que:

$$m_{k,2n-2k} \leq s_{d,2n-d}, \qquad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, d.$$

Por consiguiente, utilizando (2.32), se tienen que para cada $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, d$

$$\infty = \sum_{n=d}^{\infty} |s_{d,2n-d}|^{-1/2n} \leq \sum_{n=d}^{\infty} |m_{k,2n-2k}|^{-1/2n},$$

lo que implica (2.31). ■

§ II.6 Relación de recurrencia y matrices de Hankel-Sobolev.

En lo adelante, se supone que el problema de momentos de Sobolev $(\mathcal{M}; \Delta_0, \ldots, \Delta_d)$ está definido. Sea entonces $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d)$ una solución de dicho problema. Supongamos adicionalmente que *Sop* μ_k para algún $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ es un conjunto infinito.

Consideremos entonces el producto de Sobolev $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ asociado a dicha solución y denotemos por $\mathcal{M}_n$ la n-ésima sección principal de la matriz $\mathcal{M}$ formada por los S-momentos

$$s_{i,j} = \langle z^i, z^j \rangle_S \, , \, i, j = 0, \ldots, n-1 \, .$$

De la definición de producto de Sobolev (2.6) y como $\bigcup_{i=0}^{d} Sop \ \mu_i$ contiene una cantidad infinita de puntos, es obvio que $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle_S$ define una forma cuadrática real definida positiva sobre el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a $n-1$. Luego su representación matricial, $\mathcal{M}_n$, en la base $\{1, z, \ldots, z^{n-1}\}$ es una matriz real definida positiva. En particular, por el Teorema de Sylvester, para cada $n \in I\!N$, tendremos que $Det(\mathcal{M}_n) > 0$ (aquí y en lo sucesivo $Det(\mathcal{W})$ denota el determinante de la matriz $\mathcal{W}$). Esto nos garantiza la existencia de solución única, $(a_{n,0}, \, a_{n,1}, \, \ldots, \, a_{n,n-1})$, para el sistema lineal de ecuaciones:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} \, \langle x^k, x^i \rangle_S = -\langle x^n, x^i \rangle_S \, , \, i = 0, 1, \ldots, n-1 \, .$$

En otras palabras existe un único polinomio mónico Q_n de grado n,

$$Q_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} \, x^k \, ,$$

tal que

$$\langle Q_n, x^i \rangle_S = 0 \, , \, i = 0, 1, \ldots, n-1 \, .$$

Entonces $\{Q_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, es la sucesión de polinomios ortogonales (mónicos) con respecto al producto interior dado por (2.6). Nótese que por ejemplo $Q_0(x) = 1$ y $Q_1(x) = x - \frac{s_{1,0}}{s_{0,0}}$.

Sea $\|Q_j\|_S = (\langle Q_j, Q_j \rangle_S)^{1/2}$, $j = 0, 1, \ldots$. Podemos entonces introducir la sucesión $\{q_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, de polinomios ortonormales,

$$q_n(z) = \frac{Q_n(z)}{\|Q_n\|_S} \, , \, n = 0, 1, \ldots \, .$$

donde claramente $q_0(z) = \frac{1}{s_{0,0}}$.

Escribamos ahora el polinomio $zq_{n-1}(z)$ en la siguiente forma

$$zq_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n} \langle zq_{n-1}, q_j \rangle_S \; q_j(z) \quad n \geq 1. \tag{2.33}$$

La fórmula anterior establece una relación de recurrencia que nos permite calcular los elementos de la sucesión de polinomios ortonormales $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ a partir de q_0. En el caso particular $d = 0$, (2.33) es la conocida relación de recurrencia a tres términos para los polinomios ortogonales usuales. Aquí, la relación tiene una cantidad de términos que crece con n. ni siquiera un número finito de términos.

Sea ahora $\mathcal{R}$ la matriz de Hessenberg

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \langle zq_0, q_0\rangle_S & \langle zq_1, q_0\rangle_S & \langle zq_2, q_0\rangle_S & \cdots \\ \langle zq_0, q_1\rangle_S & \langle zq_1, q_1\rangle_S & \langle zq_2, q_1\rangle_S & \cdots \\ & \langle zq_1, q_2\rangle_S & \langle zq_2, q_2\rangle_S & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

y denotemos por $\mathcal{R}_m$, $m = 1, 2, \ldots$, a la m-ésima sección principal de $\mathcal{R}$ y por $\mathcal{R}_m^t$ la transpuesta de $\mathcal{R}_m$. La relación (2.33) escrita en forma matricial se expresa como

$$(\mathcal{R}_m^t - z\mathcal{I}_m)\overline{q}_m(z) = -\langle zq_{m-1}, q_m\rangle_S\, q_m(z)\, \overline{e}_m \tag{2.35}$$

donde $\mathcal{I}_m$ es la matriz identidad de orden m,

$$\overline{q}_m(z)^t = (q_0(z),\, q_1(z), \ldots,\, q_{m-1}(z)) \quad \text{y} \quad \overline{e}_m^t = (0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 1),\, \overline{e}_m \in \mathbb{R}^m\,.$$

Luego de inmediato se cumple que:

Lema 2.3 *Cada cero $\lambda \in \mathbb{C}$ de q_m es un valor propio de $\mathcal{R}_m^t$ y $\overline{q}_m(\lambda)$ es un vector propio asociado al mismo, es decir*

$$\sigma(\mathcal{R}_m) \supset \{\lambda \,:\, q_m(\lambda) = 0\}\,. \tag{2.36}$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $q_m(\lambda) = 0$, evaluando (2.35) en λ se obtiene que:

$$(\mathcal{R}_m^t - \lambda\mathcal{I}_m)\overline{q}_m(\lambda) = 0\,,$$

Con lo que se tiene la afirmación del Lema y (2.36) es consecuencia de que tanto $\mathcal{R}_m^t$ como $\mathcal{R}_m$ tienen los mismos valores propios. Luego los ceros de q_m son también valores propios de $\mathcal{R}_m$. ■

Para cada $n = 1, 2, \dots$, $\mathcal{M}_n$ es una matriz simétrica definida positiva; por tanto, existe una única factorización de Cholesky:

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{T}_n \mathcal{T}_n^t \tag{2.37}$$

(ver [41]). Es fácil ver que la sección n de $\mathcal{T}_{n+1}$ es $\mathcal{T}_n$. Luego pódemos construir una matriz triangular infinita $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t_{0,0} & & & & \\ t_{1,0} & t_{1,1} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ t_{i,0} & t_{i,1} & \cdots & t_{i,i} & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

$t_{i,j} \in I\!R$, $i, j = 0, 1, \dots$ y $t_{i,i} > 0$, $i = 0, 1, \dots$, cuya sección principal n-ésima es $\mathcal{T}_n$.

Teorema 2.4 *Para cada $n = 1, 2, \dots$ se tiene que:*

i)

$$\mathcal{T}_n \begin{pmatrix} q_0(z) \\ q_1(z) \\ \vdots \\ q_{n-1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{pmatrix}, \ \textit{para todo } z \in \mathbb{C} \tag{2.39}$$

ii) $\mathcal{R}_n = \mathcal{T}_n^{-1} \mathcal{M}'_n \mathcal{T}_n^{t-1}$, *donde* $\mathcal{M}'_n$ *es la n-ésima sección principal de la matriz infinita*

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} s_{0,1} & s_{0,2} & \cdots \\ s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

que se obtiene eliminando la primera columna de $\mathcal{M}$.

Demostración.-

i) Sea $z^m = \sum_{k=0}^{m} \beta_{mk}\, q_k(z)$, $m = 0, 1, \dots$. Nótese que $\beta_{m,m} > 0$, para todo $m = 0, 1, \dots$. Entonces

$$s_{i,j} = \langle z^i, z^j \rangle_S = \sum_{k=0}^{i} \sum_{r=0}^{j} \beta_{ik}\, \beta_{jr}\, \langle q_k, q_r \rangle_S$$

donde $\langle q_k, q_r \rangle_S = \delta_{k,r}$, $k, r = 0, 1, \ldots$. Así

$$s_{i,j} = \sum_{k=0}^{\min\{i,j\}} \beta_{ik}\, \beta_{jk}.$$

Por otra parte, de (2.37) y (2.38) obtenemos que:

$$s_{i,j} = \sum_{k=0}^{\min\{i,j\}} t_{i,k}\, t_{j,k}.$$

Así, por la unicidad de la factorización de Cholesky (2.37), tendremos que $\beta_{ik} = t_{i,k}$, $i, k = 0, 1, \ldots$. Es decir,

$$z^i = \sum_{k=0}^{i} t_{i,k} q_k(z) \ , \ i = 0, 1, \ldots ,$$

lo que es equivalente a (2.39).
$ii)$ Si

$$q_i(z) = \sum_{h=0}^{i} \kappa_{i,h}\, z^h \ , \ i = 0, 1, \ldots .$$

De (2.39) tenemos que:

$$\mathcal{T}_n^{-1} = \begin{pmatrix} \kappa_{0,0} & & & \\ \kappa_{1,0} & \kappa_{1,1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \kappa_{n-1,0} & \kappa_{n-1,1} & \cdots & \kappa_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, para cualquier $j \in \{0, 1, \ldots\}$ fijo,

$$z q_j(z) = \sum_{r=0}^{j} \kappa_{j,r}\, z^{r+1} .$$

Sea $n \geq i, j$. El elemento (i, j) de $\mathcal{R}_n$ dado por $\langle z q_j, q_i \rangle$ (ver (2.34)) satisface

$$\langle q_i, z q_j \rangle_S = \sum_{h=0}^{i} \sum_{r=0}^{j} \kappa_{i,h}\, \kappa_{j,r}\, \langle z^h, z^{r+1} \rangle_S = \sum_{h=0}^{i} \sum_{r=0}^{j} \kappa_{i,h}\, \kappa_{j,r}\, s_{r+1,h} .$$

Por tanto, $\langle z q_j, q_i \rangle$ es el elemento (i, j) de la matriz $\mathcal{T}_n^{-1} \mathcal{M}'_n \mathcal{T}_n^{-1^t}$ para todo $n \geq i, j$. ■

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.4 se tiene la siguiente fórmula para los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev:

Corolario 2.7 *Sea $z_n \in \sigma(\mathcal{R}_n)$ y w_n un vector propio unitario asociado a z_n. Entonces*

$$z_n = \left\langle \mathcal{M}'_n \left(\mathcal{T}_n^{t^{-1}} w_n\right), \left(\mathcal{T}_n^{t^{-1}} w_n\right)\right\rangle .$$

Demostración.- En efecto, como $z_n \in \sigma(\mathcal{R}_n)$ y w_n es un vector propio unitario asociado, se tiene que $\mathcal{R}_n\, w_n = z_n\, w_n$ con $\|w_n\| = 1$. Luego

$$z_n = \langle \mathcal{R}_n\, w_n\, ,\, w_n\rangle = \langle \mathcal{T}_n{}^{-1} \mathcal{M}'_n \mathcal{T}_n^{t^{-1}}\, w_n\, ,\, w_n\rangle = \left\langle \mathcal{M}'_n \left(\mathcal{T}_n^{t^{-1}} w_n\right), \left(\mathcal{T}_n^{t^{-1}} w_n\right)\right\rangle .$$

Con esto queda demostrado el corolario. ■

Capítulo III

Localización de ceros y asintótica de la raíz n-ésima.

§ III.1 Introducción.

Como anteriormente, sea $\{\mu_k\}_{k=0}^d$, con $d \in \mathbb{N}$ fijo, un conjunto de $d+1$ medidas positivas. Supongamos, adicionalmente, que:

1. *Sop* $(\mu_k) = \Delta_k \subset \mathbb{R}$ y Δ_k compacto para todo $k = 0, 1, \ldots, d$.

2. Δ_0 contiene un conjunto infinito de puntos.

3. Las medidas $\{\mu_k\}_{k=0}^d$ son finitas y de Borel.

Consideremos ahora sobre el espacio de todos los polinomios $\mathbb{P}$, el producto interior de Sobolev asociado a las medidas $\{\mu_k\}_{k=0}^d$, que se define como en (2.6) mediante la expresión:

$$\langle p, q\rangle_S := \sum_{k=0}^{d} \int p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k(x) = \sum_{k=0}^{d} \langle p^{(k)}, q^{(k)}\rangle_{L_2(\mu_k)} \,, \tag{3.1}$$

donde p, q son polinomios y $f^{(k)}$ denota la k-ésima derivada de la función f.

Obviamente, (3.1) define un producto interior sobre el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de los polinomios. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, el sistema lineal de ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} \langle x^i, x^j\rangle_S = -\langle x^n, x^j\rangle_S \,, \;\; j = 0, 1, \ldots, n-1 \,,$$

tiene solución única $(a_{n,0},\, a_{n,1},\, \ldots\,,\, a_{n,n-1})$. Por lo tanto, existe una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a dicho producto. Como en la sección § $II.6$, denotaremos por Q_n al correspondiente polinomio ortogonal mónico de grado n, es decir:

$$\langle Q_n, x^j\rangle_S = 0\,,\; j = 0, 1, \ldots, n-1\,,\;\; Q_n(x) = x^n + a_{n,n-1}\, x^{n-1} + \,\ldots\, + a_{n,0}.$$

La sucesión $\{Q_n\}$ se llama *sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev* asociados a (3.1). Consideremos ahora la norma $\|\,.\,\|_S$, inducida por el producto interior (3.1) sobre $\mathbb{P}$, dada para cada $p \in \mathbb{P}$ mediante:

$$\|p\|_S := \left(\sum_{k=0}^{d} \int (p^{(k)})^2(x)\, d\mu_k(x)\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{d} \|p^{(k)}\|^2_{L_2(\mu_k)}\right)^{1/2}, \qquad (3.2)$$

y denotemos por q_n al polinomio ortonormal de grado n asociado a Q_n mediante la expresión:

$$q_n(z) = \frac{Q_n(z)}{\|Q_n\|_S}\,,\; n = 0, 1, \ldots\,. \qquad (3.3)$$

La sucesión $\{q_n\}$ se llama *sucesión de polinomios ortonormales de Sobolev* asociados a (3.1). Claramente para todo $n, m \in \mathbb{Z}_+$:

$$\langle q_n, q_m\rangle_S = \delta_{n,m}\,, \quad \text{donde} \quad \delta_{n,m} := \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m\,. \end{cases}$$

Además, si $q_n(x) = \kappa_{n,n}\, x^n + \kappa_{n,n-1}\, x^{n-1} + \,\ldots\, + \kappa_{n,0}$, nótese que $\kappa_{n,n} = \frac{1}{\|Q_n\|_S}$.

En contraste con el caso clásico de ortogonalidad con respecto a una medida, donde es fácil probar que los ceros de los polinomios ortogonales se encuentran en la envoltura convexa del soporte de la medida, la localización de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev en el plano complejo para productos de Sobolev generales resulta ser un problema de un mayor grado de dificultad.

La cuestión principal que se trata en este capítulo es el estudio de la localización de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev. Bajo hipótesis generales sobre las medidas que intervienen en el producto interior, se probará que los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev están contenidos en un subconjunto compacto del plano complejo. Para la realización de nuestro propósito se hará uso de los métodos de la Teoría de Operadores Acotados.

A partir de la sección § $III.6$, siguiendo las ideas de [27], se extienden algunos resultados de dicho trabajo para $d \geq 2$. Estas extensiones junto con los resultados de la sección § $III.4$ nos permitirán obtener el comportamiento asintótico de la raíz n-ésima de los polinomios ortogonales de Sobolev respecto a una clase amplia de productos interiores en la sección § $III.7$.

§ III.2 El espacio $\mathbb{H}_{2,d}$.

Como anteriormente, (3.1) define un producto interior sobre el espacio $\mathbb{P}$ de todos los polinomios. Denotemos ahora por $(\mathbb{H}_{2,d}, \|\cdot\|_S)$ el espacio de Banach obtenido al completar el espacio normado $(\mathbb{P}, \|\cdot\|_S)$. Como es usual, esto se hace identificando todas las sucesiones fundamentales o de Cauchy de polinomios cuya diferencia tiende a cero en la norma $\|\cdot\|_S$. Ciertamente, $\mathbb{H}_{2,d}$ depende fuertemente de las medidas involucradas en el producto interior de Sobolev, pero para simplificar la notación no lo indicaremos.

Para $f \in \mathbb{H}_{2,d}$, se define su norma $\|f\|_S$ por continuidad, es decir:

$$\|f\|_S := \lim_{n\to\infty} \|p_n\|_S \, , \tag{3.4}$$

donde $\{p_n\}$ es un representante de f. Nótese que por construcción de $\mathbb{H}_{2,d}$, $\|f\|_S$ no depende del representante escogido y la aplicación que a cada $f \in \mathbb{H}_{2,d}$ hace corresponder $\|f\|_S$ satisface los axiomas de norma. Además, para todo $f, g \in \mathbb{H}_{2,d}$ se cumple la identidad del paralelogramo, es decir:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right).$$

En consecuencia (ver [36], Capítulo III, página 172), sobre $\mathbb{H}_{2,d}$ podemos considerar el producto interior inducido por (3.4):

$$\langle f, g\rangle_S := \frac{1}{2}\left[\|f+g\|_S^2 - \|f\|_S^2 - \|g\|_S^2\right] \, , \; f, g \in \mathbb{H}_{2,d} \, . \tag{3.5}$$

Luego, $(\mathbb{H}_{2,d}, \langle\cdot,\cdot\rangle_S)$ es un espacio de Hilbert separable, ya que por construcción el espacio de todos los polinomios $\mathbb{P}$ es denso en él. En particular, se tiene que la sucesión $\{q_n\}$ de polinomios ortonormales de Sobolev ($\langle q_n, q_k\rangle_S = \delta_{n,k}$) forma una base completa en $(\mathbb{H}_{2,d}, \langle\cdot,\cdot\rangle_S)$ (es decir, el menor subespacio cerrado que la contiene es todo el $I\!\!H_{2,d}$). Esto último es equivalente a decir que se cumple la *Identidad de Parseval* (ver [36], Capítulo III, página 161):

$$\|f\|_S^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 \ , \ \alpha_k = \alpha_k(f) = \langle f, q_k \rangle_S \ , \ f \in I\!\!H_{2,d} \ . \tag{3.6}$$

Sea ahora la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \Lambda : & I\!\!H_{2,d} & \longrightarrow & \ell_2 \\ & f & \rightsquigarrow & \Lambda f := \{\alpha_k(f)\}_{k=0}^{\infty} \end{array}$$

donde ℓ_2 es el espacio de todas las sucesiones de números reales de cuadrado sumable. En virtud del Teorema de Riesz-Fischer (ver [36], Capítulo III, página 163), la aplicación Λ establece un isomorfismo isométrico entre $I\!\!H_{2,d}$ y ℓ_2. Nótese que Λ identifica cada elemento $f \in I\!\!H_{2,d}$ con la sucesión de sus coeficientes de Fourier. Así por ejemplo, al n-ésimo polinomio ortonormal de Sobolev q_n le corresponde el elemento e_n de ℓ_2, que tiene la coordenada $n+1$ igual a 1 y las restantes son cero.

Como la sucesión $\{q_n\}$ de polinomios ortonormales con respecto al producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ forma una base en el espacio de todos los polinomios, se tiene que para cada $n \in Z\!\!\!Z_+$

$$x\, q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n-1}\, q_k(x) \ , \tag{3.7}$$

donde

$$c_{k,n-1} = \langle x\, q_{n-1} \, , \, q_k \rangle \ , \quad k = 0, \ldots, n \ .$$

Para reescribir (3.7) en notación matricial como en (2.35), introduzcamos la matriz cuadrada de Hessenberg $\mathcal{R}_n$ de orden n (obsérvese que esta matriz es la n-ésima sección principal de la matriz $\mathcal{R}$ definida en (2.34)), dada por la expresión:

$$\mathcal{R}_n = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & \cdots & c_{0,n-2} & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} \\ 0 & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-2} & c_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2,n-2} & c_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1,n-2} & c_{n-1,n-1} \end{pmatrix} . \tag{3.8}$$

Como vimos en (2.35), la relación (3.7) para valores consecutivos de n se representa matricialmente como:

$$x\overline{q}_n(x) = \mathcal{R}_n^t \overline{q}_n(x) + c_{n,n-1}(0, \ldots, 0, q_n(x))^t \,, \tag{3.9}$$

donde $\overline{q}_n(x) = (q_0(x), q_1(x), \ldots, q_{n-1}(x))^t$. Recuerde que $(\cdot)^t$ denota la transpuesta del vector o la matriz $(\cdot)$. Según el Lema 2.3 los ceros $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ de q_n son valores propios de $\mathcal{R}_n^t$ y $\mathcal{R}_n$.

Sea ahora, $\mathcal{R}_{n,\infty}$ la matriz infinita resultante de agregar ceros a las filas y columnas de $\mathcal{R}_n$. En escritura por bloques dicha matriz quedaría como:

$$\mathcal{R}_{n,\infty} := \begin{pmatrix} \mathcal{R}_n & \mathcal{O}_{n,\infty} \\ \mathcal{O}_{\infty,n} & \mathcal{O}_{\infty,\infty} \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{O}_{a,b}$ es la matriz nula de a filas y b columnas.

Obviamente, los valores propios de $\mathcal{R}_n$ son valores propios de $\mathcal{R}_{n,\infty}$. Luego los ceros de q_n están contenidos en el espectro de $\mathcal{R}_{n,\infty}$, que por otro lado es la matriz asociada a un operador lineal y acotado de ℓ_2 en ℓ_2. Nuestro propósito es estimar el conjunto de puntos de acumulación (conjunto derivado) de los ceros de los polinomios q_n. Por lo antes expuesto, dicho conjunto estará contenido en el conjunto de puntos de acumulación de la unión de los espectros de los operadores definidos por las matrices $\{\mathcal{R}_{n,\infty}\}_{n=1}^{\infty}$.

El límite, por ahora formal, de la sucesión de matrices $\{\mathcal{R}_{n,\infty}\}_{n=1}^{\infty}$, es la matriz infinita $\mathcal{R}$ definida en (2.34). Dicha matriz define a su vez otro operador sobre ℓ_2, que no necesariamente tiene que ser lineal y acotado, pero en caso de serlo, como veremos, su espectro será un conjunto acotado que contiene al conjunto de puntos de acumulación de los ceros. Hasta aquí hemos descrito el esquema de razonamiento que nos guiará en la primera parte de este capítulo.

§ III.3 Productos de Sobolev secuencialmente dominados.

Temporalmente restringiremos nuestra atención al conjunto de medidas $\{\mu_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, d$, para las que se cumple que $xf \in \mathbb{H}_{2,d}$ para cada $f \in \mathbb{H}_{2,d}$. Por $xf \in \mathbb{H}_{2,d}$ entendemos que si dos sucesiones fundamentales o de Cauchy formadas por polinomios $\{p_n\}$ y $\{l_n\}$ son representantes de f, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - l_n\|_S = 0\,,$$

entonces las sucesiones de polinomios $\{xp_n\}$ y $\{xl_n\}$ son también sucesiones fundamentales o de Cauchy equivalentes, o sea

$$\lim_{n\to\infty} \|xp_n - xl_n\|_S = 0\,.$$

Al elemento de $\mathbb{H}_{2,d}$ que ellas representan, es el que nosotros denotaremos por xf. En este caso, es fácil verificar la linealidad de la aplicación

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathbb{H}_{2,d} & \longrightarrow & \mathbb{H}_{2,d} \\ & f & \rightsquigarrow & Rf := xf \end{array} \tag{3.10}$$

El operador de multiplicación R definido en $\mathbb{H}_{2,d}$ no tiene necesariamente que ser lineal y acotado. A continuación introduciremos una clase de productos interiores de Sobolev para los cuales el operador de multiplicación es lineal y acotado en el espacio de Hilbert separable $(\mathbb{H}_{2,d}, \langle\cdot,\cdot\rangle_S)$.

Sean $\{\mu_k\}_{k=0}^d$ una familia de $d+1$ medidas ($d \in \mathbb{Z}_+$) con las características exigidas al inicio de la sección § $III.1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ el producto de Sobolev asociado a dicha familia y $\mathbb{H}_{2,d}$ el respectivo espacio de Hilbert construido como en la sección anterior. Introduzcamos entonces la siguiente clase de Productos de Sobolev:

Definición 3.3 *Diremos que el producto interior de Sobolev* (3.1) *es secuencialmente dominado si*

$$\Delta_k \subset \Delta_{k-1}\ , \quad k = 1, \ldots, d\ ,$$

y

$$d\mu_k = f_{k-1} d\mu_{k-1}\ , \quad f_{k-1} \in L_\infty(\mu_{k-1})\ , \quad k = 1, \ldots, d\ .$$

El caso usual en el que todas las medidas $\{\mu_k\}_{k=0}^d$ son iguales es claramente un ejemplo donde el producto interior resultante es secuencialmente dominado. El siguiente resultado justifica el interés de esta clase de productos de Sobolev.

Teorema 3.5 *Supongamos que el producto interior de Sobolev* (3.1) *es secuencialmente dominado, entonces la aplicación* (3.10) *define un operador lineal acotado sobre* $\mathbb{H}_{2,d}$ *con norma*

$$\|R\| \leq (2[C_1^2 + (d+1)^2 C_2])^{1/2} , \tag{3.11}$$

donde

$$C_1 = \max_{x\in\Delta_0} |x| , \quad C_2 = \max_{k=0,\cdots,d-1} \|f_k\|_{L_\infty(\mu_k)} .$$

Para simplificar las notaciones durante el resto del capítulo, escribiremos

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(\mu_k)} = \langle\cdot,\cdot\rangle_k , \quad \|\cdot\|_{L_2(\mu_k)} = \|\cdot\|_k .$$

Demostración. En primer lugar probaremos que existe una constante $C > 0$ tal que para todo polinomio p

$$\|xp\|_S \leq C\|p\|_S . \tag{3.12}$$

Sean C_1 y C_2 las constantes definidas en el enunciado del teorema. Realizando cálculos sencillos, llegamos al siguiente estimado:

$$\begin{array}{rcl} \|xp\|_S^2 &=& \sum_{k=0}^d \|(xp)^{(k)}\|_k^2 \\ &=& \sum_{k=0}^d \|xp^{(k)} + kp^{(k-1)}\|_k^2 \\ &\leq& 2\sum_{k=0}^d(\|xp^{(k)}\|_k^2 + k^2\|p^{(k-1)}\|_k^2) \\ &\leq& 2\sum_{k=0}^d(C_1^2\|p^{(k)}\|_k^2 + k^2 C_2\|p^{(k-1)}\|_{k-1}^2) \\ &\leq& 2[C_1^2 + (d+1)^2 C_2] \sum_{k=0}^d \|p^{(k)}\|_k^2 \\ &=& C^2\|p\|_S^2 , \end{array}$$

lo que implica (3.12) con

$$C = (2[C_1^2 + (d+1)^2 C_2])^{1/2}.$$

Sea $f \in \mathbb{H}_{2,d}$ y supongamos que $\{p_n\}$ es un representante de f. Usando (3.12), para todo $n, m \in \mathbb{Z}_+$ tendremos que:

$$\|xp_n - xp_m\|_S \leq C\|p_n - p_m\|_S .$$

Esta desigualdad nos muestra que $\{xp_n\}$ es también una sucesión de Cauchy. Más aún, si $\{l_n\}$ es otro representante de f, por (3.12), también tendremos que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\|xp_n - xl_n\|_S \leq C\|p_n - l_n\|_S \ ,$$

de donde se concluye que ambas sucesiones $\{xp_n\}$ y $\{xl_n\}$ representan al mismo elemento en $\mathbb{H}_{2,d}$. Dicho elemento es el que ya definimos como xf al inicio de esta sección.

Sean $\{p_n\}$ y $\{l_n\}$ representantes de $f \in \mathbb{H}_{2,d}$ y $g \in \mathbb{H}_{2,d}$ respectivamente, es fácil verificar que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\{\alpha xp_n + \beta xl_n\}$ representa a $x(\alpha f + \beta g)$, lo que es equivalente a la linealidad de R. La acotación del operador es una consecuencia inmediata de (3.5) y la definición de la norma $\| \cdot \|_S$, dado que:

$$\|xf\|_S = \lim_{n\to\infty} \|xp_n\|_S \leq C \lim_{n\to\infty} \|p_n\|_S = C\|f\|_S \ .$$

Con esto concluye la demostración del teorema. ∎

§ III.4 Localización de ceros.

Como veremos aquí, la acotación del operador de multiplicación (3.10) tiene una consecuencia importante para la localización de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev. Recordemos que dicha condición no tiene por qué cumplirse para todo producto interior de Sobolev. El siguiente teorema es el resultado fundamental sobre localización de ceros que presentamos.

Teorema 3.6 *Supongamos que la aplicación* (3.10) *define un operador lineal y acotado de* $\mathbb{H}_{2,d}$ *en* $\mathbb{H}_{2,d}$*. Entonces, todos los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev están contenidos en el disco* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|R\|\}$.

Destaquemos que en el teorema 3.6 el producto interior no tiene que ser secuencialmente dominado. La acotación de R es el único requisito. En consecuencia, es de interés encontrar otras condiciones suficientes (o condiciones menos restrictivas) para la acotación de este operador.

De (3.7), obtenemos que la representación matricial de R, tomando en ℓ_2 la base canónica $\{e_n\}$, está dada por la matriz infinita de Hessenberg $\mathcal{R}$, definida en (2.34) y que en la notación actual se reescribe como:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & \cdots & c_{0,n-2} & c_{0,n-1} & \cdots \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} & \cdots \\ 0 & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-2} & c_{2,n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2,n-2} & c_{n-2,n-1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1,n-2} & c_{n-1,n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} . \tag{3.13}$$

La conexión entre la matriz infinita $\mathcal{R}$ y el operador de multiplicación R sobre el espacio $\mathbb{H}_{2,d}$ queda perfectamente descrita mediante el siguiente resultado:

Teorema 3.7 *Supongamos que R define un operador lineal y acotado sobre $\mathbb{H}_{2,d}$. Entonces, la matriz infinita de Hessenberg $\mathcal{R}$ define un operador lineal y acotado sobre ℓ_2 y $\|\mathcal{R}\| = \|R\|$. Más aún, si $\mathcal{R}_{n,\infty}$ denota la matriz infinita obtenida al adicionarle ceros a las restantes filas y columnas de $\mathcal{R}_n$, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$\|\mathcal{R}_{n,\infty}\| \leq 2\|R\| . \tag{3.14}$$

Demostración. Sea $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in \ell_2$. Entonces

$$\mathcal{R}\overline{\alpha}^t = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{0,n}\alpha_n, \ldots, \sum_{n=k-1}^{\infty} c_{k,n}\alpha_n, \ldots \right)^t = (\beta_0, \ldots, \beta_k, \ldots)^t = \overline{\beta}^t .$$

Probemos primeramente que $\overline{\beta} \in \ell_2$.

Existe $f \in \mathbb{H}_{2,d}$ tal que $\alpha_k = \langle f, q_k \rangle$ y

$$\|f\|_S^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 . \tag{3.15}$$

En virtud de que por hipótesis R es acotada y $\mathbb{H}_{2,d}$ es un espacio de Hilbert separable, tenemos que:

$$Rf = xf = \sum_{k=0}^{\infty} \langle xf, q_k \rangle_S \, q_k .$$

Además,

$$\|Rf\|_S^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle xf, q_k \rangle_S^2 < \infty \,. \tag{3.16}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\langle xf, q_k \rangle_S &= \langle x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n q_n, q_k \rangle_S &&= \langle \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x q_n, q_k \rangle_S \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \langle x q_n, q_k \rangle_S &&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n c_{k,n} \\
&= \sum_{n=k-1}^{\infty} \alpha_n c_{k,n} &&= \beta_k \,.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

De (3.16) y (3.17), obtenemos que:

$$\|Rf\|_S^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$$

como queríamos probar. Además, si $\|R\|$ es la norma de R, de esta última relación y (3.15) se tiene que:

$$\|\mathcal{R}\overline{\alpha}^t\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 = \|Rf\|_S^2 \leq \|R\|^2 \|f\|_S^2 = \|R\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = \|R\|^2 \|\overline{\alpha}\|_{\ell_2}^2 \,. \tag{3.18}$$

Es decir, $\mathcal{R}$ define un operador lineal y acotado en ℓ_2 cuya norma no es mayor que la de R. Por la primera igualdad de (3.18) y la correspondencia biunívoca entre los elementos de $I\!H_{2,d}$ y ℓ_2 se sigue que dichas normas son iguales.

Probemos ahora (3.14). De la desigualdad de Schwarz y la acotación de R se sigue que:

$$|c_{n,n-1}| = |\langle x q_{n-1}, q_n \rangle_S| \leq \|x q_{n-1}\|_S \leq \|R\| \,.$$

Para cada $\overline{\alpha} \in \ell_2$, denotemos por $\overline{\alpha}_n$ su proyección ortogonal sobre el subespacio generado por los primeros $n+1$ elementos $e_0, \ldots, e_n$ de la base canónica en ℓ_2. Es fácil verificar que:

$$\mathcal{R}_{n,\infty}\overline{\alpha}^t = \mathcal{R}_{n,\infty}\overline{\alpha}_{n-1}^t = \mathcal{R}\overline{\alpha}_{n-1}^t - c_{n,n-1}\alpha_{n-1}e_{n-1}^t \,.$$

Por consiguiente,

$$\|\mathcal{R}_{n,\infty}\overline{\alpha}^t\|_{\ell_2} \leq \|\mathcal{R}\overline{\alpha}_{n-1}^t\|_{\ell_2} + |c_{n,n-1}\alpha_{n-1}| \leq 2\|R\|\|\overline{\alpha}\|_{\ell_2} \,,$$

lo que nos da (3.14). ■

Ahora estamos en condiciones de probar en forma breve el resultado fundamental de esta sección:

Demostración del Teorema 3.6. De acuerdo con el Lema 2.3, todos los ceros de q_n son valores propios de $\mathcal{R}_n$. Obviamente, los valores propios de $\mathcal{R}_n$ son valores propios de $\mathcal{R}_{n,\infty}$ y de (3.14), para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, el espectro de $\mathcal{R}_{n,\infty}$ está completamente contenido en el disco $\{z : |z| \leq 2\|R\|\}$. Con esto concluye la demostración del teorema. ∎

Una consecuencia directa de los Teoremas 3.5 y 3.6 es:

Corolario 3.8 *Si el producto interior de Sobolev* (3.1) *es secuencialmente dominado, entonces todos los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev están contenidos en* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|R\|\}$, *donde* $\|R\|$ *satisface* (3.11).

§ III.5 Tópicos de la teoría del Potencial Logarítmico.

Como en el caso de ortogonalidad usual, el medio ambiente natural para el estudio de la distribución asintótica de ceros de los polinomios ortogonales y del comportamiento asintótico de su raíz n-ésima es la Teoría del Potencial Logarítmico. Por ello aquí recogemos algunos conceptos y teoremas de la misma, junto con otros resultados que nos serán de utilidad en adelante. Todos los resultados que aparecen en esta sección son conocidos; para evitar el exceso de referencias solamente diremos que los mismos pueden consultarse fundamentalmente en [78] y [81] , además pueden ver [30] y [82].

Sea Δ un compacto del plano complejo $\mathbb{C}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\Delta)$ el conjunto de todas las medidas positivas de Borel, con soporte contenido en Δ y medida de Δ igual a 1 (medidas de probabilidad en Δ). Entonces:

1. Se llama *potencial logarítmico* asociado a la medida $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\Delta)$ a la función:
$$U_\mu(z) := \int_\Delta \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta) \ .$$

2. La *energía* asociada a $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\Delta)$ se define como:

$$I(\mu) := \int_{\Delta}\int_{\Delta} \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta)\, d\mu(z) = \int_{\Delta} U_{\mu}(z)\, d\mu(z) \ .$$

3. Se denomina *constante de Robin* de Δ, o *energía de equilibrio* para Δ a:

$$I(\Delta) := \inf_{\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\Delta)} I(\mu) \ .$$

4. Para el compacto Δ, el número $Cap(\Delta) := \exp(-I(\Delta))$ se llama *capacidad logarítmica de* Δ. Si F es un conjunto arbitrario su *capacidad logarítmica* se define como:

$$Cap(F) := \sup_{\substack{\Delta \subset F \\ \Delta \text{ compacto}}} Cap(\Delta) \ .$$

5. Diremos que una propiedad se satisface *cuasi-dondequiera* en el conjunto F si dicha propiedad se satisface en un conjunto A tal que $Cap(F \setminus A) = 0$.

En lo adelante usaremos el concepto de *convergencia *-débil* de una sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\Delta)$, lo cual significa que para toda función f continua se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)d\mu_n(x) = \int f(x)d\mu(x) \, .$$

La convergencia *-débil de medidas produce el siguiente efecto sobre los potenciales logarítmicos:

Teorema 3.8 (Principio de Descenso) *Supongamos que Δ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y que la sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\Delta)$, converge *-débilmente a la medida $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\Delta)$, entonces para toda sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que $z_n \to z$ se tiene que:*

$$U_{\mu}(z) \leq \liminf_{n\to\infty} U_{\mu_n}(z_n) \, , \quad z \in \mathbb{C} \, ,$$

y además,

$$U_{\mu}(z) = \liminf_{n\to\infty} U_{\mu_n}(z)$$

en todo Δ salvo en un conjunto de capacidad logarítmica cero, es decir cuasi-dondequiera en Δ.

Un resultado fundamental en la teoría de potencial afirma que si Δ es un compacto de $\mathbb{C}$, existe una única medida de probabilidad ω_Δ en Δ, tal que su energía coincide con la energía de equilibrio de Δ. Dicha medida ω_Δ se llama entonces *Medida de Equilibrio de* Δ.

Teorema 3.9 (Frostman) *Supongamos que Δ es un compacto, $\Delta \subset \mathbb{C}$, tal que* $\mathrm{Cap}(\Delta) > 0$. *Entonces existe una medida $\omega_\Delta \in \mathcal{M}_\mathcal{P}(\Delta)$ tal que $I(\omega_\Delta) = I(\Delta)$ y su potencial $U_{\omega_\Delta}(z)$ cumple las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $z \in \mathbb{C}$, $U_{\omega_\Delta}(z) \leq I(\Delta)$.*

2. *$U_{\omega_\Delta}(z) = I(\Delta)$ cuasi-dondequiera en Δ.*

3. *Para toda medida $\mu \in \mathcal{M}_\mathcal{P}(\Delta)$ se tiene que*

$$\inf_{z\in\Delta} U_\mu(z) \leq I(\Delta) \leq \sup_{z\in\Delta} U_\mu(z)\,.$$

Un rol importante en las próximas secciones lo juega la *función de Green* con polo logarítmico en el infinito asociada al complemento del compacto Δ, que denotaremos por $g_\Delta(z,\infty)$. La función de Green queda completamente caracterizada por las siguientes propiedades:

1. $g_\Delta(z,\infty)$ es una función subarmónica no negativa en $\mathbb{C}$ y armónica en $\mathbb{C}\setminus\Delta$.

2. $g_\Delta(z,\infty) = \log|z| - \log(Cap(\Delta)) + \circ(1)$ cuando $|z| \to \infty$, donde $\circ(1) \to 0$ si $|z| \to \infty$.

3. $g_\Delta(z,\infty) = 0$ cuasi-dondequiera en Δ.

Si la capacidad de Δ es cero entonces $g_\Delta(z,\infty) \equiv \infty$. Las tres propiedades anteriores con el principio del máximo garantizan la unicidad de la función de Green para todo compacto $\Delta \in \mathbb{C}$. Ahora bien, si $Cap(\Delta) > 0$ por el Teorema 3.9 sabemos que existe una medida $\omega_\Delta \in \mathcal{M}_\mathcal{P}(\Delta)$ de equilibrio en Δ, que está relacionada con la función de Green mediante la expresión

$$g_\Delta(z,\infty) \equiv -U_{\omega_\Delta}(z) - \log(Cap(\Delta)). \tag{3.19}$$

Por otro lado, a cada polinomio p de grado exactamente n, se le puede asociar la *medida contadora de sus ceros, normalizada,* ν_p que se define como

$$\nu_p = \nu(p) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{z_j} ,$$

donde $z_1, \ldots, z_n$ son los ceros de q repetidos de acuerdo a su multiplicidad y δ_{z_j} es la medida de Dirac con masa uno en el punto z_j. Se dice entonces que una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($grad\, p_n = n$) tiene *distribución asintótica de ceros* ω ($\omega \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\mathbb{C})$), si la sucesión de medidas contadoras normalizadas correspondiente $\{\nu_{p_n}\}_{n=0}^{\infty}$ converge en sentido *-débil a la medida ω.

En [78], los autores introducen la clase **Reg** de medidas regulares. Para medidas soportadas sobre un conjunto compacto de la recta real, ellos prueban (ver [78], Teorema 3.6.1) que $\mu \in$ **Reg** si y solo si los polinomios ortogonales q_n (en el sentido usual) con respecto a μ tienen distribución asintótica de ceros regular. Esto es que, en el sentido de la convergencia *-débil de medidas

$$\lim_{n\to\infty} \nu(q_n) = \omega_\Delta ,$$

donde ω_Δ es la medida de equilibrio del soporte Δ de la medida μ.

Sea ahora el compacto $\Delta \subset \mathbb{C}$ tal que $Cap(\Delta) > 0$. Si f es una función continua definida sobre la frontera $\partial\Delta$ de Δ, el *problema de Dirichlet* en $\mathbb{C} \setminus \Delta$ consiste en encontrar una función u que sea armónica en $E = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, continua en $\overline{E} = E \bigcup \partial\Delta$ y tal que $u|_{\partial\Delta} = f$. Se dice que Δ es *regular con respecto al problema de Dirichlet* si para toda f continua y definida sobre $\partial\Delta$ el correspondiente problema de Dirichlet tiene solución. El siguiente teorema establece el nexo entre este concepto y la clase de medidas **Reg**.

Teorema 3.10 *Sea μ una medida tal que* Sop $\mu = \Delta$ *es regular con respecto al problema de Dirichlet en $\mathbb{C} \setminus \Delta$. La medida μ está en* **Reg** *si y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\|p_n\|_\Delta}{\|p_n\|_{L_2(\mu)}} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{3.20}$$

para toda sucesión de polinomios $\{p_n\}, \mathrm{grad}\, p_n \leq n, p_n \not\equiv 0$.

Para la demostración ver [78] (Teorema 3.2.3, página 67). Aquí y en lo que sigue, $\| \cdot \|_\Delta$ denota la norma del supremo sobre Δ. Otro resultado de interés, cuya demostración pueden consultar en [16] Teorema 2.1 y Corolario 2.1, páginas 309-310, es

Teorema 3.11 *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un compacto con interior vacío y complemento conexo, tal que* $\mathrm{Cap}(E) > 0$. *Si* $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de polinomios mónicos,* $\mathrm{grad}\, P_n = n$, *tales que:*

$$\limsup_{n\to\infty} \|P_n\|_E^{\frac{1}{n}} \leq Cap(E) \ ,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \nu(P_n) = \omega_E \ ,$$

*en el sentido de la convergencia *-débil de medidas, donde* ω_E *es la medida de equilibrio de* E.

En adelante, al considerar un producto interior de Sobolev como (3.1) el conjunto Δ tendrá el sentido siguiente

$$\Delta := \cup_{k=0}^{d} \Delta_k \ ,$$

donde Δ_k es el soporte de μ_k en (3.1).

Finalmente, introduciremos el siguiente concepto con la finalidad de garantizar en los productos de Sobolev condiciones de regularidad que nos permitan emplear el andamiaje teórico descrito en la presente sección.

Definición 3.4 *Diremos que el producto interior de Sobolev* (3.1) *es* **l-regular** *si existe* $l \in \{0, \ldots, d\}$ *tal que* $\cup_{k=0}^{l} \Delta_k = \Delta$, *donde* Δ_k *es regular con respecto al problema de Dirichlet y* $\mu_k \in$ **Reg** *para* $k = 0, \ldots, l$.

En el caso corriente, en que todas las medidas del producto interior de Sobolev coinciden la l-regularidad equivale a la 0-regularidad.

§ III.6 Distribución asintótica regular de ceros.

Los resultados contenidos en esta sección están inspirados en el Teorema 1 y el Lema 6 de [27]. Allí para $d = 1$ se supone que las medidas μ_0 y μ_1 están en la clase **Reg** y tienen soportes regulares con respecto al problema de Dirichlet. Bajo estas condiciones, los autores encuentran la distribución asintótica de ceros de las derivadas de los polinomios ortogonales de Sobolev, y la de los propios polinomios cuando $\Delta_0 \supset \Delta_1$. Esta sección tiene por objeto la prueba del siguiente teorema.

Teorema 3.12 *Supongamos que el producto interior de Sobolev* (3.1) *es l-regular. Entonces para cada $k = 0, \ldots, l$ fijo y para todo $j \geq k$*

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n^{(j)}\|_{\Delta_k}^{\frac{1}{n}} \leq Cap(\Delta) \; . \tag{3.21}$$

Para todo $j \geq l$

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n^{(j)}\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} = Cap(\Delta) \tag{3.22}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \nu(Q_n^{(j)}) = \omega_\Delta \; . \tag{3.23}$$

*en el sentido de la convergencia *-débil de medidas.*

Antes de proceder a la demostración del teorema necesitaremos el siguiente resultado auxiliar:

Lema 3.4 *Sea E un conjunto compacto del plano complejo, regular con respecto al problema de Dirichlet y $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios. Entonces, para todo $k, j \in \mathbb{Z}_+$, $k \leq j$*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|P_n^{(j)}\|_E}{\|P_n^{(k)}\|_E} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1 \; . \tag{3.24}$$

Demostración. Como las derivadas de P_n aparecen en el numerador y en el denominador de la expresión anterior, podemos suponer sin pérdida de generalidad que P_n es mónico. Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y consideremos la curva $\gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : g_E(z;\infty) = \varepsilon\}$, donde $g_E(z;\infty)$ denota la función de Green con respecto a la componente conexa no acotada del complemento de E con singularidad en el infinito. La curva γ_ε es cerrada y analítica, luego dicha curva tiene longitud finita l_ε y se encuentra a una distancia $\delta > 0$ de E. Como E es regular con respecto al problema de Dirichlet la curva γ_ε rodea a E. Por la fórmula integral de Cauchy tenemos que para cada $z \in E$

$$\begin{aligned}
|P_n^{(j)}(z)| &= \left| \frac{(j-k)!}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{P_n^{(k)}(\zeta)}{(\zeta - z)^{j-k+1}} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{(j-k)!}{2\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|P_n^{(k)}(\zeta)|}{|\zeta - z|^{j-k+1}} |d\zeta| \\
&\leq \frac{(j-k)!}{2\pi\, \delta^{j-k+1}} \int_{\gamma_\varepsilon} |P_n^{(k)}(\zeta)|\, |d\zeta|
\end{aligned}$$

Del Lema de Bernstein-Walsh (ver [67] página 158) sabemos que:

$$|P_n^{(k)}(z)| \leq e^{n\, g_E(z;\infty)}\, \|P_n^{(k)}\|_E \ , \ \ z \in \mathbb{C} \setminus E$$

luego

$$|P_n^{(j)}(z)| \leq \frac{(j-k)!\; l_\varepsilon\; e^{n\varepsilon}}{2\pi\; \delta^{j-k+1}}\; \|P_n^{(k)}\|_E \ .$$

Por consiguiente,

$$\left(\frac{\|P_n^{(j)}\|_E}{\|P_n^{(k)}\|_E} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{(j-k)!\; l_\varepsilon}{2\pi\; \delta^{j-k+1}} \right)^{\frac{1}{n}} \; e^{\varepsilon}$$

y

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|P_n^{(j)}\|_E}{\|P_n^{(k)}\|_E} \right)^{\frac{1}{n}} \leq e^{\varepsilon} \ .$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, (3.24) se sigue inmediatamente. ∎

Ahora estamos en condiciones de probar que la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev tiene distribución asintótica regular de ceros.

Demostración del Teorema 3.12. Comenzaremos probando que:

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n\|_S^{\frac{1}{n}} \leq \mathit{Cap}(\Delta) \ . \tag{3.25}$$

Como cada uno de los conjuntos $\Delta_k, k = 0, \ldots, l$, es regular con respecto al problema de Dirichlet, también lo será Δ. Denotemos por T_n el polinomio de Chebyshev mónico de grado n para el conjunto Δ. Luego $\|T_n\|_\Delta \leq \|P_n\|_\Delta$ para todo polinomio mónico de grado n. Es conocido que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n\|_\Delta^{\frac{1}{n}} = \mathit{Cap}(\Delta) \tag{3.26}$$

(ver [30] Teorema 7.1.1 página 297 y Teorema 7.3.2 página 311).

Por el Lema 3.4, para todo $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_n^{(j)}\|_\Delta^{\frac{1}{n}} \leq Cap(\Delta) \ . \tag{3.27}$$

Así, por la propiedad de minimalidad de la norma de los polinomios de Sobolev Q_n, tendremos

$$\|Q_n\|_S^2 \leq \|T_n\|_S^2 \leq \sum_{k=0}^{d} \|T_n^{(k)}\|_k^2 \leq \sum_{k=0}^{d} \mu_k(\Delta_k)\|T_n^{(k)}\|_\Delta^2 \ .$$

Este estimado, junto con (3.27) nos permite obtener (3.25).

Por la regularidad de las medidas μ_k, de (3.20) en el Teorema 3.10 sabemos que para cada $k = 0, \ldots, l$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\|Q_n^{(k)}\|_{\Delta_k}}{\|Q_n^{(k)}\|_k} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \ . \tag{3.28}$$

Como

$$\|Q_n^{(k)}\|_k^2 \leq \sum_{k=0}^{d} \|Q_n^{(k)}\|_k^2 = \|Q_n\|_S^2 \ ,$$

(3.25) y (3.28) implican que

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n^{(k)}\|_{\Delta_k}^{\frac{1}{n}} \leq Cap(\Delta) \ . \tag{3.29}$$

Ahora la relación (3.21) se tiene de (3.24) y (3.29).

Si $j \geq l$, (3.21) se cumple para cada $k = 0, \ldots, l$. En virtud de la l-regularidad se cumple que

$$\|Q_n^{(j)}\|_\Delta = \max_{k=0,\ldots,l} \|Q_n^{(j)}\|_{\Delta_k} \ ,$$

luego, usando (3.21), obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n^{(j)}\|_\Delta^{\frac{1}{n}} \leq Cap(\Delta) \ . \tag{3.30}$$

Pero

$$\liminf_{n\to\infty} \|Q_n^{(j)}\|_\Delta^{\frac{1}{n}} \geq \liminf_{n\to\infty} \|T_{n-j}\|_\Delta^{\frac{1}{n}} = Cap(\Delta) \tag{3.31}$$

se cumple para cualquier sucesión $\{Q_n\}$ de polinomios mónicos. Claramente de (3.30) y (3.31) se tiene (3.22).

El conjunto compacto Δ tiene interior vacío y complemento conexo. Por el Teorema 3.11 se tiene que bajo tales condiciones (3.22) implica (3.23). Con esto el teorema queda demostrado. ■

§ III.7 Asintótica de la raíz n-ésima.

Si el producto interior de Sobolev (3.1) es secuencialmente dominado, entonces $\Delta_0 = \Delta$; por consiguiente, si Δ_0 y μ_0 son regulares, el producto interior correspondiente es 0-regular.

Recordemos que q_n denota al polinomio ortonormal de grado n con respecto al producto (3.1). De (3.3) sabemos que

$$\kappa_{n,n} = \frac{1}{\|Q_n\|_S}\,, \; n = 0, 1, \dots\,,$$

donde $\kappa_{n,n}$ es el coeficiente principal de q_n. Como veremos a continuación el comportamiento asintótico de la raíz n-ésima de $\kappa_{n,n}$, cuando (3.1) tiene las características anteriores, es una consecuencia directa del Teorema 3.12.

Teorema 3.13 *Si el producto interior de Sobolev* (3.1) *es secuencialmente dominado y 0-regular, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} (\kappa_{n,n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{Cap(\Delta)}$$

Demostración. Por un lado, de (3.25) se tiene de inmediato que

$$\liminf_{n\to\infty} (\kappa_{n,n})^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{Cap(\Delta)}\,. \tag{3.32}$$

Mientras que por (3.2), (3.20) y la propiedad de extremalidad de los polinomios de Chebyshev se tiene

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} (\kappa_{n,n})^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\|Q_n\|_S^{\frac{1}{n}}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\|Q_n\|_0^{\frac{1}{n}}} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\|Q_n\|_{\Delta_0}^{\frac{1}{n}}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\|T_n\|_{\Delta_0}^{\frac{1}{n}}}\,.
\end{aligned}$$

Luego como $\Delta = \Delta_0$, de (3.26) se llega a

$$\limsup_{n\to\infty} (\kappa_{n,n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{Cap(\Delta)}\,. \tag{3.33}$$

De (3.32) y (3.33) se tiene el corolario. ■

También como consecuencia de los Teoremas 3.6 y 3.12, se tiene el siguiente teorema que describe el comportamiento asintótico de la raíz n-ésima de la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev.

Teorema 3.14 *Supongamos que el producto interior de Sobolev es secuencialmente dominado y* 0*-regular. Entonces, para todo* $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\limsup_{n\to\infty} |Q_n^{(j)}(z)|^{\frac{1}{n}} = Cap(\Delta)e^{g_\Delta(z;\infty)} \tag{3.34}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ *excepto para un conjunto de capacidad cero y*

$$\lim_{n\to\infty} |Q_n^{(j)}(z)|^{\frac{1}{n}} = Cap(\Delta)e^{g_\Delta(z;\infty)} , \tag{3.35}$$

uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| \leq 2\|R\|\}$*, donde* $\|R\|$ *satisface* (3.11).

Demostración. Por el Corolario 3.8, tenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev están contenidos en un subconjunto compacto del plano complejo. Es bien conocido que los ceros de las derivadas de un polinomio se encuentran en la envoltura convexa del conjunto de ceros del propio polinomio. Por tanto, existe un subconjunto compacto del plano complejo que contiene los ceros de $Q_n^{(j)}$ para todo $n, j \in \mathbb{Z}_+$. En particular, todos estos ceros están contenidos en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|R\|\}$. Así, para cada $j \in \mathbb{Z}$ fijo las medidas $\nu_{n,j} = \nu(Q_n^{(j)}), n \in \mathbb{Z}$, y la medida de equilibrio ω_Δ tienen su soporte contenido en un subconjunto compacto contenido en $\mathbb{C}$. Usando esto y (3.22) de los teoremas 3.12 y 3.8, obtenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} \int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\nu_{n,j}(x) = \int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\omega_\Delta(x) ,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ excepto para un conjunto de capacidad cero. El límite anterior es equivalente a (3.34), ya que por (3.19)

$$g_\Delta(z;\infty) = \log \frac{1}{Cap(\Delta)} - \int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\omega_\Delta(x) .$$

Para demostrar (3.35), notemos que para cada $j \in \mathbb{Z}_+$ fijo, la familia de funciones armónicas en la variable z

$$\left\{ \int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\nu_{n,j}(x) \right\} , \quad n \in \mathbb{Z}_+ ,$$

está uniformemente acotada sobre cualquier subconjunto compacto de $D = \mathbb{C} \setminus \{z : |z| \leq 2\|R\|\}$. Por (3.34), tenemos que cualquier subsucesión uniformemente convergente sobre subconjuntos compactos de D tiene como límite

$$\int \log \frac{1}{|z-x|}\, d\omega_\Delta(x)$$

(independientemente de la subsucesión convergente que se tome). Por consiguiente, la sucesión completa converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a dicha función. Lo que es equivalente a (3.35). ■

Otra consecuencia del Teorema 3.12 y el Corolario 3.8 es la determinación del comportamiento asintótico del cociente ponderado de derivadas sucesivas de los polinomios de Sobolev, que se expresa en el próximo resultado:

Teorema 3.15 *Supongamos que el producto interior de Sobolev es secuencialmente dominado y* 0*-regular. Entonces, para todo* $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(j+1)}(z)}{nQ_n^{(j)}(z)} = \int \frac{d\omega_\Delta(x)}{z-x}\,, \tag{3.36}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|R\|\}$*, donde* $\|R\|$ *satisface* (3.11)*.*

Demostración. Sean $x_{n,i}^j, i = 1, \ldots, n-j$, los $n-j$ ceros de $Q_n^{(j)}$. Como se mencionó anteriormente, todos estos ceros están contenidos en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|R\|\}$. Descomponiendo en fracciones simples y usando la definición de $\nu_{n,j}(Q_n^{(j)})$ obtenemos

$$\frac{Q_n^{(j+1)}(z)}{nQ_n^{(j)}(z)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{z-x_{n,i}^j} = \frac{n-j}{n}\int \frac{d\nu_{n,j}(x)}{z-x}\,. \tag{3.37}$$

Luego, para cada $j \in \mathbb{Z}_+$ fijo, la familia de funciones

$$\left\{ \frac{Q_n^{(j+1)}(z)}{nQ_n^{(j)}(z)} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+\,, \tag{3.38}$$

está uniformemente acotada sobre cada subconjunto compacto de $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|R\|\}$.

Por otro lado, todas las medidas $\nu_{n,j}, n \in \mathbb{Z}_+$, están soportadas en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|R\|\}$ y para $z \in D$ fijo, la función $(z-x)^{-1}$ es continua sobre $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq$

$2\|R\|\}$ con respecto a x. Por tanto, de (3.23) y (3.37), encontramos que cada subsucesión (3.38) que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D converge puntualmente a $\int (z-x)^{-1}\, d\omega_{\Delta}(x)$. Así, la sucesión completa converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a dicha función como se establece en (3.36). ∎

§ III.8 Caso discreto.

Como se ha mencionado en el capítulo introductorio, los polinomios ortogonales de Sobolev discretos han centrado buena parte del interés en el estudio de este tipo de ortogonalidad. Sobre su comportamiento asintótico son importantes los trabajos [44] y [54]. Es conveniente recordar que los productos interiores de Sobolev discretos se obtienen de (3.1) al considerar que las medidas asociadas con las derivadas son discretas. Sea entonces ahora:

$$\langle f, g\rangle_S := \int_{\Delta_0} f\ g\, d\mu_0 + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{N_i} \eta_{i,j}\ f^{(j)}(c_i)\ g^{(j)}(c_i)\ . \tag{3.39}$$

donde $\eta_{i,j} \geq 0, \eta_{i,N_i} > 0$, y $c_i \in I\!R$. En correspondencia, la norma de Sobolev asociada a dicho producto será

$$\|f\|_S := \sqrt{\int_{\Delta_0} f^2\, d\mu_0 + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{N_i} \eta_{i,j}\ \left(f^{(j)}(c_i)\right)^2}\ . \tag{3.40}$$

Notemos que si algunos de los puntos c_i se encuentran en el complemento del soporte Δ_0 de μ_0, el producto interior de Sobolev correspondiente no es regular. Sin embargo, como veremos a continuación una modificación de la demostración del Teorema 3.12 nos permite obtener resultados análogos a los anteriores para este tipo de productos.

Teorema 3.16 *Si el producto interior de Sobolev discreto* (3.39) *es tal que* Δ_0 *es un conjunto regular con respecto al problema de Dirichlet y* $\mu_0 \in$ **Reg**. *Entonces, para todo* $j \geq 0$, *con* $\Delta = \Delta_0$ *se cumple:*

1.

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n^{(j)}\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} = Cap(\Delta)\ . \tag{3.41}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \nu(Q_n^{(j)}) = \omega_\Delta \ , \tag{3.42}$$

*en el sentido de la convergencia *-débil de medidas.*

Demostración. Como anteriormente, T_n denota el n-ésimo polinomio de Chebyshev mónico con respecto a Δ_0. Denotemos

$$w(z) = \prod_{i=1}^{d} (z - c_i)^{N_i+1} \ .$$

Sea $N = grad\, w$ y tomemos $n \geq N$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|Q_n\|_0^2 &\leq \|Q_n\|_S^2 \\ &\leq \|w\, T_{n-N}\|_S^2 \\ &= \int_{\Delta_0} |wT_{n-N}|^2\, d\mu_0 \\ &\leq \mu_0(\Delta_0)\ \|w\|_{\Delta_0}^2\ \|T_{n-N}\|_{\Delta_0}^2 \ . \end{aligned}$$

Como $\mu_0(\Delta_0)\|w\|_{\Delta_0}^2 > 0$ no depende de n, de (3.26) se obtiene el estimado

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n\|_0^{\frac{1}{n}} \leq Cap(\Delta_0) \ . \tag{3.43}$$

Como la medida μ_0 es regular, por (3.20) sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\|Q_n\|_{\Delta_0}}{\|Q_n\|_0} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \ . \tag{3.44}$$

Entonces en virtud de las relaciones (3.43) y (3.44) se tendrá

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n\|_{\Delta_0}^{\frac{1}{n}} \leq Cap(\Delta_0) \ . \tag{3.45}$$

Ahora, por el Lema 3.4 y (3.45) se tiene la relación

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n^{(j)}\|_{\Delta_0}^{\frac{1}{n}} \leq Cap(\Delta_0) \ , \tag{3.46}$$

para todo $j \geq 0$.

Por otro lado,

$$\liminf_{n\to\infty} \|Q_n^{(j)}\|_{\Delta_0}^{\frac{1}{n}} \geq \liminf_{n\to\infty} \|T_{n-j}\|_{\Delta_0}^{\frac{1}{n}} = Cap(\Delta_0) \ , \tag{3.47}$$

luego de las desigualdades (3.46) y (3.47) se tiene (3.41).

Obviamente, el compacto Δ_0 tiene interior vacío y complemento conexo, entonces por el Teorema 3.11 se sabe que bajo tales condiciones (3.22) implica (3.23). Así concluímos la demostración. ■

Dado el Teorema 3.16, pueden obtenerse resultados análogos a los Teoremas 3.13, 3.14 y 3.15 para polinomios ortogonales de Sobolev discretos, que enunciamos a continuación. Para ello, debemos adicionar al Teorema 3.16 la restricción que en (3.39) todo $\eta_{i,j}$ sea estrictamente mayor que cero, para de esta manera garantizar que el producto interior correspondiente sea secuencialmente dominado (aunque dudamos que dicha condición sea realmente necesaria en el caso discreto). Así pues, se cumple

Teorema 3.17 *Si el producto interior de Sobolev discreto* (3.39) *es tal que* Δ_0 *es un conjunto regular con respecto al problema de Dirichlet,* $\mu_0 \in \mathbf{Reg}$ *y* $\eta_{i,j} > 0$ *para todo* $1 \leq i \leq d$ *y* $0 \leq j \leq N_i$ *, entonces se cumple que:*

1.
$$\lim_{n\to\infty} (\kappa_{n,n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{Cap(\Delta_0)}$$

2. *Cualquiera sea* $j \in \mathbb{Z}_+$
$$\limsup_{n\to\infty} |Q_n^{(j)}(z)|^{\frac{1}{n}} = Cap(\Delta_0)e^{g_{\Delta_0}(z;\infty)}$$
para todo $z \in \mathbb{C}$ *excepto para un conjunto de capacidad cero.*

3. *Para todo* $j \in \mathbb{Z}_+$
$$\lim_{n\to\infty} |Q_n^{(j)}(z)|^{\frac{1}{n}} = Cap(\Delta_0)e^{g_{\Delta_0}(z;\infty)} ,$$
uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|R\|\}$*, donde* $\|R\|$ *satisface* (3.11).

4. *Para todo* $j \in \mathbb{Z}_+$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(j+1)}(z)}{nQ_n^{(j)}(z)} = \int \frac{d\omega_{\Delta_0}(x)}{z-x} ,$$
uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|R\|\}$*, donde* $\|R\|$ *satisface* (3.11).

Capítulo IV

Asintótica Fuerte.

§ IV.1 Introducción.

Sea $\{\mu_k\}_{k=0}^d$, con $d \in \mathbb{Z}_+$, un conjunto de $d+1$ medidas de Borel finitas y positivas, donde al menos una de ellas tiene infinitos puntos de crecimiento y para cada k, $k = 0, ..., d$, el soporte Δ_k de μ_k es un subconjunto compacto de la recta real $\mathbb{R}$.

Como anteriormente, definimos un producto interior sobre el correspondiente espacio de Sobolev, que contiene al subespacio $\mathbb{P}$ de todos los polinomios, mediante la expresión

$$\langle f, g \rangle_S = \sum_{k=0}^{d} \langle f^{(k)}, g^{(k)} \rangle_k = \sum_{k=0}^{d} \int_{\Delta_k} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\mu_k(x) , \tag{4.1}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ denota el producto interior usual en el espacio de Hilbert $L^2(\mu_k)$ y $f^{(k)}$ es la derivada k-ésima de la función f. Como (4.1) define también un producto interior sobre el espacio de todos los polinomios, en consecuencia se le puede asociar una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Dichos polinomios son los ya antes nombrados *polinomios ortogonales de Sobolev* y hemos denotado por Q_n, donde n es el grado.

Sea

$$\|f\|_S = (\langle f, f \rangle_S)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{d} \langle f^{(k)}, f^{(k)} \rangle_k \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{d} \|f^{(k)}\|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

la norma asociada a (4.1) y $\{q_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, la sucesión de polinomios ortonormales

$$q_n(z) = \frac{Q_n(z)}{\|Q_n\|_S}\,, \; n = 0, 1, \ldots .$$

Nuestro interés en este capítulo está en productos interiores que se encuentran en la siguiente clase:

Definición 4.5 *Diremos que el producto interior de Sobolev* (4.1) *está* superiormente dominado *si* $\Delta_k \subset \Delta_d$, $\;k = 0, \ldots, d-1$

Notemos que el caso usual en que todas las medidas que intervienen en el producto son iguales es superiormente dominado. En el resto del capítulo supondremos que $\Delta_d = [-1, 1]$ y denotaremos su complemento como $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.

En la sección siguiente, estudiaremos el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales mónicos con respecto a un caso especial de productos superiormente dominados. En ella se supone que $d = 1$ y el producto interior, llamado de *Gegenbauer-Sobolev*, se define mediante la expresión:

$$\langle f, g\rangle_S = \langle f, g\rangle_\alpha + \lambda \langle f', g'\rangle_\alpha\,, \quad \text{donde} \quad \langle f, g\rangle_\alpha = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,dx$$

con $\alpha > -\frac{1}{2}$ y $\lambda > 0$. Además, se establece el comportamiento asintótico de los ceros y las normas de dichos polinomios. Estos resultados se encuentran publicados en [57].

El propósito de las restantes secciones del capítulo es estudiar el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de Sobolev para productos interiores que están superiormente dominados, donde d es un entero no negativo fijo cualquiera. Los resultados alcanzados aquí, son una extensión de los obtenidos en [55] para $d = 1$ en el caso en que las medidas están soportadas en el eje real. Las secciones § IV.3 y § IV.4 se dedican a comentar resultados básicos conocidos, introducir conceptos y probar afirmaciones auxiliares. Los dos apartados que les siguen tienen el contenido fundamental del capítulo y la última sección se dedica al análisis de algunas consecuencias de lo demostrado en la sección § IV.5.

§ IV.2 Polinomios de Gegenbauer-Sobolev.

Denotemos por $C_n^{(\alpha)}(x)$ al polinomio clásico de Gegenbauer de grado n, mónico y ortogonal con respecto al producto interior

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\,, \quad \alpha > -\frac{1}{2}\,. \tag{4.2}$$

El comportamiento asintótico de los polinomios $C_n^{(\alpha)}$ es bien conocido y se tiene de [80, (8.21.9)] que uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$

$$C_n^{(\alpha)}(x) = 2^{1-2\alpha}(x^2-1)^{-\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^{2\alpha-1}\varphi(x)^{n+\frac{1}{2}}(1+o(1))\,, \tag{4.3}$$

cuando $n\to\infty$, donde

$$\varphi(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\,, \quad \text{con } \sqrt{x^2-1}>0\,, \quad \text{para } x>1\,.$$

De (4.3) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n-2}^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(x)} = \frac{1}{\varphi^2(x)}\,, \tag{4.4}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\Omega = \overline{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]$.

Sea ahora, el producto interior de Gegenbauer-Sobolev

$$\langle f, g\rangle_S := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx + \lambda\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx \tag{4.5}$$

con $\alpha > -\frac{1}{2}$ y $\lambda \geq 0$. Claramente, cuando $\lambda = 0$ tenemos el producto interior de Gegenbauer clásico (4.2); por ello en adelante supondremos que $\lambda > 0$. El producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ está definido positivo y, por lo tanto, existe la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales. Además, si denotamos por $Q_n^{(\alpha)}(x)$ el n-ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a (4.5) entonces $grad\,Q_n^{(\alpha)}(x) = n$ y $Q_n^{(\alpha)}(-x) = (-1)^n Q_n^{(\alpha)}(x)$. Las normas asociadas a (4.2) y (4.5) se denotarán por $\|f\|_\alpha := \sqrt{\langle f, f\rangle_\alpha}$ y $\|f\|_S; = \sqrt{\langle f, f\rangle_S}$ respectivamente.

Los polinomios ortogonales de Gegenbauer-Sobolev y sus propiedades algebraicas fueron estudiados en [65]. Dichos polinomios constituyen un caso particular de los llamados pares coherentes de medidas simétricos, ya mencionados en el capítulo introductorio. De [34] se sabe que los polinomios ortogonales mónicos de

Gegenbauer-Sobolev y los de Gegenbauer están relacionados mediante la fórmula de recurrencia a tres términos

$$Q_n^{(\alpha)}(x) - d_{n-2}(\lambda) Q_{n-2}^{(\alpha)}(x) = C_n^{(\alpha)}(x) - \xi_{n-2}^{(\alpha)} C_{n-2}^{(\alpha)}(x)\,, \tag{4.6}$$

donde

$$\xi_n^{(\alpha)} = \frac{(n+2)(n+1)}{4(n+\alpha+1)(n+\alpha)}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \xi_{n-2}^{(\alpha)} = 1/4, \tag{4.7}$$

y $\{d_{n-2}(\lambda)\}$ es una sucesión de números reales positivos, tales que

$$d_n(\lambda) = O(\frac{1}{n^2}), \tag{4.8}$$

Nuestro propósito aquí es deducir la asintótica fuerte de los polinomios de Gegenbauer-Sobolev a partir del comportamiento asintótico del cociente

$$\frac{Q_n^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(x)}\,. \tag{4.9}$$

Los ceros de Q_n han sido estudiados en [59] y [65], de los resultados del capítulo II sabemos que están acotados, pero demostraremos en este caso que cuando $n \to \infty$ se acumulan en $[-1, 1]$. El siguiente teorema establece el comportamiento asintótico de (4.9).

Teorema 4.18 *Con la notación introducida anteriormente se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(x)} = \frac{1}{\varphi'(x)}\,, \tag{4.10}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \backslash [-1, 1]$.

Demostración. Denotemos

$$Y_n(x) := \frac{Q_n^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(x)}\,, \quad \delta_n(x) := d_{n-2}(\lambda) \frac{C_{n-2}^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(x)}\,, \quad \beta_n(x) := 1 - \xi_{n-2}^{(\alpha)} \frac{C_{n-2}^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(x)}\,.$$

Ahora, la fórmula (4.6) puede reescribirse como

$$Y_n(x) - \delta_n(x) Y_{n-2}(x) = \beta_n(x)\,, \tag{4.11}$$

de donde la sucesión $\{Y_n\}$ de funciones analíticas en Ω queda definida unívocamente, para los valores iniciales $Y_0(x) \equiv Y_1(x) \equiv 1$.

Es claro que

$$|Y_n(x)| \leq |\delta_n(x)||Y_{n-2}(x)| + |\beta_n(x)| \,. \tag{4.12}$$

Combinando (4.4) y (4.8) tenemos que existe $n_0 \in I\!N$ tal que

$$|\delta_n(x)| < \frac{1}{2}\,, \quad n \geq n_0. \tag{4.13}$$

Por otro lado,

$$|\beta_n(x)| \leq 1 + \xi_{n-2}^{(\alpha)} \left| \frac{C_{n-2}^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(x)} \right| .$$

Usando (4.4), (4.7) y la desigualdad $|\varphi(x)|^2 > 1/4$ para $x \notin [-1,1]$ se deduce la existencia de $B > 0$ y $n_1 \in I\!N$ tales que

$$|\beta_n(x)| < B\,, \quad n \geq n_1\,. \tag{4.14}$$

Por (4.12), (4.13) y (4.14) obtenemos que para $n \geq n_2 = \max\{n_0, n_1\}$,

$$|Y_n(x)| < \frac{1}{2}|Y_{n-2}(x)| + B\,. \tag{4.15}$$

Consideremos la sucesión

$$Z_n(x) = \begin{cases} |Y_n(x)|\,, & n \leq n_2\,, \\ \frac{1}{2} Z_{n-2}(x) + B\,, & n > n_2\,. \end{cases}$$

Para $n > n_2$,

$$Z_{n+2r} = \left(\frac{1}{2}\right)^r Z_n + 2B\left(1 - \frac{1}{2^r}\right) . \tag{4.16}$$

Tomando límite cuando $r \to \infty$ en (4.16) se obtiene que $Z_n(x)$ está uniformemente acotada para todo n lo suficientemente grande. Más aún, $0 < |Y_n(x)| \leq Z_n(x)$, para todo $n \in I\!N$. Luego, $Y_n(x)$ está uniformemente acotada y tomando límite en (4.11) cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$\lim_n Y_n(x) = \lim_n \frac{Q_n^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(x)} = 1 - \frac{1}{4\,\varphi^2(x)}\,, \tag{4.17}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω . Nótese que para $x \in \Omega$

$$1 - \frac{1}{4\varphi^2(x)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi'(x)}\,. \tag{4.18}$$

Finalmente de (4.17) y (4.18) se concluye el resultado (4.10). ■

Ahora estudiaremos el comportamiento de la norma de Sobolev de los polinomios $\{Q_n^{(\alpha)}(x)\}$. Con la notación

$$\tau_n^{(\alpha)} := \|C_n^{(\alpha)}\|^2 = \langle C_n^{(\alpha)}(x), C_n^{(\alpha)}(x)\rangle_\alpha = \pi 2^{1-2\alpha-2n} \frac{n!\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha)},$$

(ver [65], [80, (4.7.15)]) y

$$\tilde{\tau}_n^{(\alpha)} := \|Q_n^{(\alpha)}\|^2 = \langle Q_n^{(\alpha)}(x), Q_n^{(\alpha)}(x)\rangle_S ,$$

se cumple el siguiente teorema

Teorema 4.19 *Para todo $n \geq 3$ se tiene que*

$$\tau_n^{(\alpha)} + \lambda n^2 \tau_{n-1}^{(\alpha)} \quad \leq \quad \tilde{\tau}_n^{(\alpha)} \quad \leq \quad \tau_n^{(\alpha)} + (\xi_{n-2}^{(\alpha)})^2 \tau_{n-2}^{(\alpha)} + \lambda n^2 \tau_{n-1}^{(\alpha)} \tag{4.19}$$

donde $\xi_{n-2}^{(\alpha)}$ está definido en (4.7). En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n-1}\tilde{\tau}_n^{(\alpha)}}{n^2} = \pi\, 2^{1-2\alpha}\lambda\,. \tag{4.20}$$

Demostración. De la propiedad de extremalidad de la norma de Gegenbauer sabemos que

$$\tau_n^{(\alpha)} = \inf\{\langle P, P\rangle_\alpha : P \in I\!P, \mathit{grad}\, P = n, P \ \text{ mónico}\}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_n^{(\alpha)} &= \langle Q_n^{(\alpha)}(x), Q_n^{(\alpha)}(x)\rangle_S \\
&= \langle Q_n^{(\alpha)}(x), Q_n^{(\alpha)}(x)\rangle_\alpha + \lambda\langle (Q_n^{(\alpha)}(x))', (Q_n^{(\alpha)}(x))'\rangle_\alpha \\
&\geq \langle C_n^{(\alpha)}(x), C_n^{(\alpha)}(x)\rangle_\alpha + \lambda n^2 \langle C_{n-1}^{(\alpha)}(x), C_{n-1}^{(\alpha)}(x)\rangle_\alpha \\
&= \tau_n^{(\alpha)} + \lambda n^2 \tau_{n-1}^{(\alpha)}\,.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Por otro lado, el polinomio $R_n^{(\alpha)}(x) = C_n^{(\alpha)} - \xi_{n-2}^{(\alpha)} C_{n-2}^{(\alpha)}$ que aparece en el miembro derecho de la fórmula (4.6) satisface la relación (ver (3.3.4) en [65])

$$\left(R_n^{(\alpha)}(x)\right)' = n C_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,, \quad n \geq 2\,.$$

Esto significa que

$$\begin{aligned}\langle R_n^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x)\rangle_S &= \|R_n^{(\alpha)}(x)\|_\alpha^2 + \lambda\| \left(R_n^{(\alpha)}\right)' \|_\alpha^2 \\ &= \|C_n^{(\alpha)} - \xi_{n-2}^{(\alpha)} C_{n-2}^{(\alpha)}\|_\alpha^2 + \lambda n^2 \|C_{n-1}^{(\alpha)}\|_\alpha^2 \\ &= \|C_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2 + \left(\xi_{n-2}^{(\alpha)}\right)^2 \|C_{n-2}^{(\alpha)}\|_\alpha^2 + \lambda n^2 \|C_{n-1}^{(\alpha)}\|_\alpha^2 \,.\end{aligned}$$

Entonces, de la correspondiente propiedad extremal de $\tilde{\tau}_n^{(\alpha)}$ se llega a que

$$\tilde{\tau}_n^{(\alpha)} \le \langle R_n^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x)\rangle_S = \tau_n^{(\alpha)} + \left(\xi_{n-2}^{(\alpha)}\right)^2 \tau_{n-2}^{(\alpha)} + \lambda n^2 \tau_{n-1}^{(\alpha)} \,. \tag{4.22}$$

De las desigualdades (4.21) y (4.22), se tiene el resultado (4.19). Tomando límite en (4.19) cuando $n \to \infty$, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n-1}\tilde{\tau}_n^{(\alpha)}}{n^2} = \lambda \lim_{n\to\infty} 4^{n-1}\tau_{n-1}^{(\alpha)} \,.$$

Finalmente, el uso de la fórmula explícita para $\tau_n^{(\alpha)}$ nos permite obtener (4.20).
■

Por último haremos algunas observaciones sobre el comportamiento de los ceros de $Q_n^{(\alpha)}(x)$. Nótese que la asintótica fuerte de $Q_n^{(\alpha)}$ implica el cumplimiento de la asintótica débil. Es decir, si asociamos cada $Q_n^{(\alpha)}(x)$ con la medida contadora de sus ceros (ver (§ $III.5$))

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{Q_n^{(\alpha)}(\xi)=0} \delta_\xi \,,$$

entonces

$$d\mu_n(x) \longrightarrow d\omega_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.23}$$

en la topología *-débil, donde $d\omega_{[-1,1]}(x)$ es la medida de equilibrio sobre $[-1,1]$.

Más aún, es conocido (ver [65]) que los ceros de los polinomios ortogonales de Gegenbauer-Sobolev $Q_n^{(\alpha)}(x)$ son reales y simples,y que se entrelazan con los ceros de los polinomios ortogonales de Gegenbauer $C_n^{(\alpha)}(x)$. Además, para $\alpha \ge \frac{1}{2}$ están contenidos en el intervalo $[-1,1]$ y para $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ existe a lo sumo un par de ceros simétricos con respecto al origen fuera del intervalo $[-1,1]$. El Teorema 4.18 implica la siguiente afirmación:

Corolario 4.9 *Todas las raíces de $Q_n^{(\alpha)}(x)$ se acumulan en $[-1,1]$, esto es,*

$$\bigcap_{n\ge 1} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{z : Q_k^{(\alpha)}(z) = 0\}} = [-1,1] \,. \tag{4.24}$$

Demostración. Es suficiente observar que $\frac{Q_n^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(x)}$ es una sucesión de funciones analíticas en $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$, mientras que, $\varphi(x)$ es analítica y no tiene ceros en $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$. Entonces, los ceros de $Q_n^{(\alpha)}(x)$ no pueden acumularse fuera de $[-1,1]$. Además, (4.23) implica que los ceros son densos en [-1,1]. ■

§ IV.3 Funciones analíticas y el problema extremal de Szegő.

Como se puede observar en el capítulo III, el marco adecuado para el estudio del comportamiento asintótico de la raíz n-ésima es la Teoría del Potencial Logarítmico. En su lugar, para el comportamiento asintótico fuerte, el medio ambiente natural lo encontramos en la Teoría de Espacios de Hardy. A continuación comentamos los tópicos de dicha teoría que serán usados en el presente capítulo. Para una consulta más amplia de los mismos recomendamos las referencias [23] y [72].

Además, motivado por la estrecha conexión existente entre el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales y el problema extremal de Szegő, se recordarán algunas nociones relativas a dicho tópico. Las mismas están referidas en la bibliografía [80] y [83].

Definición 4.6 *Sea μ una medida y $\mu = \rho(x)\,dx + \mu_s$ su descomposición de Lebesgue-Radon-Nikodym , donde $\rho(x)$ es positiva casi dondequiera sobre Δ y μ_s es una medida singular (con respecto a la medida de Lebesgue) en Δ. La medida μ se dice que está en la* clase de Szegő *sobre $\Delta = [-1,1]$ $(\mu \in S(\Delta))$ si* Sop $\mu \subset \Delta$ *y*

$$\int_{-1}^{1} \frac{\log \mu'(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx > -\infty\,. \tag{4.25}$$

Obviamente, la condición de Szegő implica que $\rho(x) > 0$ casi dondequiera en Δ.

Supongamos que la medida $d\mu(x)$ está en la clase de Szegő sobre $\Delta = [-1,1]$, entonces existe una única función $\mathcal{G}(z)$, holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Delta$, que satisface:

1. $\mathcal{G}(z) \neq 0$ para $z \in \Omega$,

2. $\mathcal{G}(\infty) > 0$,

3. para casi todo $x \in (-1,\ 1)$

$$\lim_{y \to 0} |\mathcal{G}(\, x + \ iy\,)| = \rho(x)\,.$$

En efecto, $\ln|\mathcal{G}|$ es la solución del problema de Dirichlet en Ω con condición de frontera $\ln \rho$ sobre Δ. Sean ahora $g(z,\infty)$ la función de Green en Ω y Γ_r la curva de nivel $\Gamma_r = \{z \in \Omega : g(z,\infty) = r\}$ con $r \in \mathbb{R}_+$.

Definición 4.7 *Sea f analítica en Ω, diremos que f es de clase $\mathbb{E}^1(\Omega)$, $f \in \mathbb{E}^1(\Omega)$ (ver [23] Cap. 10), si*

$$\sup_{r>0} \int_{\Gamma_r} |f(z)||dz| < +\infty\,.$$

Mientras que, f es de clase $\mathbb{E}^2(\Omega,\rho)$, $f \in \mathbb{E}^2(\Omega,\rho)$, si $|f^2(z)\mathcal{G}(z)| \in \mathbb{E}^1(\Omega)$.

Es conocido que toda $f \in \mathbb{E}^2(\Omega,\rho)$ tiene límite no tangencial para casi todo $x \in (-1,1)$, es decir que:

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \lim_{y\to 0^+} f(\,x + \ iy\,) \quad \text{y} \\ f_-(x) &= \lim_{y\to 0^-} f(\,x + \ iy\,) \end{aligned} \tag{4.26}$$

para casi todo $x \in (-1,1)$. Adems, f puede recuperarse a partir de sus valores frontera utilizando la integral de Cauchy. Como consecuencia de esto se tiene el siguiente resultado ([83], Corolario 7.4):

Lema 4.5 *Dado un peso $\rho \in S(\Delta)$ y un subconjunto compacto $\Sigma \subset \Omega$, existe una constante $M = M(\Sigma)$ tal que*

$$\max_{z\in\Sigma} |f(z)|^2 \le M \int_\Delta \left(|f_+(x)|^2 + |f_-(x)|^2\right) \rho(x)dx \quad \textit{para toda} \quad f \in \mathbb{E}^2\,(\Omega,\rho)\ .$$

El espacio $\mathbb{E}^2(\Omega,\rho)$ se convierte en un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \left(f_+(x)\overline{g_+}(x) + f_-(x)\overline{g_-}(x)\right)\rho(x)\,dx\,. \tag{4.27}$$

Sea ahora $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto interior (4.27) en $\mathbb{E}^2(\Omega,\rho)$. El problema extremal de Szegő (ver [80] y [83]) consiste en encontrar una función $\mathcal{F}(z)=\mathcal{F}(\rho;z)$, $\mathcal{F}\in\mathbb{E}^2(\Omega,\rho)$ con $\mathcal{F}(\infty)=1$, tal que $\|\mathcal{F}\|=\nu(\rho)$ donde

$$\nu(\rho)=\inf\left\{\|F\|:F\in\mathbb{E}^2(\Omega,\rho),F(\infty)=1\right\}\ . \tag{4.28}$$

Del Teorema de Szegő-Kolmogorov-Krein es conocido que $\mu\in S(\Delta)$ si y solo si $\nu(\rho)>0$ y existe una única función extremal $\mathcal{F}(z)=\mathcal{F}(\rho;z)$ que resuelve el problema extremal de Szegő. Además, (ver [83], Teorema 6.2) se cumple

$$\mathcal{F}^2(z)=\varphi'(z)\frac{\mathcal{G}(\infty)}{\mathcal{G}(z)}\,,\quad z\in\Omega\,, \tag{4.29}$$

donde $\mathcal{G}(z)$ es la función holomorfa previamente definida.

Sea P_n el n-ésimo polinomio ortogonal mónico asociada a μ,

$$\gamma_n(\mu)=\int_\Delta (P_n)^2(x)\,d\mu(x)$$

y $\mathcal{F}(z)$ la solución del problema extremal (4.28) asociado a ρ. Denotemos por $\varphi(z)$ la transformación conforme de Ω en el exterior del círculo $|z|=\frac{1}{2}$; o sea, $\varphi(z)=\frac{1}{2}(z+\sqrt{z^2-1})$, donde la raíz cuadrada se toma de modo que $|z+\sqrt{z^2-1}|>1$ para $z\in\Omega$.

El siguiente resultado se sigue del bien conocido teorema de Bernstein-Szegő .

Lema 4.6 *Si $\mu\in S(\Delta)$ y $\rho(x)=\mu'(x)$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty}4^n\,\gamma_n(\mu)\;=\;\nu(\rho) \tag{4.30}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n(z)}{\varphi^n(z)}=\mathcal{F}(z)\,, \tag{4.31}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

También haremos uso del núcleo de Szegő o núcleo Reproductor $\mathcal{K}(t,z)$, asociado a la región Ω y al peso ρ definido sobre Δ (ver [83, §7])). Por el teorema de representación de Riesz, $\mathcal{K}(t,z)$ queda unívocamente determinado por la propiedad

$$f(z)=\langle f,\mathcal{K}(\cdot,z)\rangle\ ,\quad \text{con}\ \ z\in\Omega\ \ \text{y}\ \ f\in\mathbb{E}^2(\Omega,\rho); \tag{4.32}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior definido en (4.27). Además

$$\mathcal{K}(z, \infty) = \frac{\mathcal{F}(z)}{\nu(\rho)} \tag{4.33}$$

y se cumple el siguiente resultado, que es un caso particular del Lema 12.1 en [83].

Lema 4.7 *Si $\mu \in S(\Delta)$ y $\rho(x) = \mu'(x)$ entonces cuando $n \longrightarrow \infty$ se tiene que*

$$\int_{\Delta} \varphi_{+}^{n}(x)\, \varphi_{-}^{-n}(x)\, \mathcal{K}(x, z_1)\overline{\mathcal{K}(x, z_2)}\rho(x)dx = o(1)\ ,$$

uniformemente para z_1 y z_2 en cualquier subconjunto cerrado de Ω.

§ IV.4 Lema auxiliar.

Antes de comenzar el estudio del comportamiento asintótico de los polinomios de Sobolev se introducirán algunas definiciones preliminares y se probará un lema auxiliar.

Sea R_n un polinomio mónico arbitrario de grado n. A partir de R_n definamos el polinomio mónico primitivo asociado $\Pi(R_n, x)$, normalizado con la condición $\Pi(R_n, -1) = 0$

$$\Pi(R_n, x) \ :=\ (n+1) \int_{-1}^{x} R_n(t)\, dt\,.$$

Notemos que $\Pi(R_n, x)$ tiene grado n+1 y $\Pi'(R_n, x) = (n+1)\, R_n(x)$.

Ahora, denotemos $\Pi_0(R_n, x) := R_n(x)$ y definamos por recurrencia la siguiente familia de d polinomios mónicos también asociados a $R_n(x)$:

$$\Pi_i(R_n, x) := \Pi(\Pi_{i-1}(R_n, t), x),\ \text{donde}\ i\ =\ 1,\ 2,\ \ldots d\ . \tag{4.34}$$

Consecuentemente, el grado de $\Pi_i(R_n, x)$ es $n + i$ y

$$\Pi_i^{(k)}(R_n, x)\ =\ \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!}\, \Pi_{i-k}(R_n, x)\,,\ 0\ \leq\ k\ \leq\ n+i\ . \tag{4.35}$$

Por otra parte, para una medida finita de Borel μ con infinitos puntos de crecimiento, denotamos por $P_n(\mu; z)$ al n-ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a la misma y por γ_n al cuadrado de su norma, es decir

$$\gamma_n = \gamma_n(\mu) = \|\, P_n \,\|_{L^2(\rho)}^2 = \int |P_n(\mu; x)|^2\, d\mu(x)\,.$$

Entonces

$$p_n(\mu; z) = \frac{P_n(\mu; z)}{\sqrt{\gamma_n(\mu)}}$$

es el correspondiente polinomio ortonormal de grado n. Cuando μ sea absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y $\mu' = \rho$, en las notaciones usaremos ρ en lugar de μ.

Dado un conjunto A, χ_A denotará a la función característica del conjunto A es decir:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

El siguiente lema es fundamental para la demostración de los principales resultados del capítulo.

Lema 4.8 *Sea $d\mu(x) = \rho(x)\,dx$ una medida finita positiva de Borel, con soporte en $[-1,1]$. Si $\frac{1}{\rho} \in L^1([-1,1])$ entonces:*

1. *Para cada x fijo, $x \in [-1,1]$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Pi_{d-k}(P_n, x)}{(n+d)^k \sqrt{\gamma_n}} = 0\,, \;\; k = 0,\, 1,\, \ldots,\, d-1. \tag{4.36}$$

2. *Existe una constante K, $0 < K < +\infty$, tal que*

$$\left| \frac{\Pi_{d-k}(P_n, x)}{(n+d)^k \sqrt{\gamma_n}} \right| \leq K\,, \;\; \textit{para todo } x \in [-1,1] \textit{ y } k = 0,\, 1,\, \ldots,\, d-1. \tag{4.37}$$

Demostración.- La prueba del resultado se llevará a cabo por inducción decreciente respecto al parámetro k.

Primeramente supongamos que $k = d-1$, x es fijo ($x \in [-1,1]$) y sea

$$\alpha(x,t) := \chi_{[-1,x]}(t)\frac{1}{\rho(t)}.$$

Entonces para todo $x \in [-1,1]$, la condición $\frac{1}{\rho} \in L^1([-1,1])$ garantiza que $\alpha(x,\cdot) \in L^2(\rho)$.

Luego, por la desigualdad de Bessel se tendrá que los coeficientes de Fourier

$$\hat{\alpha}_{n,d-1}(x) := \int_{-1}^{1} \alpha(x,t) p_n(\rho; t)\, \rho(t)\, dt = \int_{-1}^{x} p_n(\rho; t)\, dt = \frac{\Pi_1(P_n, x)}{(n+1)\sqrt{\gamma_n}}$$

de $\alpha(x,\cdot)$ con respecto a la sucesión de polinomios ortonormales $\{p_n(\rho;\cdot)\}$ satisfacen:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_{n,d-1}(x) = 0 \quad \text{y}$$
$$|\hat{\alpha}_{n,d-1}(x)| \le \int_{-1}^{1} \frac{1}{\rho(t)}\, dt \;=\; K_{d-1} < \infty \;\text{ para todo }\; x \in [-1,1] \tag{4.38}$$

lo que permite establecer la veracidad del lema para $k = d-1$.

Sea ahora
$$\hat{\alpha}_{n,k}(x) \;:=\; \frac{n!\,\Pi_{d-k}(P_n,x)}{(n+d-k)!\,\sqrt{\gamma_n}},$$
y supongamos que para un valor dado de k ($k = 0,\ 1,\ \dots,\ d-1$)

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_{n,k}(x) = 0 \text{ para cada } x \text{ fijo} \tag{4.39}$$

y existe una constante K_k, $0 < K_k < +\infty$, tal que

$$|\hat{\alpha}_{n,k}(x)| \le K_k \text{ para todo } x \in [-1,1]. \tag{4.40}$$

Probemos entonces que esta afirmación sigue siendo cierta si sustituimos k por $k-1$.

Por construcción

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{n,k-1}(x) \;&=\; \frac{n!\,\Pi_{d+1-k}(P_n,x)}{(n+d+1-k)!\,\sqrt{\gamma_n}} \\
&=\; \frac{n!\,\Pi(\Pi_{d-k}(P_n,t),x)}{(n+d+1-k)!\,\sqrt{\gamma_n}} \\
&=\; \frac{n!}{(n+d-k)!\,\sqrt{\gamma_n}} \int_{-1}^{x} \Pi_{d-k}(P_n,t)\,dt \\
&=\; \int_{-1}^{1} \chi_{[-1,x]}(t)\hat{\alpha}_{n,k}(t)\,dt\ .
\end{aligned}$$

Pero, por definición de $\chi_{[-1,x]}(t)$ y (4.39) – (4.40), es claro que:

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[-1,x]}(t)\hat{\alpha}_{n,k}(t) = 0 \;\text{ para cada } t \text{ fijo }\; t \in [-1,1]$$

y
$$|\hat{\alpha}_{n,k-1}(x)| \le \int_{-1}^{1} |\chi_{[-1,x]}(t)\hat{\alpha}_{n,k}(t)|\,dt \le 2\,K_k \;\text{ para todo } x \in [-1,1].$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue ([72], Teorema 1.34) se tiene que $\lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_{n,k-1}(t) = 0$ para cada x fijo ($x \in [-1,1]$).

Entonces se ha probado que para cada x fijo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+d-k)!\,\sqrt{\gamma_n}}\,\Pi_{d-k}(P_n,x) \;=\; 0 \quad \text{y}$$

$$\left|\frac{n!}{(n+d-k)!\,\sqrt{\gamma_n}}\,\Pi_{d-k}(P_n,x)\right| \;\leq\; K,$$

donde $K = \max_{0\leq k\leq d-1} K_k = 2^d\, K_{d-1}$, para todo $x \in [-1,1]$ y $k \;=\; 0,\, 1,\, \ldots\, ,\, d-1$, lo que es equivalente a (4.36) – (4.37). ■

§ IV.5 Asintótica de normas y derivadas.

Aquí investigaremos el comportamiento asintótico de la norma de los polinomios de Sobolev. Sean entonces

$$\tau_n = \langle Q_n, Q_n\rangle_S = \min\left\{\langle Q, Q\rangle_S : Q(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i\right\}\,, \tag{4.41}$$

$P_n(z) = P_n(\mu_d; z)$ el n-ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a la medida μ_d del producto (4.1) y denotemos el cuadrado de su norma mediante

$$\gamma_n = \gamma_n(\mu_d) = \|\, P_n \,\|_d^2 = \int_{\Delta_d} |P_n(\mu_d; x)|^2\, d\mu_d(x)\,.$$

Entonces,

Teorema 4.20 *Si $d\mu_d(x) = \rho(x)dx$ con $\rho \in S([-1,1])$ y $\{\mu_k\}_{k=0}^{d-1}$ son medidas finitas de Borel cuyos soportes están contenidos en $[-1,1]$, se cumple que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{n^{2d}\,\gamma_{n-d}} = 1\,. \tag{4.42}$$

Demostración.- De la propiedad de extremalidad para γ_n, es claro que

$$\gamma_{n-d} = \|P_{n-d}\|_d^2 \leq \left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \|Q_n^{(d)}\|_d^2,$$

mientras que de (4.41)

$$\tau_n = \|Q_n\|_S^2 = \sum_{k=0}^{d} \|Q_n^{(k)}\|_k^2 = \sum_{k=0}^{d-1} \|Q_n^{(k)}\|_k^2 + \|Q_n^{(d)}\|_d^2 \,.$$

Luego

$$\left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \frac{\tau_n}{\gamma_{n-d}} \geq \sum_{k=0}^{d-1} \left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \frac{\|Q_n^{(k)}\|_k^2}{\gamma_{n-d}} + 1,$$

y, por tanto,

$$\liminf_n \left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \frac{\tau_n}{\gamma_{n-d}} \geq 1 \,. \tag{4.43}$$

En adelante nos dedicaremos a probar que:

$$\limsup_n \left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \frac{\tau_n}{\gamma_{n-d}} \leq 1 \,. \tag{4.44}$$

Supongamos primeramente que $\frac{1}{\rho} \in L^1([-1,1])$ y sea $\Pi_d(P_{n-d}, x)$ como en (4.34), recordemos que el mismo es un polinomio mónico de grado n.

Ahora de la propiedad extremal para τ_n y (4.35) se sigue que

$$\begin{aligned}
\tau_n &= \|Q_n\|_S^2 \leq \|\Pi_d(P_{n-d}, x)\|_S^2 \\
&= \sum_{k=0}^{d-1} \|\Pi_d^{(k)}(P_{n-d}, x)\|_k^2 + \|\Pi_d^{(d)}(P_{n-d}, x)\|_d^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{d-1} \left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]^2 \|\Pi_{d-k}(P_{n-d}, x)\|_k^2 + \left[\frac{n!}{(n-d)!}\right]^2 \|P_{n-d}\|_d^2 \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \frac{\tau_n}{\gamma_{n-d}} \leq \sum_{k=0}^{d-1} \left[\frac{(n-d)!}{(n-k)!}\right]^2 \frac{\|\Pi_{d-k}(P_{n-d}, x)\|_k^2}{\gamma_{n-d}} + 1,$$

De acuerdo con el Lema 4.8, para cada x fijo, $x \in [-1,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-d)!}{(n-k)!} \frac{\Pi_{d-k}(P_{n-d}, x)}{\gamma_{n-d}} = 0\,,\ k = 0,\, 1,\, \ldots,\, d-1\,,$$

y existe una constante K, $0 < K < +\infty$, tal que

$$\frac{(n-d)!}{(n-k)!} \left|\frac{\Pi_{d-k}(P_{n-d}, x)}{\gamma_{n-d}}\right| \leq K\,,$$

para todo $x \in [-1,1]$ y $k = 0, 1, \dots, d-1$.

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue ([72], Teorema 1.34), obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{(n-d)!}{(n-k)!} \frac{\Pi_{d-k}(P_{n-d}, x)}{\gamma_{n-d}} \right\|_k^2 = 0\,,\ \ k = 0, 1, \dots, d-1\,, \tag{4.45}$$

y, consecuentemente, se cumple (4.44) cuando $\frac{1}{\rho} \in L^1([-1,1])$.

Supongamos ahora que ρ es una función de peso general que satisface la condición de Szegő en $[-1,1]$, sea entonces δ una constante positiva cualquiera (la cual fijaremos adelante) y definamos una nueva función de peso $\tilde{\rho}(x) := \rho(x) + \delta$. Obsérvese que $\frac{1}{\tilde{\rho}} \in L^1([-1,1]))$.

Sea $\tilde{P}_n$ el n-ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a $d\tilde{\mu}(x) := \tilde{\rho}(x)\,dx$ y $\tilde{\gamma}_n := \|\, \tilde{P}_n \,\|^2_{L^2(\tilde{\rho})}$ el cuadrado de su norma, donde $\|.\|_{L^2(\tilde{\rho})}$ denota la norma usual en el espacio de Hilbert $L^2(\tilde{\rho})$.

Por el Lema 4.8 y repitiendo los argumentos usados en la demostración de (4.45) es obvio que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{(n-d)!}{(n-k)!} \frac{\Pi_{d-k}(\tilde{P}_{n-d}, x)}{\tilde{\gamma}_{n-d}} \right\|_k^2 = 0\,,\ \ k = 0, 1, \dots, d-1. \tag{4.46}$$

Usando de nuevo la extremalidad de Q_n se tiene

$$\tau_n = \|Q_n\|_S^2 \leq \sum_{k=0}^{d-1} \left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]^2 \|\Pi_{d-k}(\tilde{P}_{n-d}, x)\|_k^2 + \left[\frac{n!}{(n-d)!}\right]^2 \tilde{\gamma}_{n-d}.$$

Consecuentemente, $\left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \tau_n \leq \tilde{\gamma}_{n-d}$ y por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \frac{\tau_n}{\gamma_{n-d}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{n-d}}{\gamma_{n-d}}\,.$$

Es conocido, (ver [80], Teorema 12.7.1, página 309), que para n suficientemente grande

$$\tilde{\gamma}_{n-d} \cong \sqrt{\pi}\, 2^{n-d} \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln \tilde{\rho}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \right\}\,,$$

$$\gamma_{n-d} \cong \sqrt{\pi}\, 2^{n-d} \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \right\}\,.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{n-d}}{\gamma_{n-d}} = \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\ln \tilde{\rho}(x) - \ln \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \right\}\,.$$

En lo que sigue usaremos argumentos de continuidad en la métrica dada por

$$\operatorname{dist}(\vartheta,\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|\ln\vartheta(x)-\ln\sigma(x)|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$$

para ϑ, $\sigma\in S(\Delta)$. En efecto, por el Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue ([72], Teorema 1.26),

$$\operatorname{dist}(\tilde{\rho},\rho)\to 0 \quad \text{cuando} \quad \delta\downarrow 0\,.$$

Así para un $\varepsilon>0$ arbitrario, podemos tomar $\delta>0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{(n-d)!}{(n-k)!}\right]^2\frac{\tau_n}{\gamma_{n-d}}\le 1+\varepsilon\,.$$

Finalmente, (4.44) se tiene por la elección arbitraria de $\varepsilon>0$, y (4.42) es una consecuencia de (4.43) – (4.44). ■

El siguiente resultado describe el comportamiento asintótico de la derivada de orden d de los polinomios de Sobolev.

Teorema 4.21 *Sean $d\mu_d(x)=\rho(x)dx$ con $\rho\in S([-1,1])$, $\{\mu_k\}_{k=0}^{d-1}$ una familia de medidas finitas de Borel cuyos soportes están contenidos en $[-1,1]$ y $\mathcal{F}(z)$ la solución del problema extremal (4.28) asociado a μ_d, entonces se cumplen las dos afirmaciones equivalentes:*

1.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n^{(d)}(z)}{n^d\,\varphi^{n-d}(z)}=\mathcal{F}(z)\,, \tag{4.47}$$
uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

2.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n^{(d)}(z)}{n^d\,P_{n-d}(\rho;z)}=1\,, \tag{4.48}$$
uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

Demostración.- En primer lugar notemos que (4.48) es una consecuencia directa de (4.47) y (4.31) del Lema 4.6. Por otro lado, si se tiene (4.48), entonces

(4.47) se sigue de (4.31). Luego, (4.47) y (4.48) son equivalentes, por lo que en el resto de la demostración solo nos ocuparemos de probar (4.47). Sean entonces

$$\Psi_n(z) = \frac{2^{n-d}(n-d)!}{n!}\, Q_n^{(d)}(z)$$

y

$$\Phi_n(z) = 2^{n-d}\left(\varphi_-^{n-d}(z)\,\mathcal{F}_-(z) + \varphi_+^{n-d}(z)\,\mathcal{F}_+(z)\right) \ ,$$

donde $\mathcal{F}(z)$ es la solución del problema extremal de Szegő (4.28) asociado a μ_d y los subíndices $+$ y $-$ denotan los valores frontera sobre Δ (ver (4.26)). Luego

$$\|\Psi_n - \Phi_n\|_d^2 = \|\Psi_n\|_d^2 + \|\Phi_n\|_d^2 - 2\Re(\langle \Psi_n, \Phi_n\rangle_d) \ , \tag{4.49}$$

aquí $\Re(w)$ denota la parte real del número complejo w. Teniendo en cuenta (4.42),

$$\begin{aligned}
\|\Psi_n\|_d^2 &= 4^{n-d}\left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \|Q_n^{(d)}(z)\|_d^2 \\
&\le 4^{n-d}\left[\frac{(n-d)!}{n!}\right]^2 \tau_n \\
&= 4^{n-d}\,\gamma_{n-d}\,[1+o(1)] \ .
\end{aligned}$$

De donde

$$\limsup_{n\to\infty} \|\Psi_n\|_d^2 \le \limsup_{n\to\infty} 4^{n-d}\,\gamma_{n-d}\,[1+o(1)] = \nu(\rho) \ . \tag{4.50}$$

Además, del problema extremal (4.28), teniendo en cuenta que $|\varphi(x)| = \frac{1}{2}$ cuando $x\in[-1,1]$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\Phi_n\|_d^2 &= \|2^{n-d}\varphi^{n-d}\mathcal{F}\|^2 + 2\,\Re\left(\langle 2^{n-d}\varphi_+^{n-d}\mathcal{F}_+, 2^{n-d}\varphi_-^{n-d}\mathcal{F}_-\rangle_d\right) \\
&= \nu(\rho) + 2\,\Re\left(\langle 2^{n-d}\varphi_+^{n-d}\mathcal{F}_+, 2^{n-d}\varphi_-^{n-d}\mathcal{F}_-\rangle_d\right) \\
&= \nu(\rho) + o(1)\,,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

ya que el segundo término tiende a cero cuando $n\to\infty$, en virtud del lema 4.7.

Ahora, como Ψ_n es univalente en $\mathbb{C}$ por las propiedades (4.32) – (4.33) del núcleo de Szegő

$$\langle \Psi_n, \Phi_n\rangle_d = \langle \Psi_n, 2^{n-d}\varphi^{n-d}\mathcal{F}\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \frac{(n-d)!}{n!}\frac{Q_n^{(d)}}{\varphi^{n-d}}, \mathcal{F}\right\rangle \\
&= \nu(\rho)\left\langle \frac{(n-d)!}{n!}\frac{Q_n^{(d)}}{\varphi^{n-d}}, K(\cdot,\infty)\right\rangle \\
&= \nu(\rho)\left(\frac{(n-d)!}{n!}\frac{Q_n^{(d)}}{\varphi^{n-d}}\right)(\infty) \\
&= \nu(\rho)\,. \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

Agrupando (4.50), (4.51) y (4.52), puede verse que

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_n - \Phi_n\|_d^2 = 0\,. \qquad (4.53)$$

Ahora, para $z \in \Omega$ por (4.32),

$$
\begin{aligned}
\frac{(n-d)!}{n!}\frac{Q_n^{(d)}}{\varphi^{n-d}}(z) &= \left\langle \Phi_n, 2^{n-d}\left(\varphi_+^{n-d}K_+(\cdot,z) + \varphi_-^{n-d}K_-(\cdot,z)\right)\right\rangle_d \\
&+ \left\langle \Psi_n - \Phi_n, 2^{n-d}\left(\varphi_+^{n-d}K_+(\cdot,z) + \varphi_-^{n-d}K_-(\cdot,z)\right)\right\rangle_d .
\end{aligned}
$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\left\langle \Psi_n - \Phi_n, 2^{n-d}\left(\varphi_+^{n-d}K_+(\cdot,z) + \varphi_-^{n-d}K_-(\cdot,z)\right)\right\rangle_d\right|^2 \leq \|\Psi_n - \Phi_n\|_d^2\,\|K(\cdot,z)\|^2 ,$$

entonces usando (4.53) se tendrá que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left\langle \Psi_n - \Phi_n, 2^{n-d}\left(\varphi_+^{n-d}K_+(\cdot,z) + \varphi_-^{n-d}K_-(\cdot,z)\right)\right\rangle_d\right|^2 = 0\,.$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \Phi_n, 2^{n-d}\left(\varphi_+^{n-d}K_+(\cdot,z) + \varphi_-^{n-d}K_-(\cdot,z)\right)\right\rangle_d \\
&= \langle \mathcal{F}, K(\cdot,z)\rangle + \left\langle 2^{n-d}\varphi_+^{n-d}\mathcal{F}_+, 2^{n-d}\varphi_-^{n-d}\mathcal{F}_-\right\rangle_d \\
&\quad + \left\langle 2^{n-d}\varphi_-^{n-d}\mathcal{F}_-, 2^{n-d}\varphi_+^{n-d}\mathcal{F}_+\right\rangle_d .
\end{aligned}
$$

Por (4.32), el primer término del lado derecho es igual a $\mathcal{F}(z)$, y los dos últimos términos convergen a cero sobre cada subconjunto compacto de Ω, de acuerdo con el Lema 4.7. Luego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-d)!}{n!}\frac{Q_n^{(d)}}{\varphi^{n-d}}(z) = \mathcal{F}(z)\,,$$

sobre cada subconjunto compacto de Ω, de donde se tiene (4.47) y con ello que queda demostrado el teorema. ∎

§ IV.6 Productos con todas las medidas en $S([-1,1])$.

En la práctica, la situación más natural es cuando las medidas $\{\mu_k\}_{k=0}^d$ están soportadas en el mismo intervalo Δ y como anteriormente supondremos que $\Delta = [-1,1]$. En este caso se tiene

Teorema 4.22 *Si $\{\mu_k\}_{k=0}^d$ son medidas de Borel finitas tales que $\mu_k \in S([-1,1])$ para todo $k = 0, 1, \ldots, d$, y $\mathcal{F}(z)$ es la solución del problema extremal* (4.28) *asociado a μ_d, entonces se cumplen las dos afirmaciones equivalentes:*

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^k\,\varphi^{n-k}(z)} = \frac{\mathcal{F}(z)}{[\varphi'(z)]^{d-k}}\,, \tag{4.54}$$
   uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω para todo $k = 0, 1, \ldots, d$.

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^k\,P_{n-k}(z)} = \frac{1}{[\varphi'(z)]^{d-k}}\,; \tag{4.55}$$
   uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω para todo $k = 0, 1, \ldots, d$.

Para simplificar la demostración del teorema, introduzcamos el siguiente lema auxiliar.

Lema 4.9 *Sea η un entero fijo tal que $1 \le \eta \le d$. Bajo las mismas hipótesis del Teorema* 4.22 *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^\eta\,\varphi^{n-k}(z)} = 0\,, \tag{4.56}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω para todo $k = 0, 1, \ldots, \eta-1$.

Demostración.- En la prueba del lema se procederá por inducción decreciente en el parámetro η. Supongamos que $\eta = d$, por el Teorema 4.20 y (4.30) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n-d}\,\tau_n}{n^{2d}} = \lim_{n\to\infty} 4^{n-d}\,\gamma_{n-d}\,\frac{\tau_n}{n^{2d}\,\gamma_{n-d}} = \nu(\rho).$$

Además, por (4.47)

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{Q_n^{(d)}}{n^d\,\varphi^{n-d}} \right\|_d^2 = \|\mathcal{F}\|_d^2 = \nu(\rho).$$

Nótese que

$$\frac{4^{n-d}\,\tau_n}{n^{2d}} = \sum_{k=0}^{d-1} \left\| \frac{2^{n-d}\,Q_n^{(k)}}{n^d} \right\|_k^2 + \left\| \frac{Q_n^{(d)}}{n^d\,\varphi^{n-d}} \right\|_d^2 ,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{d-1} \left\| \frac{2^{d-k}\,Q_n^{(k)}}{n^d\,\varphi^{n-k}} \right\|_k^2 = 0\,,$$

En virtud de la no negatividad de las normas, lo anterior implica que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{2^{d-k}\,Q_n^{(k)}}{n^d\,\varphi^{n-k}} \right\|_k^2 = 0\,,\ \text{ para todo } k,\ k = 0,\,1,\,\dots,\,d-1\,.$$

Pero $\mu_k \in S[-1,1]$ y se cumple el Lema 4.5, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^d\,\varphi^{n-k}(z)} = 0\,,$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω para todo k, $k = 0,\,1,\,\dots,\,d-1$. Es decir nuestro lema se cumple para $\eta = d$.

Como hipótesis de inducción supongamos que si $\eta = \bar{\eta}$ $(1 \le \bar{\eta} \le d)$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^{\bar{\eta}}\,\varphi^{n-k}(z)} = 0\,, \tag{4.57}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω para todo k, $k = 0,\,1,\,\dots,\,\bar{\eta}-1$. Probemos entonces que (4.56) se cumple si $\eta = \bar{\eta}-1$ con $k = 0,\,1,\,\dots,\,\bar{\eta}-2$.

Por (4.57) y el conocido Teorema de Weierstrass ([2], Teorema 5.1) por una parte se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^{\bar{\eta}}\,\varphi^{n-k}(z)} \right]' = 0\,, \tag{4.58}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω para todo k, $k = 0,\,1,\,\dots,\,\bar{\eta}-2$. Por otra parte, usando la fórmula de Leibniz se tendrá

$$\frac{(n-k)\,\varphi'(z)}{n\,\varphi(z)} \left[\frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^{\bar{\eta}-1}\,\varphi^{n-k}(z)} \right] = \frac{1}{\varphi(z)} \frac{Q_n^{(k+1)}(z)}{n^{\bar{\eta}}\,\varphi^{n-(k+1)}(z)} - \left[\frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^{\bar{\eta}}\,\varphi^{n-k}(z)} \right]' .$$

Finalmente, usando (4.57) y (4.58) en la expresión anterior, tendremos el presente lema para $\eta = \bar{\eta}-1$ con $k = 0,\,1,\,\dots,\,\bar{\eta}-2$. ■

Ahora la prueba del Teorema 4.22 quedará con mayor claridad.

Demostración del Teorema 4.22.- Como en el Teorema 4.21, notemos que (4.55) es una consecuencia directa de (4.55) y (4.31) del Lema 4.6. Para probar (4.54) procederemos nuevamente por inducción decreciente, ésta vez en el parámetro k. Para $k = d$, por (4.47), se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(d)}(z)}{n^d\, \varphi^{n-d}(z)} = \mathcal{F}(z)\,,$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

Supongamos ahora que $k = \bar{k}$, con $1 \leq \bar{k} \leq d$, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n^{(\bar{k})}(z)}{n^{\bar{k}}\, \varphi^{n-\bar{k}}(z)} = \frac{\mathcal{F}(z)}{[\varphi'(z)]^{n-\bar{k}}}\,, \tag{4.59}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω. Demostremos entonces que para $k = \bar{k}-1$ se cumple el resultado. Por el Lema 4.9 y el Teorema de Weierstrass ([2], Teorema 5.1) conocemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{Q_n^{(\bar{k}-1)}(z)}{n^{\bar{k}}\, \varphi^{n+1-\bar{k}}(z)}\right]' = 0\,,$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

Usando la fórmula de Leibniz se sigue que

$$\frac{(n+1-\bar{k})\,\varphi'(z)}{n\,\varphi(z)} \frac{Q_n^{(\bar{k}-1)}(z)}{n^{\bar{k}-1}\, \varphi^{n+1-\bar{k}}(z)} = \frac{Q_n^{(\bar{k})}(z)}{n^{\bar{k}}\, \varphi(z)\, \varphi^{n-\bar{k}}(z)} - \left[\frac{Q_n^{(\bar{k}-1)}(z)}{n^{\bar{k}}\, \varphi^{n+1-\bar{k}}(z)}\right]'$$

y por hipótesis de inducción se obtiene (4.59) para $k = \bar{k} - 1$ y con ello se prueba la validez del teorema. ■

§ IV.7 Asintótica del cociente.

Teorema 4.23 *Bajo las hipótesis del Teorema 4.22:*

1. *Los ceros de la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ se acumulan sobre $\Delta = [-1,1]$.*

2. *Se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_{n+d}^{(k_1)}(z)}{n^{k_1-k_2}\, Q_n^{(k_2)}(z)} = \left[\frac{\varphi(z)}{2}\right]^d \left[\frac{2\,\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]^{k_1-k_2}\,, \tag{4.60}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω, donde $0 \leq k_1, k_2 \leq d$ y $d \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración.- En virtud de la definición de $\varphi(z)$ es claro que la función del miembro derecho en (4.55)

$$\frac{1}{[\varphi'(z)]^d} = \left[2\sqrt{z^2-1}\,\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)\right]^d$$

es analítica en $\Omega = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, donde además no posee ceros.

Para cada $z \in \Omega$ escojamos la bola abierta $B(z,r)$ de centro z y radio r de modo que $B(z,r) \subset \Omega$. De (4.55) se tienen que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un natural $N = N(z,r)$ suficientemente grande tal que si $n > N$ entonces:

$$\left|\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} - \frac{1}{[\varphi'(z)]^d}\right| < \varepsilon < L \leq \left|\frac{1}{[\varphi'(z)]^d}\right| ,$$

donde

$$L = \min_{|w-z|=r} \left|\frac{1}{[\varphi'(w)]^d}\right| .$$

Por el Teorema de Rouché (ver [2], Colorario del Teorema 5.20), las funciones

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} \text{ y } \frac{1}{[\varphi'(z)]^{d-k}}$$

poseen el mismo número de ceros en el interior de $B(z,r)$, para todo n lo suficientemente grande. Esto prueba la primera afirmación del teorema.

Para demostrar la segunda afirmación del teorema, recordemos que bajo las condiciones impuestas a μ_d se cumple la fórmula asintótica de Szegő (ver [80] (12.1.3) o también [31] Lema 2) lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+d}(z)}{P_n(z)} = \left[\frac{\varphi(z)}{2}\right]^d \tag{4.61}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos contenidos en Ω, donde d es un número natural cualquiera. Notemos entonces que

$$\frac{Q_{n+d}^{(k_1)}(z)}{n^{k_1-k_2}\, Q_n^{(k_2)}(z)} = \left[\frac{n+d}{n}\right]^{k_1} \frac{Q_{n+d}^{(k_1)}(z)}{[n+d]^{k_1}\, P_{n+d-k_1}(z)} \,\frac{n^{k_2}\, P_{n-k_2}(z)}{Q_n^{(k_2)}(z)} \,\frac{P_{[n-k_2]+[d+k_2-k_1]}(z)}{P_{n-k_2}(z)} .$$

Finalmente de esta fórmula, en virtud de (4.55) y (4.61) se tiene el resultado. ■

Nota 4.1 *Por último, queremos subrayar que en la demostración de los resultados anteriores no interviene la estructura específica del intervalo real* $\Delta = [-1, 1]$*. Así, combinando estas ideas con las empleadas en* [55] *pueden probarse teoremas análogos a* 4.20, 4.21 *y* 4.22 *reemplazando el intervalo* Δ *por una curva cerrada de Jordan o un arco analítico con capacidad logarítmica positiva. Básicamente, solo se necesitaría modificar la definición de la transformación conforme* φ *y algunos detalles técnicos de la demostración.*

Capítulo V

Conclusiones y valoraciones.

Problema de momentos de Sobolev.

El problema de momentos de Sobolev está tratado en el capítulo dos de la tesis. Los resultados que ahí aparecen provienen de [15]. A pesar de que la teoría de momentos ordinaria constituye uno de los pilares sobre los que se construye la teoría de polinomios ortogonales, en el caso de los polinomios ortogonales de Sobolev esta cuestión no había sido abordada con anterioridad a [15].

El concepto de matriz de Hankel-Sobolev introducido en la sección § II.4 sustituye al de matriz de Hankel generada por la sucesión de momentos de la teoría ordinaria. De la propia definición resulta que las matrices de Hankel son un caso particular de las matrices de Hankel-Sobolev. La descomposición canónica (2.9) de la matriz $\mathcal{M}$ en términos de las $d+1$ ($d \in \mathbb{Z}_+$) matrices de Hankel $\{\mathcal{M}_k\}_{k=0}^{d}$, es fundamental para el trabajo posterior. En particular destaquemos que la unicidad de dicha descomposición, probada en el teorema 2.1, a la postre nos permite afirmar que si $\mathcal{M}$ es una matriz es de Hankel-Sobolev para algún $d \in \mathbb{Z}_+$ entonces no lo es para ningún otro $d' \in \mathbb{Z}_+, d' \neq d$. Como consecuencia, si para una matriz $\mathcal{M}$ y un $d \in \mathbb{Z}_+$ el problema de momentos de Sobolev esta definido o determinado entonces no lo estará para otro $d' \in \mathbb{Z}_+$ (incluido el problema de momentos ordinario $d = 0$).

El teorema 2.3 es el resultado fundamental del capítulo. Su demostración está basada en las identidades combinatorias de la sección § II.3 y los resultados sobre des- composición de matrices Hankel-Sobolev de la sección § II.4 Este teorema establece los nexos entre la solución de un problema de momentos de Sobolev y la solución de $d+1$ problemas de momentos ordinarios. Combinando el teorema 2.3 con teoremas clásicos de la teoría de momentos se obtienen diversas condiciones necesarias y/o suficientes para que las distintas realizaciones del problema de momentos de Sobolev estén definidas y/o determinadas. Un problema interesante es encontrar otras condiciones generales que no dependan directamente de dicho teorema.

Relación de recurrencia.

La fórmula de recurrencia que satisfacen los polinomios ortogonales de Sobolev que se obtiene expresando el polinomio $x\ Q_n(x)$ (donde Q_n es el n-ésimo polinomio ortogonal de Sobolev) como combinación lineal de $Q_0(x),\ Q_1(x),\ \cdots, Q_{n+1}(x)$ en general tiene un número creciente de términos. La representación matricial de dicha fórmula de recurrencia adopta la forma de una matriz de Hessenberg. En el teorema 2.4 se establece la relación existente entre dicha matriz de Hessenberg y la matriz de momentos (desplazada) asociada al producto de Sobolev en consideración.

Las matrices de Hessenberg asociadas a la ortogonalidad usual en la recta y en el circulo están plenamente caracterizadas (son las matrices reales de Jacobi y las unitarias). Un problema de sumo interés es caracterizar las matrices de Hessenberg que corresponden a productos de Sobolev. Un problema relacionado con este en el cual estamos trabajando es la obtención de un teorema de tipo Favard.

Localización de ceros.

En el capítulo IV, como consecuencia de los principales resultados alcanzados, se obtiene el teorema 4.23 sobre acumulación de ceros. Este resultado es solo aplicable en el caso de productos de Sobolev superiormente dominados cuyas medidas están en la clase de Szegő.

Los resultados mas generales sobre localización de ceros están en la primera parte del capítulo III. Bajo hipótesis generales sobre las medidas que intervienen en el producto interior, en el teorema 3.6 se da una condición suficiente para que los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev estén contenidos en un subconjunto compacto del plano complejo. En ello se emplean métodos de la teoría de operadores acotados. Los llamados productos secuencialmente dominados (ver sección § III.3) sa- tisfacen las condiciones exigidas. La clase de dichos productos es lo suficientemente amplia para ejemplificar las bondades del resultado que se ofrece. Como caso muy particular contiene la situación frecuentemente tratada en la literatura en el que todas las medidas en el producto coinciden.

La profundización en el estudio del comportamiento de los ceros es cardinal para cualquier avance futuro sobre propiedades asintóticas. Llama la atención el contraste entre la relativa simpleza conque se localizan los ceros en el caso de la ortogonalidad usual y el despliegue de medios que hemos debido emplear para la obtención de nuestros resultados. En la demostración de la acotación del operador multiplicación en el caso de productos secuencialmente dominados, salta a la vista la conveniencia de tener buenas acotaciones de la norma de un polinomio en función de la norma de su derivada (con la debida normalización del polinomio). Si bien el problema recíproco ha sido ampliamente estudiado, este apenas ha sido tratado. Tales resultados permitirían obtener nuevas clases de productos de Sobolev para los cuales el operador de multiplicación está acotado y en consecuencia obtener acotación de los ceros de los polinomios ortogonales correspondientes. En investigaciones recientes sobre espacios de Sobolev con peso, J. M. Rodríguez y sus colaboradores (ver [8]), han obtenido otras clases de productos no secuencialmente dominados que cumplen las condiciones del teorema 3.6.

Propiedades Asintóticas.

Al estudio de las propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales de Sobolev se dedican los capítulos III y IV. El contenido se corresponde con el de los artículos [46], [57] y [58]. Los resultados alcanzados son los más generales obtenidos hasta la fecha y son los primeros considerando productos de Sobolev continuos con derivadas de orden superior.

En el capítulo III se obtiene la asintótica de la raíz n-ésima de la norma, así como de los polinomios de Sobolev y sus derivadas dentro y fuera del compacto que contiene a los ceros de los polinomios. Esto se hace para productos secuencialmente dominados y 0-regulares. Actualmente sabemos que la hipótesis de 0-regularidad puede ser debilitada y consideramos que posiblemente otro tanto pueda hacerse con la dominación secuencial. Bajo condiciones más débiles, se prueba que las derivadas de los polinomios de Sobolev, a partir de un cierto orden, tienen distribución asintótica regular de sus ceros. Modificando las demostraciones se obtienen resultados análogos para el caso discreto. El marco teórico empleado corresponde a la teoría del potencial logarítmico.

En el capítulo IV, se estudian productos de Sobolev con medidas en la clase de Szegő. Aquí, a diferencia del caso anterior, se considera que el soporte de la medida correspondiente a la derivada de mayor orden en el producto contiene al soporte de las restantes medidas. El principal resultado es la determinación de la asintótica fuerte de la familia de polinomios ortogonales de Sobolev y el de sus derivadas. De aquí se deducen la asintótica del cociente y de la raíz n-ésima. Modificando algunos detalles técnicos en las demostraciones, los resultados alcanzados se pueden extender al caso de productos de Sobolev cuyas medidas están soportadas en un arco analítico o en una curva cerrada de Jordan con capacidad logarítmica positiva.

En cuanto a la teoría asintótica de polinomios ortogonales de Sobolev hay mucho por hacer. En particular, se hecha en falta una clase de productos de Sobolev continuos para los cuales sea característica la asintótica del cociente (o sea, que no se obtenga como subproducto de la asintótica fuerte). Sin embargo, es de señalar que los resultados existentes ya ofrecen un cuadro bastante amplio. Por otro lado, cabe destacar que por fin se cuenta con un conjunto importante de herramientas y técnicas matemáticas para acometer nuevas investigaciones en esta campo. En esta tesis hemos empleado entre otros: análisis clásico, métodos del análisis real y compleja, teoría de potencial y teoría de operadores.

Bibliografía

[1] R. A. Adams, "Sobolev Spaces," Academic Press Inc., San Diego, 1978.

[2] L. V. Ahlfors, "Complex Analysis," Mc Graw-Hill Inc., New York, 1966.

[3] N. I. Akhiezer, "The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis," Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965.

[4] M. Alfaro, F. Marcellán y M.L. Rezola, Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: Old and new directions, *J. Comp. Appl. Math.,* **48** (1993), 113-131.

[5] M. Alfaro, F. Marcellán y M. L. Rezola, Estimates for Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials, Universidad de Zaragoza, 1996, separata.

[6] M. Alfaro, F. Marcellán, A. Ronveaux y M. L. Rezola, On orthogonal polynomials of Sobolev type: Algebraic properties and zeros, *SIAM J. Math. Anal.,* **23** (1992), 737-757.

[7] P. Althammer, Eine Erweitterung des Ortogonalitdtsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation, *J. Reine Angew. Math.,* **211** (1962), 192-204.

[8] V. Alvarez, J. M. Rodríguez, E. Romera y D. Pestana, Generalized weighted Sobolev spaces and applications to Sobolev orthogonal polynomials, prepublicación.

[9] H. Bavinck y H. G. Meijer, On orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives: Zeros and recurrence relations, *Indag. Math.* (N.S.), **1** (1990), 7-14.

[10] H. Bavinck y H. G. Meijer, Orthogonal polynomials with respect to a symmetric inner product involving derivatives, *Appl. Anal.,* **33** (1989), 192-204.

[11] G. Bachman, L. Narici, "Functional Analysis," Academic Press, New York, 1966.

[12] D. Barrios, G. López y E. Torrano, Location of zeros and asymptotics of polynomials satisfying three-term recurrence relations with complex coefficients, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.,* **80** (1995), 309-333.

[13] D. Barrios, G. López y E. Torrano, Polynomials generated by a three-term recurrence relation with asymptotically periodic complex coefficients, *Mat. Sb.,* **186** (1995), 629-659.

[14] D. Barrios, G. López, A. Martínez y E. Torrano, On the domain of convergence and poles of complex J-fractions, *J. Approx. Theory,* **93** (1998), 177-200.

[15] D. Barrios, G. López y H. Pijeira, The moment problem for a Sobolev inner product, en prensa.

[16] H. P. Blatt, E. B. Saff y M. Simkani, Jentzsch-Szegő type theorems for the zeros of best approximants, *J. London Math. Soc.,* **38** (1988), 192-204.

[17] C. Canuto y A. Quarteroni, Approximation result for orthogonal polynomials in Sobolev spaces, *Math. Comp.*, 38 (1982), 67-86.

[18] T. Carleman, Sur le problème des moments, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **174** (1922), 1680-1682.

[19] E. A. Cohen, Zero distribution and behavior of orthogonal polynomials in Sobolev space $W_{1,2}[-1,1]$, *SIAM J. Math. Anal.,* **6** (1975), 105-116.

[20] P. L. Chebyshev, Sur les values limites des integrales, *J. Math. Pures Appl.,* **19** (1874), 157-160.

[21] T. S. Chihara, "An Introduction to Orthogonal Polynomials," Gordon and Breach, New York, 1978.

[22] A. Durán, A generalization of Favard's Theorem for polynomials satisfying a recurrence relation, *J. Approx. Theory,* **74** (1993), 83-109.

[23] P. Duren, "Theory of H^p Spaces," Academic Press, New York, 1970.

[24] W. D. Evans, L. L. Littlejohn, F. Marcellán, C. Markett y A. Ronveaux, On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, (1991).

[25] G. Freud, "Orthogonal Polynomials," Pergamon Press, Oxford, 1971.

[26] A. Foulquié, Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, 1997.

[27] W. Gautschi y A. B. J. Kuijlaars, Zeros and critical poins of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory,* **91** (1997), 117-137.

[28] W. Gautschi y M. Zhang, Computing orthogonal polynomials in Sobolev spaces, *Numer. Math.,* **71** (1995), 159-183.

[29] Y. L. Geronimus, "Polynomials Orthogonal on a Circle and an Interval," Pergamon Press, Oxford, 1960.

[30] G. M. Goluzin, "Geometric Theory of Functions of a Complex Variable," Transl. of Math. Monographs, Vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1969.

[31] A. A. Gonchar, On convergence of Pade approximants for some classes of meromorphic functions, *Math. USSR Sb.,* **26** (1975), 555-575.

[32] H. Hamburger, Uber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems, *Jour. Math. Ann.,* **81** (1920), 235-318, **82** (1921), 120-164, 168-187.

[33] F. Hausdorff, Momentprobleme fur ein endliches Intervall, *Jour. Math. Z.,* **16** (1923), 220-248.

[34] A. Iserles, P. E. Koch, S.P. Norsett y J.M. Sanz-Serna, On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products, *J. Approx. Theory,* **65** (1991), 151-175.

[35] T. Kilpeläinen, Weighted Sobolev spaces and capacity, *Ann. Acad. Scient. Fennicae,* Serie A., **19** (1994), 95-113.

[36] A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, "Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional," Editorial MIR, Moscú, 1972.

[37] M. G. Krein, On a generalization of the investigations of G. Szegő, V. I. Smirnov and A. N. Kolmogorov, *Dokl. Akaad. Nauk. CCCP,* **46** (1945), 95-98.

[38] M. G. Krein y A. A. Nudel'man, " The Markov moment problem and extremal problem," Transl. of Math. Monographs, Vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977.

[39] A. Kufner, "Weighted Sobolev Spaces," John Wiley and Sons , Wiley-Interscience, N. York, 1985.

[40] A. Kufner, "Some Applications of Weighted Sobolev Spaces," Anna-Margarete Sanding Corp., 1987.

[41] P. Lascaux y R. Théodor, "Analyse numérique matricielle appliquée a l'art de l'ingénieur," Tome 1, Masson, París, 1986.

[42] C. D. Lewis, Polynomial least square approximations, *Amer. J. Math.,* **69** (1947), 273-278.

[43] G. López, Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying measures, *Constr. Approx.,* **5** (1989), 199-219.

[44] G. López, F. Marcellán y W. Van Assche, Relative asymptotics for orthogonal polynomials with respect to a discrete Sobolev inner product, *Constr. Approx.,* **11** (1995), 107-137.

[45] G. López y H. Pijeira, Condiciones para la convergencia de los aproximantes multipuntuales de Pade para funciones meromorfas de tipo Markov, *Rev. de Ciencias Técnicas, Físicas y Matemáticas de la Academia de Ciencias de Cuba,* **5** (1984).

[46] G. López y H. Pijeira, Zero location and n-th root asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials, en prensa.

[47] G. López y E. A. Rakhmanov, Rational approximations, orthogonal polynomials y equilibrium distributions, Proc. Int. Conf. on Orthogonal Polynomials, Segovia 1986, Lec. Notes in Math. 1329, Springer-Verlag, Heidelberg, 1988.

[48] D. S. Lubinsky, A survey of general orthogonal polynomials for weights on finite and infinite intervals, *Acta Appl. Mathe.,* **10** (1987), 237-296.

[49] V. E. Maiorov, Widths and distributions of values of the approximation on a Sobolev space with a measure, *Const. Approx.,* **12** (1996), 443-462.

[50] F. Marcellán, T. E. Pérez y M. A. Piñar, Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials, Proc. Conf. on Nonlineal Numerical Methods and Rational Approximation II, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 71-82, 1994.

[51] F. Marcellán, T.E. Pérez, M. A. Piñar y A. Ronveaux, General Sobolev orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.,* **200** (1996), 614-634.

[52] F. Marcellán y A. Ronveaux, On a class of orthogonal polynomials with respect to a Sobolev inner product, *Indag. Math.,* (N.S.) **1** (1990), 451-464.

[53] F. Marcellán y A. Ronveaux, Orthogonal polynomials and Sobolev inner products: A bibliography, Facultés Universitaires N. D. de la Paix, Namur, 1995, separata.

[54] F. Marcellán y W. Van Assche, Relative asymptotics for orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory,* **72** (1993), 193-209.

[55] A. Martínez, Bernstein-Szegő's theorem for Sobolev orthogonal polynomials, en prensa.

[56] A. Martínez, Asymptotic properties of Sobolev orthogonal polynomials, Proc. Int. Conf. on Orthogonal Polynomials, Sevilla 1997, en prensa.

[57] A. Martínez, J.J. Moreno y H. Pijeira, Strong asymptotics for Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.,* **81** (1997), 211-216.

[58] A. Martínez y H. Pijeira, Strong asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials, en prensa.

[59] H. G. Meijer, Coherent pairs and zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials, *Indag. Math.,* (N.S.) **4** (1993), 93-112.

[60] H. G. Meijer, Sobolev Orthogonal polynomials with a small number of real zeros, *J. Approx. Theory,* **77** (1994), 305-313.

[61] H. G. Meijer, A short history of ortogonal polynomials in a Sobolev space. I. The non-discrete case, *Nieuw Archief voor Wiskunde,* **14** (1996), 113-131.

[62] J. J. Moreno, Propiedades analíticas de los polinomios ortogonales de Sobolev continuos, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1997.

[63] P. G. Nevai, "Orthogonal Polynomials," Memoirs Amer. Math. Soc., Vol. 213, Providence, R.I., 1979.

[64] P. G. Nevai, Géza Freud, orthogonal polynomials and Christoffel functions. A Case Study, *J. Approx. Theory,* **48** (1986), 3-167.

[65] T. E. Pérez, Polinomios ortogonales respecto a productos de Sobolev: el caso continuo, Tésis Doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada, 1994.

[66] E. D. Rainville, "Special Functions," Chelsea Pub. Co., New York, 1960.

[67] T. Ransford, "Potential Theory in the Complex Plane," Math. Soc. Student Tex. 28, Cambridge University Press, London, 1995.

[68] U. Reif, Orthogonality of cardinal B-Spline in weighted Sobolev spaces, Math. Inst. Univ. Stuttgart, 1995, separata.

[69] U. Reif, Uniform B-spline approximation in Sobolev spaces, *Numerical Algorithms,* **15** (1997), 1-14.

[70] M. Riesz, Sur le problème des moments, *Jour. Ark. Mat. Ast. Phys.,* **16** (1921), 12, **16** (1922), 19 y **17** (1923), 16.

[71] M. Riesz, Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant, *Jour. Acta Litt. Acad. Sci.,* **1** (1922-1923), 209–225.

[72] W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw-Hill Inc., New York, 1966.

[73] W. Rudin, "Functional Analysis," McGraw-Hill Inc., New York, 1973.

[74] F. W. Schafke, Zu den orthonalpolynomen von Althammer, *J. Reine Angew. Math.,* **252** (1972), 195-199.

[75] F. W. Schafke y G. Wolf, Einfache verallgemeinerte klassische orthonalpolynomen, *J. Reine Angew. Math.,*, **262/263** (1973), 339-355.

[76] J. A. Shohat y J. D. Tamarkin, "The Problem of Moments," Mathematical Surveys, Vol. I, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1963.

[77] T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse,* **8** (1894), J1-J122, **9** (1895), A1-A47.

[78] H. Stahl y V. Totik, "General Orthogonal Polynomials," Cambridge University Press, Cambridge, (1992).

[79] M. H. Stone, "Linear Transformation in Hilbert space and their Applications to Analysis," Coll. Publ. Amer. Math. Soc., Vol. 15, Providence, R. I., 1932.

[80] G. Szegő, "Orthogonal Polynomials," Coll. Publ. Amer. Math. Soc., Vol. 23, (4th ed.), Providence, R.I., 1975.

[81] M. Tsuji, "Potential Theory in Modern Function Theory," Maruzen Co., Tokio, 1959.

[82] W. Van Assche, "Asymptotics for Orthogonal Polynomials," Lec. Notes in Math. 1265, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[83] H. Widom, Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane, *Adv. Math.,* **3** (1969), 127-232.