ESPACIOS HIPERBÓLICOS EN SENTIDO DE GROMOV

Eva Tourís Lojo

Director de tesis:
José Manuel Rodríguez García

Programa de Doctorado
en Ingeniería Matemática

Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

Leganés, 2004

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

A mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis, José Manuel Rodríguez García, por todo el interés, el esfuerzo y el tiempo que me ha dedicado, así como por encontrar siempre en él, además de un grandísimo profesor, un verdadero amigo dispuesto a ayudarme en todo lo que fuera necesario.

Gracias a todo el Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid, por el apoyo incondicional que me han brindado, y sobre todo a quienes han sido mis compañeros de despacho, Juan Diego Alvarez y Mario Guillot, que me hicieron más llevaderas las horas de estudio.

Me gustaría destacar a Ana Portilla, mi "hermana científica", con quien he compartido muchas horas de duro trabajo, así como otros muchos momentos de diversión, risas y bailes. Gracias por el enriquecimiento que me ha supuesto tenerte a mi lado durante estos años.

Muchas gracias a todos los que han colaborado en mi formación científica en estos últimos años, en especial a María Victoria Melián y José Luis Fernández; y a Dragan Vukotic, quien me puso en contacto con José Manuel.

Deseo dar las gracias también, a todos los amigos que me han acompañado y ayudado, y muy especialmente a Claudia, que ha tenido el temple de estar a mi lado en los momentos más duros e importantes de mi vida, como a lo largo de esta aventura que fue sacar adelante mi tesis, aportándome, fundamentalmente, un gran equilibrio personal.

INDICE

§1. INTRODUCCION

El objetivo de esta tesis es el estudio de la hiperbolicidad en el sentido de Gromov; en concreto, buscamos dar criterios que la garanticen.

Habitualmente cuando hablamos de hiperbolicidad, nos vienen a la cabeza las variedades Riemannianas con curvatura negativa. No obstante, a partir de los trabajos de Gromov durante los años 70 y más tarde de Kanai en los 80, se sabe que los grafos pueden modelizar bien las variedades. Surge, en esta dirección, el concepto de hiperbolicidad en sentido de Gromov (que es el que utilizaremos de ahora en adelante) que trata de sintetizar las propiedades esenciales que tienen en común muchos grafos y las variedades con curvatura negativa.

Vamos a trabajar, por tanto, en el contexto de espacios métricos, donde no existen los conceptos de dimensión, ni estructura diferenciable, ni métrica Riemanniana, sino sólo distancias. Y nos referiremos a ellos indistintamente como espacios hiperbólicos, espacios hiperbólicos en sentido de Gromov o espacios de Gromov.

Por tanto, se puede llegar a pensar que cualquier matemático dispone de los conocimientos necesarios para trabajar en la teoría de espacios hiperbólicos. Sin embargo, se requiere de una intuición adecuada para saber en qué dirección avanzar, y esta intuición sólo puede adquirirse si se dispone de un conocimiento profundo de las variedades Riemannianas con curvatura negativa.

La hiperbolicidad es un concepto muy nuevo que ha permitido obtener, en los últimos años, resultados muy sorprendentes como, por ejemplo, la clasificación de las isometrías de tales espacios. Al igual que las isometrías del disco unidad con su métrica de Poincaré (es decir, las transformaciones de Möbius que preservan el disco) se clasifican en elípticas, hiperbólicas y parabólicas (según sean sus puntos fijos), en cualquier espacio geodésico hiperbólico propio se tiene una clasificación semejante (ver [GH, Capítulo 8.2]). Esto resulta especialmente sorprendente si recordamos que en el estudio de las isometrías del disco la holomorfía juega un papel muy destacado.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Una buena forma de mostrar el interés que tiene esta teoría es explicar uno de los principales objetivos de nuestra investigación en el futuro.

Nos gustaría poder generalizar a dimensión n y curvatura variable negativa el resultado publicado recientemente en Acta Mathematica por José Luis Fernández y María Victoria Melián (ver [FM]). En dicho artículo se prueba que, dada una superficie de Riemann (dotada de la métrica de Poincaré, con curvatura constante -1) con área infinita, la dimensión de Hausdorff del conjunto de geodésicas que escapan a infinito es 1.

Creemos que la teoría de espacios hiperbólicos es el contexto adecuado para generalizar este teorema (y otros resultados en superficies de Riemann), precisamente porque el concepto de hiperbolicidad sintetiza las propiedades de las variedades con curvatura negativa, liberándolas de conceptos "accesorios" como la dimensión y la curvatura constante.

Aunque disponemos de ejemplos interesantes de espacios hiperbólicos, no existen criterios generales que permitan determinar si un espacio es o no hiperbólico. Afortunadamente, la teoría de Gromov permite obtener resultados interesantes sobre espacios que no son hiperbólicos pero cuyo recubridor universal sí lo es (ver [P]). En general, los obstáculos topológicos en un espacio dificultan su hiperbolicidad: un número finito de ellos no es peligroso (ver Proposición 2.3.2), pero si hay una cantidad infinita la hiperbolicidad puede fallar, como es el caso del jungle-gym bidimensional (un $\mathbf{Z}^2$-cubrimiento de un toro con género 2). Por tanto, es mucho más fácil que sea hiperbólico el recubridor universal de un espacio X a que sea hiperbólico el propio X.

En los últimos años, han sido publicados importantes resultados que tratan de determinar la hiperbolicidad en dominios acotados de $\mathbf{R}^n$ con la métrica quasihiperbólica (ver [BB], [BHK] y las referencias que aparecen allí).

Nosotros también abordamos el problema de caracterizar los espacios hiperbólicos, pero lo hacemos para el caso de superficies de Riemann con su métrica de Poincaré. Afortunadamente, hemos podido extender a espacios métricos geodésicos más generales algunos de los resultados obtenidos.

Nuestro principal objetivo en espacios métricos geodésicos es la obtención de resultados que garanticen la hiperbolicidad. Para ello, hemos atacado el problema de dos formas distintas. Por un lado, nos hemos planteado cómo utilizar la información local acerca de la hiperbolicidad de un espacio, para poder garantizar la hiperbolicidad de éste. Obsérvese que la hiperbolicidad no es una propiedad local sino global; por tanto, el principal mérito de estos teoremas es conseguir información global a partir de información local. Por otro lado, la segunda forma de enfocar el problema consiste en plantear la siguiente cuestión: ¿es necesario verificar la condición de Rips (que, como veremos más adelante, es equivalente a la hiperbolicidad de un espacio métrico geodésico) para todos los triángulos geodésicos o podemos encontrar una clase de triángulos más restringida?

Desde el punto de vista del primer planteamiento, la idea que ha guiado la investigación es descomponer el espacio métrico X como una unión de subespacios $X = \cup_n X_n$, y estudiar la hiperbolicidad en cada uno de los X_n. Esta es una técnica (cortar y pegar) súmamente utilizada en la teoría de superficies de Riemann. Bajo ciertas condiciones hemos conseguido resultados interesantes:

Uno de ellos (Teorema 2.2.4) permite pegar infinitos espacios, sin crear obstáculos topológicos, preservando la hiperbolicidad.

Si queremos crear obstáculos topológicos al conectar las piezas, podemos aplicar una cierta modificación del teorema anterior. El camino para resolver el problema sigue dos pasos: primero conectamos las piezas sin crear obstáculos topológicos (usando el teorema anterior), de tal forma que obtengamos un espacio conexo y a continuación aplicamos otro resultado de esta tesis (Teorema 2.2.2), que nos permite crear infinitos obstáculos topológicos en un espacio dado.

Si nos centramos en superficies de Riemann podemos obtener resultados más específicos. Dos de las manipulaciones más habituales en superficies de Riemann son cortar y pegar, y quitar conjuntos cerrados; nosotros nos planteamos ver de qué forma influyen en la hiperbolicidad del espacio. De esta manera, estudiamos el papel que juegan las punturas y la descomposición de la superficie en Y-piezas y foniles en la hiperbolicidad (ver secciones 2.3 y 4.3).

Existe un enfoque alternativo que permite atacar el problema de forma directa, válido en superficies de Riemann: estudiar un grafo construido a partir de las relaciones métricas en la superficie. El Teorema 4.3.7 asegura que la superficie es hiperbólica si y sólo si el grafo asociado a esta es hiperbólico.

El Teorema 3.3.1 constituye otro de los principales resultados de esta tesis, ya que permite restringir de forma drástica el conjunto de triángulos sobre los que es necesario verificar la condición de Rips: basta considerar los triángulos contenidos en geodésicas simples cerradas.

Otros resultados que merecen ser destacados son los teoremas 4.3.4 y 4.3.5, que dan cotas uniformes de las constantes de hiperbolicidad en una familia multiparamétrica de superficies de Riemann. Como consecuencia de estos teoremas se obtiene un sorprendente resultado sobre la estabilidad de la hiperbolicidad (ver Corolario 4.3.2).

Finalmente, es destacable la colección de ejemplos que prueban que no existe ninguna relación de inclusión entre las principales clases de superficies de Riemann y la clase de superficies de Riemann hiperbólicas (ver Sección 4.4). Esto muestra que el estudio de la hiperbolicidad es un problema todavía más complicado (e interesante) de lo que puede parecer en un principio.

Los resultados de esta tesis han sido recogidos en los artículos [RT1], [RT2] y [RT3]; de hecho, el capítulo $j+1$ ($j=1,2,3$) de la tesis expone detalladamente los resultados de [RTj]. Otros artículos que tratan temas relacionados son [PRT1], [PRT2] y [PRT3], que constituyen el núcleo fundamental de la tesis de Ana Portilla.

En las dos siguientes secciones de esta introducción daremos las definiciones básicas para espacios de Gromov y superficies de Riemann.

§1.1. Espacios de Gromov.

Para el estudio de los espacios hiperbólicos de Gromov usaremos la notación de [GH]. Veamos algunos resultados básicos sobre estos espacios. Puede consultarse [GH] para ampliar las definiciones y los teoremas de esta sección.

Definición 1.1.1. Fijado un punto w en un espacio métrico (X,d), definimos el *producto de Gromov* de $x,y\in X$ con punto base w como

$$(x|y)_w := \frac{1}{2}\left\{d(x,w)+d(y,w)-d(x,y)\right\}\geq 0\,.$$

Decimos que el espacio métrico (X,d) es *δ-hiperbólico* ($\delta\geq 0$) si

$$(x|z)_w \geq \min\left\{(x|y)_w,(y|z)_w\right\}-\delta\,,$$

para todo $x,y,z,w\in X$. Decimos que X is *hiperbólico* si la constante δ no es importante.

Aunque no lo parezca a primera vista, esta desigualdad tiene una interesante interpretación geométrica: en espacios hiperbólicos, $(x|y)_w$ es esencialmente la distancia de w a una geodésica que une x e y (ver [GH, p. 38]).

Es conveniente señalar que no existe una definición de hiperbolicidad universalmente aceptada, ya que a veces la palabra "hiperbolicidad" se refiere a la curvatura negativa o a la existencia de función de Green. No obstante, nosotros la usaremos únicamente en el sentido de la Definicion 1.1.1.

Antes de continuar, veamos de forma heurística la importancia del producto de Gromov. En esta teoría es habitual escribir $d(x, y) = |x - y|$, aunque recordemos que no hay estructura de espacio vectorial; si además consideramos que el punto base w es un punto fijado, denotaremos $d(x, w) = |x - w| = |x|$. Reescribiendo con esta nueva notación la definición del producto de Gromov, tenemos: $|x - y| = |x| + |y| - 2(x|y)_w$, que recuerda al producto escalar. Esto sugiere que, en algún sentido, en espacios métricos hiperbólicos se pueden medir algo parecido a ángulos.

Es bien conocido que el produco escalar entre dos vectores x, y de un espacio euclídeo es cero si y sólo si x, y forman un ángulo de $\pi/2$. No obstante, el producto de Gromov de x, y, respecto de un punto base w, es cero si y sólo si w pertenece a una geodésica que une x e y; por tanto, para que $(x|y)_w$ se haga "pequeño" necesitamos que los tres puntos estén "casi" alineados. Consecuentemente, el ángulo que juega el papel predominante en esta teoría es π en lugar de $\pi/2$.

Profundicemos un poco más en la relación entre ángulos y producto de Gromov. Igual que ocurre para los triángulos euclídeos, existen fórmulas que relacionan los ángulos interiores de un triángulo contenido en el plano hiperbólico, con las longitudes de los lados del mismo. De esta forma, dado un triángulo en el plano hiperbólico con vértices v_1, v_2, v_3, lados de longitudes a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ (con α el ángulo en v_1), se tiene la "ley de los cosenos hiperbólica"

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh c \sinh b \cos \alpha \,.$$

En el caso particular de tener un triángulo rectángulo hiperbólico, es decir, con $\alpha = \pi/2$, entonces obtenemos la versión hiperbólica del Teorema de Pitágoras: $\cosh a = \cosh b \cosh c\,$.

Para un α cualquiera (no necesariamente $\pi/2$), si las longitudes hiperbólicas a, b y c son muy grandes, podemos reemplazar la igualdad por la relación aproximada $\frac{1}{2}e^a \approx \frac{1}{4}e^{b+c}(1-$

$\cos\alpha$), de donde se deduce que $e^a \approx e^{b+c}\operatorname{sen}^2(\alpha/2)$; tomando logaritmos obtenemos $\frac{1}{2}(b+c-a) \approx \log\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}$, donde $b+c-a = d(v_1,v_3)+d(v_1,v_2)-d(v_2,v_3) = 2(v_2|v_3)_{v_1}$, y por lo tanto $(v_2|v_3)_{v_1} \approx \log\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}$. Esto refleja la relación tan directa que existe entre el producto de Gromov entre dos puntos y el "ángulo" que forman las geodésicas que los unen (al menos en el plano hiperbólico).

Veamos algunos de los ejemplos más importantes de espacios hiperbólicos.

Ejemplos:

(1) Todo espacio métrico acotado X es δ-hiperbólico con $\delta = \operatorname{diam} X$ (ver, por ejemplo, [GH, p. 29]).

(2) Toda variedad Riemanniana completa simplemente conexa con curvatura seccional acotada superiormente por una constante $-k$, con $k>0$, es hiperbólica (ver, por ejemplo, [GH, p. 52]).

(3) Un espacio vectorial normado X es hiperbólico si y sólo si tiene dimensión 1.

(4) Todo árbol con aristas de longitud arbitraria es 0-hiperbólico (ver, por ejemplo, [GH, p. 29]).

Definición 1.1.2. Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ es una curva continua en un espacio métrico (X,d), podemos definir la *longitud* de γ como

$$L(\gamma) := \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)) : \, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \Big\}.$$

Decimos que γ es una *geodésica* (o *geodésica minimizante*) si es una isometría, es decir, si $L(\gamma|_{[t,s]}) = d(\gamma(t),\gamma(s)) = |t-s|$ para todo $t,s \in [a,b]$. Decimos que γ es una *geodésica local* si para todo $t \in [a,b]$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que la restricción de γ a $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \cap [a,b]$ es una geodésica. Decimos que X es un *espacio métrico geodésico* si para todo $x,y \in X$ existe una geodésica uniendo x e y. Denotamos por $[x,y]$ cualquiera de estas geodésicas (las geodésicas no son necesariamente únicas, pero aunque esta notación es ambigua, resulta conveniente). Está claro que todo espacio métrico geodésico es conexo por caminos. Un espacio métrico geodésico es *propio* si toda bola cerrada es compacta.

Definición 1.1.3. Si X es un espacio métrico geodésico y $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, con $J_j \subseteq X$, decimos que J es *δ-thin* si para todo $x \in J_i$ tenemos que $d(x, \cup_{j\neq i} J_j) \le \delta$. Si $x_1,x_2,x_3 \in X$, un *triángulo geodésico* $T = \{x_1,x_2,x_3\}$ es la unión de tres geodésicas

$J_1 = [x_1, x_2]$, $J_2 = [x_2, x_3]$ y $J_3 = [x_3, x_1]$. El espacio X es δ-*thin* (o verifica la *condición de Rips* con constante δ) si todo triángulo geodésico en X es δ-thin. Decimos que X es *thin* si la constante δ no es importante.

Conviene destacar que todo triángulo T es δ-thin, con $\delta = \operatorname{diam}_X(T)$, pero no todo espacio X es thin. La clave está en que las constantes de todos los triángulos deben estar uniformemente acotadas. Por tanto, ser thin es un concepto global y no local.

Observación. Todo cuadrilátero geodésico en un espacio δ-thin es 2δ-thin. Para ver esto, es suficiente dividir el cuadrilátero en dos triángulos. En general, todo polígono geodésico de n lados es $(n-2)\delta$-thin. Si tenemos un triángulo en el que dos de sus vértices coinciden, le llamamos "biángulo"; evidentemente, todo biángulo en un espacio δ-thin es δ-thin.

Un hecho destacable de esta teoría es que la hiperbolicidad de un espacio métrico geodésico es equivalente a que se verifique la condición de Rips:

Teorema 1.1.A. ([GH, p. 41]) *Consideremos un espacio métrico geodésico X.*

(1) *Si X es δ-hiperbólico, entonces es 4δ-thin.*

(2) *Si X es δ-thin, entonces es 4δ-hiperbólico.*

El siguiente concepto que introducimos es una clase de aplicaciones que van a jugar un papel fundamental en la teoría de espacios hiperbólicos.

Definición 1.1.4. Una aplicación entre dos espacios métricos $f : X \longrightarrow Y$ es una *quasi-isometría* si existen constantes $a \geq 1$, $b \geq 0$ tales que

$$\frac{1}{a}\, d_X(x_1, x_2) - b \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq a\, d_X(x_1, x_2) + b\,, \qquad \text{para todo } x_1, x_2 \in X.$$

Tal función se llama (a, b)-*quasi-isometría*. Decimos que la imagen de f es ε-*full* (para algún $\varepsilon \geq 0$) si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ con $d_Y(y, f(x)) \leq \varepsilon$. Decimos que X e Y son *quasi-isométricamente equivalentes* si existe una quasi-isometría entre X e Y, con imagen ε-full, para algún $\varepsilon \geq 0$. Una (a, b)-*quasigeodésica* en X es una (a, b)-quasi-isometría entre un intervalo de $\mathbf{R}$ y X. Un (a, b)-*segmento quasigeodésico* en X es una (a, b)-quasi-isometría entre un intervalo compacto de $\mathbf{R}$ y X.

Evidentemente, una $(1, 0)$-quasigeodésica es lo mismo que una geodésica

Observación. Es bien conocido (ver, por ejemplo, [K1] o [K2]) que la equivalencia quasi-isométrica es una relación de equivalencia. De hecho, si $f : X \longrightarrow Y$ es una (a, b)-quasi-isometría con imagen ε-full, entonces existe una función $g : Y \longrightarrow X$ que es una $(a, 2a\varepsilon + ab)$-quasi-isometría. En particular, si f es una (a, b)-quasi-isometría suprayectiva, entonces g es una (a, ab)-quasi-isometría (en este caso, podemos elegir $g(y)$ como cualquier punto de $f^{-1}(y)$).

Este tipo de aplicaciones son importantes porque preservan la hiperbolicidad, como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 1.1.B. ([GH, p. 88]) *Consideremos una (a, b)-quasi-isometría $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios métricos geodésicos. Si Y es δ-hiperbólico, entonces X es δ'-hiperbólico, donde δ' es una constante que sólo depende de δ, a y b. Además, si la imagen de f es ε-full para algún $\varepsilon \geq 0$, entonces X es hiperbólico si y sólo si Y es hiperbólico.*

Obsérvese lo sorprendente del resultado, ya que las quasi-isometrías son funciones muy flexibles (ni siquiera tienen que ser continuas) y, sin embargo, son una herramienta fundamental para determinar la hiperbolicidad de un espacio.

Por otro lado, conviene destacar que la constante de hiperbolicidad de X depende sólo de la del espacio de llegada Y, y de las constantes de quasi-isometría de f. En el desarrollo de la teoría llama la atención el hecho de que, como sucede en el Teorema 1.1.B, las constantes que aparecen en los teoremas suelen depender de los espacios y de las funciones involucradas sólo a través de las constantes que han aparecido anteriormente. Este es un hecho importante y característico de los espacios hiperbólicos.

Definición 1.1.5. Vamos a considerar $H > 0$, un espacio métrico X, y subconjuntos $Y, Z \subseteq X$. El conjunto $V_H(Y) := \{x \in X : d(x, Y) \leq H\}$ se denomina el *H-entorno* de Y en X. La *distancia de Hausdorff* de Y a Z se define como $\mathcal{H}(Y, Z) := \inf\{H > 0 : Y \subseteq V_H(Z), Z \subseteq V_H(Y)\}$.

El siguiente resultado es tan útil como sorprendente (obsérvese que la conclusión del teorema es falsa en $\mathbf{R}^n$ si $n > 1$).

Teorema 1.1.C. ([GH, p. 87]) *Para cada $\delta \geq 0, a \geq 1$ y $b \geq 0$, existe una constante $H = H(\delta, a, b)$ con la siguiente propiedad:*

Consideremos un espacio métrico geodésico δ-hiperbólico X y una (a, b)-quasigeodésica g uniendo x e y. Si γ es una geodésica uniendo x e y, entonces $\mathcal{H}(g, \gamma) \leq H$.

Esta propiedad de que las quasigeodésicas estén cerca de las geodésicas se denomina estabilidad geodésica. Mario Bonk ha probado (ver [Bo]) que, de hecho, la estabilidad geodésica es equivalente a la hiperbolicidad.

Habitualmente trabajamos con subespacios topológicos de un espacio métrico geodésico X, y existe una forma natural de definir la distancia en dichos espacios:

Definición 1.1.6. Si X es un espacio en el que tenemos definida la longitud de cada curva, podemos definir la *distancia interior* (o *pseudodistancia interior*) como

$$d_X(x,y) := \inf\{L(\gamma) : \gamma \subset X \text{ es una curva continua uniendo } x \text{ e } y\}.$$

Si X_0 es una subconjunto conexo por caminos de un espacio métrico geodésico (X,d), entonces le asociamos la *distancia restringida* ó *distancia interior* $d_{X_0}(x,y) := d_X|_{X_0}(x,y)$

$$d_X|_{X_0}(x,y) := \inf\{L(\gamma) : \gamma \subset X_0 \text{ es una curva continua uniendo } x \text{ e } y\} \geq d_X(x,y).$$

Si X_0 no es conexo por caminos, nosotros seguimos usando esta definición si x e y pertenecen a la misma componente conexa por caminos de X_0; si están en distintas componentes conexas por caminos de X_0 definimos su distancia como $d_{X_0}(x,y) := \infty$.

§1.2. Superficies de Riemann.

Existen diferentes puntos de vista a la hora de introducir el concepto de superficie de Riemann. Optaremos por el más rápido: una superficie de Riemann es una variedad diferenciable bidimensional en la que los cambios de carta son analíticos.

Antes de comenzar a hablar de los resultados conseguidos, sería interesante exponer con algún detalle lo que va a ser la herramienta fundamental en el desarrollo posterior: la métrica de Poincaré.

Diremos que una superficie de Riemann es *abierta* si no tiene borde. Por tanto, cuando no especifiquemos que una superficie es abierta admitimos tanto la posibilidad de que tenga borde como de que no lo tenga. Dada una superficie de Riemann abierta S, llamamos *recubrimiento universal* de S a un par $(\tilde{S},\pi)$, donde $\pi : \tilde{S} \to S$ es una aplicación holomorfa y homeomorfismo local y $\tilde{S}$ es una superficie de Riemann simplemente conexa (es decir, su grupo fundamental $\Pi_1(\tilde{S},\tilde{p}_0)$ con punto base $\tilde{p}_0 \in \tilde{S}$, es trivial).

Obsérvese que, con esta definición, toda superficie de Riemann compacta sin borde es abierta.

Si S es una superficie de Riemann abierta y $\pi : \tilde{S} \to S$ su recubrimiento universal, llamamos Γ al grupo de transformaciones recubridoras, es decir, el grupo de las funciones $\gamma : \tilde{S} \to \tilde{S}$ biholomorfas y tales que $\pi \circ \gamma = \pi$. Es destacable el hecho de que Γ es isomorfo al grupo fundamental $\Pi_1(\tilde{S}, \tilde{p}_0)$ (ver [A, p. 133]). El grupo Γ opera sin puntos fijos y discontinuamente sobre $\tilde{S}$ y, además, se tiene que S es conformemente equivalente con $\tilde{S}/\Gamma$. Recíprocamente, dado cualquier grupo Γ de transformaciones biholomorfas de $\tilde{S}$ en sí mismo que actúen discontinuamente y sin puntos fijos, $\tilde{S}/\Gamma$ es una superficie de Riemann abierta. Un tal grupo Γ se denomina grupo Fuchsiano si $\tilde{S} = \mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < 1\}$.

El teorema de uniformización (ver [A, p. 142]) dice que cualquier superficie de Riemann abierta simplemente conexa es conformenente equivalente a la esfera de Riemann $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, al plano complejo $\mathbf{C}$ o al disco unidad $\mathbf{D}$. Por tanto, sólo hay tres posibilidades para $\tilde{S}$, módulo equivalencia conforme.

Si $\tilde{S} = \overline{\mathbf{C}}$, entonces S ha de ser necesariamente $\overline{\mathbf{C}}$, ya que $\overline{\mathbf{C}}$ sólo puede ser espacio recubridor de sí mismo.

Si $\tilde{S} = \mathbf{C}$, las transformaciones recubridoras han de ser necesariamente de la forma $\gamma(z) = z + a$ para que no haya punto fijo en $\mathbf{C}$; como además el grupo debe actuar discontinuamente, Γ ha de ser o bien el grupo trivial o bien tener uno o dos generadores: así S puede ser conformemente equivalente a $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} - \{0\}$ o a un toro $\mathbf{T}$, respectivamente.

A las superficies abiertas que no tienen como recubridor universal el disco unidad $\mathbf{D}$ las llamamos excepcionales. Todas las demás superficies abiertas, a las que llamaremos no excepcionales, tienen al disco $\mathbf{D}$ como recubridor.

Se cuenta que Poincaré, cuando iba a subir al tranvía que le llevaría a una excursión geológica, descubrió que las aplicaciones de Möbius que preservan $\mathbf{D}$ son exactamente las isometrías del disco si le dotamos de la métrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z|^2)^2} \qquad \text{ó} \qquad ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}. \tag{1.2.1}$$

Estamos entendiendo por isometrías las aplicaciones que, además de preservar las distancias, también conservan las orientaciones entre ángulos (para que sean funciones holomorfas). Este grupo de isometrías, al que se denota por $M\ddot{o}b(\mathbf{D})$, es el conjunto de transformaciones

$$M\ddot{o}b(\mathbf{D}) \equiv \left\{ T : \mathbf{D} \to \mathbf{D} \quad \text{tal que} \quad T(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad \text{con } a \in \mathbf{D} \ \text{ y } \ \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

El disco con esta métrica constituye el modelo de Poincaré del plano hiperbólico, en el que las geodésicas son los arcos de circunferencia perpendiculares a $\partial\mathbf{D}$, y que tiene curvatura constante $K = -1$. Este es el motivo de que aparezcan el 4 y el 2 en (1.2.1); si pusiésemos 1 en ambos numeradores, la curvatura sería -4.

Otro modelo, conforme e isométricamente equivalente a éste, es el semiplano superior $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} : \Im z > 0\}$ con su métrica de Poincaré

$$ds = \frac{|dz|}{y}.$$

Puesto que $\mathbf{D}$ y $\mathbf{U}$ son espacios isométricos, se usarán ambos indistintamente.

Dada cualquier superficie abierta no excepcional S, si $\pi : \mathbf{D} \to S$ es un recubrimiento universal de S y $\gamma \in M\ddot{o}b(\mathbf{D})$, entonces $\pi \circ \gamma : \mathbf{D} \to S$ es también un recubrimiento universal, y así se obienen todos los posibles. Por tanto, al elegir un recubrimiento universal, se pueden prefijar $\pi(0)$ y el argumento de $\pi'(0)$.

Como S es conformemente equivalente a $\mathbf{D}/\Gamma$, donde Γ es el grupo de transformaciones recubridoras de un recubrimiento universal, los grupos Γ que podemos elegir para realizar tal representación son únicos salvo conjugación por un elemento de $M\ddot{o}b(\mathbf{D})$, es decir, existe una biyección entre el conjunto de superficies de Riemann abiertas no excepcionales (salvo equivalencia conforme) y el conjunto de subgrupos Fuchsianos de $M\ddot{o}b(\mathbf{D})$ (salvo conjugación). Por otro lado, como Γ es un grupo de isometrías para la métrica de Poincaré de $\mathbf{D}$, dicha métrica puede proyectarse mediante π, de forma que se dota a $S \equiv \mathbf{D}/\Gamma$ de una métrica Riemanniana conforme, completa y con curvatura $K = -1$: la métrica de Poincaré. Esta métrica está bien definida, ya que Γ es único salvo conjugación por una isometría de $\mathbf{D}$, y además es la única que verifica las propiedades anteriores.

Por lo tanto, una superficie de Riemann abierta no excepcional S, dotada de su métrica de Poincaré, es una variedad Riemanniana geodésicamente completa con curvatura constante -1; así pues, se puede comprobar que es un espacio métrico geodésico. De ahora en adelante, denotaremos por d_S la distancia inducida en S por su métrica de Poincaré y siempre que no se diga explícitamente lo contrario, consideraremos que S tiene la estructura de espacio métrico dada por d_S.

Nosotros utilizaremos habitualmente la palabra *geodésica* en el sentido de la Definición 1.1.2, es decir, como una geodésica global o geodésica minimizante. No obstante, necesitamos mencionar un tipo especial de geodésicas locales: las geodésicas simples cerradas, que, obviamente, no pueden ser minimizantes. Seguiremos usando la palabra geodésica con el significado de la Definición 1.1.2, a menos que hablemos de geodésicas cerradas.

Se tiene el siguiente resultado sobre geodésicas cerradas en superficies de Riemann: Dada una curva simple cerrada no trivial ni homótopa a una puntura (ver definiciones 1.2.1 y 1.2.2) en una superficie de Riemann abierta no excepcional, existe una única geodésica simple cerrada en su misma clase de homotopía libre.

En relación a las subsuperficies de una superficie dada (dotadas de sus métricas de Poincaré respectivas) se tienen resultados como: Si S_2 es una subsuperficie abierta de una superficie de Riemann abierta no excepcional S_1, entonces S_2 es no excepcional y $d_{S_2}(x,y) \geq d_{S_1}(x,y)$, para todo $x, y \in S_2$. Si además η es una curva simple cerrada en S_2, y denotamos por γ_i la geodésica simple cerrada (si existe) libremente homótopa a η en S_i $(i = 1, 2)$, entonces $L_{S_2}(\gamma_2) \geq L_{S_1}(\gamma_1)$.

En este mismo sentido, otro resultado muy importante, y que mostramos a continuación, es el que relaciona cuantitativamente las métricas de Poincaré de dos superficies de Riemann no excepcionales S_1 y S_2:

Lema 1.2.A. ([APR, p. 363]) *Sean S_1 una superficie de Riemann abierta no excepcional, C un subconjunto cerrado no vacío de S_1, $S_2 = S_1 \setminus C$ y $\varepsilon > 0$. Entonces tenemos que*

$$\tanh \frac{\varepsilon}{2} < \frac{L_{S_1}(\gamma)}{L_{S_2}(\gamma)} < 1$$

para toda curva $\gamma \subset S_1$ con longitud finita en S_1 tal que $d_{S_1}(\gamma, C) \geq \varepsilon$.

Uno de los casos más interesantes de superficies de Riemann abiertas con su métrica de Poincaré son los dominios planos, es decir, los dominios contenidos en $\mathbf{C}$ cuyo complemento tiene al menos dos puntos. Si S es un dominio plano y $\pi : \mathbf{D} \to S$ es un recubrimiento universal, entonces las densidades de la métrica de Poincaré con respecto a la métrica euclídea en $\mathbf{D}$ y S verifican la relación

$$\lambda_S(\pi(z))|\pi'(z)| = \lambda_{\mathbf{D}}(z).$$

La métrica de Poincaré tiene un gran número de propiedades, aparte de las ya mencionadas. Si $f : S \to R$ es una aplicación holomorfa, entonces

$$d_R(f(p), f(q)) \le d_S(p,q) \qquad \text{para todo } \ p,q \in S,$$

es decir, todas las aplicaciones holomorfas son contractivas para la métrica de Poincaré. Por tanto, todas las biyecciones holomorfas son isometrías.

En particular, si se toma como f la inclusión de S en R, donde S y R son dominios planos, se tiene que

$$\lambda_R(z) \le \lambda_S(z) \qquad \text{para todo } \ z \in S.$$

Esta desigualdad también puede deducirse del Lema 1.2.A.

La métrica de Poincaré permite probar de forma sencilla y elegante muchos teoremas difíciles de variable compleja, como los teoremas pequeño y grande de Picard, el teorema de Schottky,... (ver, por ejemplo, [A] y [Kr]).

Centrar nuestro estudio de la hiperbolicidad en las superficies de Riemann no excepcionales, no supone una gran pérdida de generalidad:

En primer lugar, cualquier variedad Riemanniana bidimensional orientable sin borde puede ser dotada de un atlas analítico de forma que su métrica sea conforme con la euclídea en cada carta, considerando como cartas las coordenadas isotermales y todas las que sean conformes con ellas. Por tanto, toda tal variedad admite una estructura de superficie de Riemann abierta.

En segundo lugar, las únicas superficies de Riemann que no tienen métrica de Poincaré (las superficies de Riemann excepcionales) son la esfera de Riemann, el plano, el plano punteado y los toros. Es fácil estudiar la hiperbolicidad en estos casos particulares: la esfera y el toro son hiperbólicos porque son compactos, el plano punteado ($\mathbf{C} \setminus \{0\}$ con su métrica $ds = |dz|/|z|$ conforme, completa y con curvatura constante 0) es hiperbólico ya que es isométrico a un cilindro (y quasi-isométrico a $\mathbf{R}$), y el plano no es hiperbólico ($\mathbf{R}^n$ es hiperbólico si y sólo si $n = 1$).

En lo que sigue necesitaremos algunas definiciones referentes a superficies de Riemann.

Definición 1.2.1. Una *puntura* en una superficie de Riemann abierta no excepcional es una región isométrica al subconjunto $\{z \in \mathbf{C} : \, 0 < |z| < e^{-2\pi}\}$ de la superficie $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\}$ dotada con la métrica

$$ds := \frac{|dz|}{|z| \log \frac{1}{|z|}}$$

(ver [Ber 85]).

Geométricamente, una puntura es un final doblemente conexo en el que podemos encontrar curvas homotópicamente no triviales de longitud arbitrariamente pequeña. En el caso de dominios planos, $S \subset \mathbf{C}$, una puntura es un entorno de un punto aislado en ∂S. Podemos pensar en las punturas como en entornos de geodésicas frontera de longitud cero.

Definición 1.2.2. Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional con una puntura q. Un *collar* de la puntura q en S es un dominio doblemente conexo "acotado" por q y por una curva de Jordan (llamada curva frontera del collar) ortogonal al haz de geodésicas que emanan de q.

Un collar de q en S de área α se denomina *α-collar* y se denota por $C_S(q, \alpha)$. Un teorema de Shimizu (ver [S]) muestra que para toda puntura en una superficie de Riemann no excepcional abierta, existe un α-collar para todo $0 < \alpha \leq 2$ (ver también [Bu, Capítulo 4.4]).

Decimos que una curva es *homótopa a una puntura* q si es libremente homótopa a $\partial C_S(q, \alpha)$ para todo $0 < \alpha \leq 2$.

Definición 1.2.3. Un *collar* de una geodésica simple cerrada γ en S es un dominio doblemente conexo "acotado" por dos curvas de Jordan (llamadas curvas frontera del collar) ortogonal al haz de geodésicas que emanan de γ; dicho collar es igual a $\{p \in S : d_S(p, \gamma) < d\}$, para alguna constante positiva d. A esta constante d se la denomina *ancho* del collar.

El Lema del Collar (ver [R]) asegura que existe un collar para γ de anchura d, para todo $0 < d \leq d_0$, donde $\cosh d_0 = \coth(L_S(\gamma)/2)$, o similarmente, $\sinh d_0 = \text{cosech}(L_S(\gamma)/2)$.

Definición 1.2.4. Decimos que S es una superficie de Riemann no excepcional *con borde* si S se puede obtener al eliminar un conjunto abierto V de una superficie de Riemann abierta no excepcional R, tal que:

(1) S es conexa y $d_S := d_R|_S$ (ver Definición 1.1.6),

(2) toda bola en R interseca a lo más con una cantidad finita de componentes conexas de V,

(3) el borde de S es localmente Lipschitz.

Cualquier superficie S de estas es una variedad Riemanniana bidimensional orientable con borde, y su métrica Riemanniana tiene curvatura constante negativa -1. Puede comprobarse que S es un espacio métrico geodésico.

La clausura del α-collar de una puntura (con $0 < \alpha < 2$) o del collar de una geodésica simple cerrada de ancho $0 < d < d_0$, es una superficie de Riemann no excepcional con borde.

Definición 1.2.5. Un *fonil* es una superficie de Riemann no excepcional con borde, que es homeomorfo a un cilindro semi-infinito y cuyo borde es una geodésica simple cerrada. Dado un número positivo a, existe un único fonil cuyo borde tiene longitud a. Todo fonil es conformemente equivalente, para algún $\beta > 1$, al subconjunto $\{z \in \mathbf{C} : \ 1 \leq |z| < \beta\}$ del anillo $\{z \in \mathbf{C} : \ 1/\beta \leq |z| < \beta\}$.

Todo final doblemente conexo de una superficie de Riemann abierta no excepcional es, o bien una puntura (si hay curvas homotópicamente no triviales de longitud arbitrariamente pequeña), o bien un fonil (en caso contrario).

A pesar de que una puntura y un fonil son topológicamente equivalentes, sus métricas son muy distintas. De hecho, una puntura tiene área finita y un fonil área infinita.

Definición 1.2.6. Una *Y-pieza* es una superficie de Riemann no excepcional con borde conformemente equivalente a una esfera sin tres discos abiertos y cuyas curvas frontera son geodésicas simples cerradas. Dados tres números positivos a, b, c, existe una única (salvo aplicaciones conformes) Y-pieza cuyas curvas frontera tienen longitudes a, b, c (ver por ejemplo [Ra, p. 410]).

Las Y-piezas son una herramienta fundamental en la construcción de superficies de Riemann. Una descripción clara de ellas y su uso puede encontrarse en [Bu, Capítulo 1] y [C, Capítulo X.3].

Definición 1.2.7. Una *Y-pieza generalizada* es una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde) conformemente equivalente a una esfera sin n discos abiertos y m puntos, con enteros $n, m \geq 0$ tales que $n + m = 3$; las n curvas frontera son geodésicas simples cerradas y los m puntos eliminados son punturas. Observese que una Y-pieza generalizada es topológicamente la unión de una Y-pieza y m cilindros.

Definición 1.2.8. Un *semidisco* es una superficie de Riemann con borde no excepcional y que es topológicamente un semiplano cerrado cuyo borde es una geodésica simple. Todo semidisco es isométrico y conformemente equivalente al subconjunto $\{z \in \mathbf{D} : \Re z \geq 0\}$ del disco de Poincaré $\mathbf{D}$.

Observemos que un fonil contiene infinitos semidiscos.

§1.3. Estructura de la tesis.

Hemos estructurado la tesis en cuatro capítulos; el primero de ellos es la introducción. Cada uno de los otros tres capítulos expone los resultados que aparecen en los artículos "Gromov hiperbolicity through decomposition of metric spaces", "Simple closed geodesics determine the Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces" y "Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces", escritos en colaboración con mi director de tesis. El primero de ellos ha sido publicado en la revista Acta Mathematica Hungarica.

§1.4. Notaciones.

La forma de describir un resultado de la tesis será "Resultado" X.Y.Z, donde Z indica el número de dicho resultado dentro de la sección Y del capítulo X. Los resultados que no forman parte de la tesis se designan con letras en vez de números.

A lo largo de la tesis vamos a denotar por X, X_i ó X^i espacios métricos geodésicos. Por d_X, L_X y B_X denotaremos, respectivamente, la distancia, la longitud y las bolas en la métrica de X.

Denotamos por R, S ó S_i superficies de Riemann no excepcionales, asumiendo que la métrica definida en ellas es la métrica de Poincaré, salvo que se especifique lo contrario.

Si Ω es un dominio plano, denotaremos por λ_Ω la densidad conforme de la métrica de Poincaré en Ω, es decir, la función tal que $ds = \lambda_\Omega(z)|dz|$ es la métrica de Poincaré en Ω.

$\Re z$ y $\Im z$ representan la parte real e imaginaria de z, respectivamente.

Por último, l, c, c_i y k_i denotan constantes positivas que pueden tomar distintos valores de unos teoremas a otros.

§2. HIPERBOLICIDAD DE GROMOV A TRAVES DE LA DESCOMPOSICION DE ESPACIOS METRICOS

§2.1. Introducción.

En este segundo capítulo estudiamos la hiperbolicidad en sentido de Gromov de espacios métricos. Deducimos la hiperbolicidad de un espacio a través de la hiperbolicidad de cada uno de los subespacios que lo forman. Estos resultados son especialmente valiosos ya que gracias a ellos, conseguimos simplificar notablemente la topología del espacio y nos permiten obtener resultados globales a partir de la información local de la que disponemos.

Los dos principales resultados sobre hiperbolicidad en espacios métricos geodésicos son los siguientes. Podemos crear o eliminar una cantidad infinita de obstáculos topológicos en un espacio métrico preservando su hiperbolicidad (ver Teorema 2.2.2). También podemos "pegar sin crear obstáculos topológicos" infinitos espacios métricos $\{X_n\}_n$ obteniendo un espacio métrico X que será hiperbólico si y sólo si los X_n son uniformemente hiperbólicos (ver Teorema 2.2.4).

Como corolario, obtenemos resultados en superficies de Riemann (ver teoremas 2.3.1 y 2.3.2). Además, estudiamos cómo las punturas y la descomposición de una superficie de Riemann en Y-piezas y foniles afecta a la hiperbolicidad de la superficie (ver teoremas 2.2.3, 2.3.4 y Corolario 2.3.1). De hecho, estos resultados nos permiten poder olvidarnos, en muchos casos, de las punturas y los foniles a la hora de estudiar la hiperbolicidad de una superficie de Riemann; esto supone una gran simplificación en la topología de la superficie y hace más fácil el estudio de la hiperbolicidad. Como consecuencia de estos resultados, hemos obtenido muchos ejemplos de superficies de Riemann hiperbólicas (ver Lema 2.3.4, proposiciones 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3, y Corolario 2.3.2).

Hay que destacar que casi todas las constantes que aparecen en los resultados de esta tesis dependen sólo de muy pocos parámetros. Esto es muy común en la teoría de espacios hiperbólicos (ver, por ejemplo, teoremas 1.1.A y 1.1.B en la Sección 1.2) y es también típico de superficies con curvatura -1 (ver el Lema del Collar en [R] y [S], y lemas 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3).

§2.2. Resultados en espacios métricos.

El siguiente teorema constituye la principal herramienta para la obtención de otros resultados de este capítulo como son el Corolario 2.2.1 y el Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.1. *Sea X un espacio métrico geodésico. Supongamos que $\{K_n\}_n$ son subconjuntos compactos de X, y que existen constantes positivas c_1, c_2, tal que* $\operatorname{diam}_X K_n \leq c_1$ *y $d_X(K_n, K_m) \geq c_2$ si $n \neq m$. Denotamos por X' el espacio cociente obtenido a partir de X identificando todo K_n en un único punto k_n. Entonces la proyección canónica de X en X' es una $((c_1+c_2)/c_2, c_1c_2/(c_1+c_2))$-quasi-isometría. Consecuentemente, si X' es un espacio métrico geodésico, entonces X es hiperbólico si y sólo si X' es hiperbólico. En particular, si X es δ-hiperbólico, entonces X' es δ'-hiperbólico, con δ' una constante universal que sólo depende de δ, c_1 y c_2. Si además cada bola en X interseca sólo con una cantidad finita de K_n's* (*esto ocurre si X es propio*)*, entonces X' es un espacio métrico geodésico.*

Observaciones.

1. Si X es propio, entonces cada bola en X interseca sólo una cantidad finita de K_n's.

2. La demostración del Teorema 2.2.1 da directamente que en el caso de tener un único conjunto compacto K_1, obtenemos una $(1, c_1)$-quasi-isometría.

Demostración. Puesto que $d_X(K_n, K_m) \geq c_2$, tenemos que $d_{X'}$ (en el sentido de la Definición 1.1.6) es una distancia. Si $p: X \longrightarrow X'$ es la proyección canónica, está claro que $d_{X'}$ verifica

(2.2.1)

$$d_{X'}(p(x),p(y)) = \min\Big\{d_X(x,y),\ \inf\Big\{\, d_X(x,K_{n_0}) + \sum_{j=1}^{r} d_X(K_{n_{j-1}},K_{n_j}) + d_X(K_{n_r},y)\Big\}\Big\},$$

para todo $x, y \in X$, donde el ínfimo se toma para todo subconjunto finito (posiblemente no ordenado) de números naturales $\{n_j\}_{j=0}^{r}$.

Veamos que

$$\frac{c_2}{c_1+c_2}\, d_X(x,y) - \frac{c_1c_2}{c_1+c_2} \leq d_{X'}(p(x),p(y))\,, \qquad \text{para todo } x,y \in X\,. \tag{2.2.2}$$

Para ver esta desigualdad, observamos que para todo subconjunto finito (posiblemente no ordenado) de números naturales $\{n_j\}_{j=0}^r$ tenemos

$$d_X(x,y) \le \; d_X(x,K_{n_0}) + \sum_{j=1}^r d_X(K_{n_{j-1}},K_{n_j}) + d_X(K_{n_r},y) + \sum_{j=0}^r \operatorname{diam}_X(K_{n_j})\,.$$

Obsérvese que

$$\sum_{j=0}^r \operatorname{diam}_X(K_{n_j}) \le (r+1)c_1 = \frac{c_1}{c_2}\,rc_2 + c_1 \le \frac{c_1}{c_2}\,\sum_{j=1}^r d_X(K_{n_{j-1}},K_{n_j}) + c_1\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_X(x,y) &\le d_X(x,K_{n_0}) + \Big(1+\frac{c_1}{c_2}\Big)\sum_{j=1}^r d_X(K_{n_{j-1}},K_{n_j}) + d_X(K_{n_r},y) + c_1 \\ &\le \frac{c_1+c_2}{c_2}\,\Big[d_X(x,K_{n_0}) + \sum_{j=1}^r d_X(K_{n_{j-1}},K_{n_j}) + d_X(K_{n_r},y)\Big] + c_1\,, \end{aligned}$$

para todo subconjunto finito (posiblemente no ordenado) de números naturales $\{n_j\}_{j=0}^r$. Por tanto, concluimos

$$d_X(x,y) \le \frac{c_1+c_2}{c_2}\,d_{X'}(p(x),p(y)) + c_1\,,$$

para todo $x,y\in X$, lo que da (2.2.2).

La desigualdad $d_{X'}(p(x),p(y)) \le d_X(x,y)$ se tiene por (2.2.1), y por lo tanto p es una quasi-isometría.

Probamos ahora que X' es un espacio métrico geodésico si cada bola en X interseca sólo una cantidad finita de K_n's. Tenemos que X' es un espacio métrico geodésico si y sólo si el ínfimo en (2.2.1) es siempre un mínimo. Para tomar este ínfimo es suficiente considerar todo subconjunto finito (posiblemente no ordenado) de números naturales $\{n_j\}_{j=0}^r$ con

$$d_X(x,K_{n_0}) + \sum_{j=1}^r d_X(K_{n_{j-1}},K_{n_j}) + d_X(K_{n_r},y) \le d_X(x,y)\,.$$

Como el lado de la izquierda de la desigualdad es mayor o igual que rc_2, tenemos que

$r \le c_2^{-1} d_X(x,y)$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} d_X(x, K_{n_i}) \le & \; d_X(x, K_{n_0}) + \sum_{j=1}^{i} d_X(K_{n_{j-1}}, K_{n_j}) + \sum_{j=0}^{i-1} \operatorname{diam}_X(K_{n_j}) \\ & \le d_X(x,y) + \sum_{j=0}^{i-1} \operatorname{diam}_X(K_{n_j}) \le d_X(x,y) + rc_1 \\ & \le \Big(1 + \frac{c_1}{c_2}\Big) d_X(x,y)\,. \end{aligned}$$

Esto implica que, para tomar este ínfimo, basta considerar conjuntos K_{n_j} que verifiquen $d_X(x, K_{n_j}) \le (1 + c_1 c_2^{-1}) d_X(x,y)$. Ya que sólo un número finito de K_n intersecan con $\overline{B_X(x, (1 + c_1 c_2^{-1}) d_X(x,y))}$, el ínfimo en (2.2.1) en realidad es un mínimo.

Es fácil ver que si X es un espacio propio, entonces cada bola en X interseca sólo una cantidad finita de K_n's: Si $H > 0$ e $Y \subseteq X$, definimos $V_H(Y) := \{x \in X : d(x,Y) \le H\}$. Consideramos una bola cerrada $\overline{B_X(p,r)}$ y su cubrimiento por los conjuntos abiertos $\{\{\operatorname{int} V_{c_2/2}(K_n)\}_n, B_X(p, 2r) \setminus \cup_n V_{c_2/4}(K_n)\}$. Si elegimos un subrecubrimiento finito con N conjuntos abiertos, deducimos que $\overline{B_X(p,r)}$ interseca como mucho con N conjuntos compactos en $\{K_n\}_n$.

Las conclusiones sobre la hiperbolicidad son una consecuencia de estos hechos y el Teorema 1.1.B. $\square$

Observación. Si denotamos por p^{-1} cualquier función $p^{-1} : X' \longrightarrow X$ que satisfface $p(p^{-1}(x)) = x$ para todo $x \in X'$, tenemos por (2.2.2) que p^{-1} es una $((c_1 + c_2)/c_2, c_1)$-quasi-isomertía cuya imagen es c_1-full.

A continuación vamos a mostrar un caso particular que nos permite crear (o eliminar) infinitos obstáculos topológicos en un espacio métrico, preservando su hiperbolicidad (la idea es que pegamos identificando puntos). Para ello necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.2.1. Sean X un espacio métrico geodésico y $\{\eta_n^1, \eta_n^2\}_n$ subconjuntos compactos de X disjuntos dos a dos. Si c_1, c_2 son constantes positivas, decimos que $\{\eta_n^1, \eta_n^2\}_n$ son $(c_1,\, c_2)$-*identificables* si $(\eta_n^1, d_X|_{\eta_n^1})$ y $(\eta_n^2, d_X|_{\eta_n^2})$ son isométricos para cada n, $\operatorname{diam}_X(\eta_n^1 \cup \eta_n^2) \le c_1$ para todo n y $d_X(\eta_n^1 \cup \eta_n^2, \eta_m^1 \cup \eta_m^2) \ge c_2$ para todo $n \ne m$. Denotamos por X_0 un espacio obtenido al identificar en X los compactos η_n^1 y η_n^2 por una isometría, para cada n.

Observación. Ya que $d_X(\eta_n^1 \cup \eta_n^2, \eta_m^1 \cup \eta_m^2) \ge c_2$, tenemos que d_{X_0} (según la Definición 1.1.6) es una distancia.

Corolario 2.2.1. *Sean X un espacio métrico geodésico y $\{\eta_n^1, \eta_n^2\}_n$ $(c_1,\, c_2)$-identificables. Si cada η_n^i es un punto, entonces la proyección canónica de X en X_0 es una $((c_1 + c_2)/c_2, c_1c_2/(c_1+c_2))$-quasi-isometría. Consecuentemente, si X_0 es un espacio métrico geodésico, entonces X es hiperbólico si y sólo si X_0 es hiperbólico. En particular, si X es δ-hiperbólico, entonces X_0 es δ'-hiperbólico, con δ' una constante universal que sólo depende de δ, c_1 y c_2.*

La identificación de puntos es un método muy particular de pegar espacios. El siguiente teorema permite crear infinitos obstáculos topológicos en un espacio métrico ("género", si el espacio es una superficie), preservando su hiperbolicidad, de una forma más general.

También hay otra forma interesante de interpretar el próximo teorema: podemos eliminar una cantidad infinita de obstáculos topológicos en un espacio métrico, preservando su hiperbolicidad. Gracias a este hecho podemos conseguir una gran simplificación en la topología del espacio; no olvidemos que los obstáculos topológicos pueden dificultar la hiperbolicidad de un espacio.

Teorema 2.2.2. *Sean X un espacio métrico geodésico y $\{\eta_n^1, \eta_n^2\}_n$ (c_1, c_2)-identificables. Entonces la proyección canónica de X en X_0 es una $((c_1 + c_2)/c_2, c_1c_2/(c_1+c_2))$-quasi-isometría. Consecuentemente, si X_0 es un espacio métrico geodésico, entonces X es hiperbólico si y sólo si X_0 es hiperbólico. En particular, si X es δ-hiperbólico, entonces X_0 es δ'-hiperbólico, con δ' una constante universal que sólo depende de δ, c_1 y c_2.*

Observaciones.

1. Un argumento similar al dado en la primera parte de la demostración del Teorema 2.2.1 da que X_0 es un espacio métrico geodésico si cada bola en X interseca sólo un número finito de η_n^i's (esto ocurre si X es propio).

2. Si η_n^i son curvas simples cerradas, la condición de que $(\eta_n^1, d_X|_{\eta_n^1})$ y $(\eta_n^2, d_X|_{\eta_n^2})$ sean isométricos es equivalente simplemente a $L_X(\eta_n^1) = L_X(\eta_n^2)$.

Demostración. Está claro que $d_X|_{\eta_n^1}, d_X|_{\eta_n^2}$ y d_{X_0} (según la Definición 1.1.6) son distancias.

Consideremos la proyección canónica $p : X \longrightarrow X_0$. Es evidente que para toda curva γ in X se tiene $L_X(\gamma) = L_{X_0}(p(\gamma))$. Entonces para todo $x, y \in X$ tenemos $d_{X_0}(p(x), p(y)) \leq d_X(x, y)$, ya que hay más curvas uniendo $p(x)$ y $p(y)$ en X_0 que curvas uniendo x e y en X.

Para probar la otra desigualdad, fijamos $x, y \in X$ y tomamos una geodésica γ en X_0 uniendo $p(x)$ y $p(y)$, si existe tal geodésica (en otro caso, podemos tomar γ_n con $L_{X_0}(\gamma_n) \le d_{X_0}(p(x), p(y)) + 1/n$). Definimos $\eta_n := p(\eta_n^1) = p(\eta_n^2)$. Entonces $d_{X_0}(\eta_n, \eta_m) \ge c_2$ si $n \ne m$.

Si $L_{X_0}(\gamma) = d_X(x, y)$, entonces $d_{X_0}(p(x), p(y)) = d_X(x, y)$. Si $L_{X_0}(\gamma) < d_X(x, y)$, entonces γ interseca con algún η_n. En este caso, elegimos una curva $\gamma_0 \subseteq \gamma$ de la siguiente forma: Como $d_{X_0}(\eta_n, \eta_m) \ge c_2$, γ interseca sólo un número finito de η_n's, que denotamos por $\eta_{n_1}, \dots, \eta_{n_r}$. Además, podemos elegir γ como una curva orientada de $p(x)$ a $p(y)$; entonces podemos asumir que γ interseca con $\eta_{n_1}, \dots, \eta_{n_r}$ en este orden.

Si $\gamma : [0, l] \longrightarrow X_0$, definimos

$$t_1^1 := \min\{0 \le t \le l : \gamma(t) \in \eta_{n_1}\}, \qquad t_1^2 := \max\{0 \le t \le l : \gamma(t) \in \eta_{n_1}\}.$$

Y de la misma forma, definimos recursivamente

$$t_i^1 := \min\{t_{i-1}^2 \le t \le l : \gamma(t) \in \eta_{n_i}\}, \qquad t_i^2 := \max\{t_{i-1}^2 \le t \le l : \gamma(t) \in \eta_{n_i}\},$$

si $\gamma([t_{i-1}^2, l]) \cap \eta_{n_i} \ne \varnothing$; en otro caso, elegimos en vez de i el más pequeño valor natural j tal que $i < j \le r$ y $\gamma([t_{i-1}^2, l]) \cap \eta_{n_j} \ne \varnothing$.

Para simplificar la notación vamos a suponer que podemos definir t_i^1 y t_i^2 para todo $i = 1, 2, \dots, r$ (en otro caso, extraemos una subsucesión).

Denotamos por γ_0 la restricción de γ al conjunto cerrado $[0, t_1^1] \cup [t_1^2, t_2^1] \cup \cdots \cup [t_{r-1}^2, t_r^1] \cup [t_r^2, l]$.

Definimos ahora $K_1 := \{p^{-1}(\gamma(t_1^1)), p^{-1}(\gamma(t_1^2))\}, \dots, K_r := \{p^{-1}(\gamma(t_r^1)), p^{-1}(\gamma(t_r^2))\} \subset X$; como p no es inyectiva, tomamos $p^{-1}(\gamma(t_i^1)) := \lim_{t \to (t_i^1)^-} p^{-1}(\gamma(t))$ y $p^{-1}(\gamma(t_i^2)) := \lim_{t \to (t_i^2)^+} p^{-1}(\gamma(t))$; si $t_1^1 = 0$ (y/o $t_r^2 = l$) tomamos $p^{-1}(\gamma(t_1^1)) = x$ (y/o $p^{-1}(\gamma(t_r^2)) = y$). Con esta elección de los $K_1, \dots, K_r$, definimos X' según el Teorema 2.2.1. Si $p' : X \longrightarrow X'$ es la proyección canónica, entonces (2.2.2) da

$$d_{X'}(p'(x), p'(y)) \ge \frac{c_2}{c_1 + c_2} d_X(x, y) - \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2},$$

para todo $x, y \in X$. Si $\gamma_1 := p'(p^{-1}\gamma_0) \subset X'$, entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d_{X_0}(p(x), p(y)) &:= L_{X_0}(\gamma) \ge L_{X_0}(\gamma_0) = L_{X'}(\gamma_1) \\ &= d_{X'}(p'(x), p'(y)) \ge \frac{c_2}{c_1 + c_2} d_X(x, y) - \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in X$. La igualdad $L_{X'}(\gamma_1) = d_{X'}(p'(x), p'(y))$ es una consecuencia de los siguientes hechos: γ_1 es una curva continua en X' y la restricción de γ_0 a cualquier intervalo $[0, t_1^1]$, $[t_1^2, t_2^1], \ldots, [t_{r-1}^2, t_r^1]$, $[t_r^2, l]$ es una geodésica en X_0; además γ_1 es también una geodésica en X'.

Entonces, tenemos que p es una $((c_1 + c_2)/c_2, c_1c_2/(c_1 + c_2))$-quasi-isometría.

Las conclusiones sobre la hiperboliciad son consecuencia de este hecho y el Teorema 1.1.B. $\square$

Ya que la hiperbolicidad es invariante por quasi-isometrías, un compacto en X no juega ningún papel importante en la hiperbolicidad de X. Es más, podemos eliminar infinitos compactos, bajo ciertas condiciones no muy restrictivas:

Proposición 2.2.1. *Sean X un espacio métrico geodésico y $\{K_n\}_n$ subconjuntos compactos de X tales que $X_0 := X \setminus \cup_n \operatorname{int} K_n$ es conexo por caminos. Supongamos que existen constantes positivas c_1, c_2, tal que $\operatorname{diam}_X K_n \le c_1$ y $d_X(K_n, K_m) \ge c_2$ si $n \ne m$. Entonces, existe una quasi-isometría c_1-full f de X_0 en X con constantes que sólo dependen de c_1 y c_2. Consecuentemente, si X_0 es un espacio métrico geodésico, entonces X es hiperbólico si y sólo si X_0 es hiperbólico. En particular, si X es δ-hiperbólico, entonces X_0 es δ'-hiperbólico, con δ' una constante universal que sólo depende de δ, c_1 y c_2.*

Demostración. Vamos a denotar por X' el espacio métrico geodésico que obtenemos a partir de X al identificar cada compacto K_n en un único punto q_n. Por el Teorema 2.2.1 y la observación anterior a la Definición 2.2.1, existe una $((c_1 + c_2)/c_2, c_1)$-quasi-isometría $j : X' \longrightarrow X$, cuya imagen es c_1-full. Sea $(X_0)'$ el espacio métrico obtenido a partir de X_0 por identificación de cada ∂K_n en un único punto q_n. Como $X' = (X_0)'$, podemos considerar la composición f de la proyección canónica $p : X_0 \longrightarrow (X_0)'$ y j. El Teorema 2.2.1 da que p es una $((c_1 + c_2)/c_2, c_1c_2/(c_1 + c_2))$-quasi-isometría. Entonces f es una quasi-isometría de X_0 en X, con constantes que sólo dependen de c_1 y c_2. Ya que p es suprayectiva, la imagen de f es c_1-full.

Las conclusiones sobre la hiperboliciad son consecuencia de estos hechos y el Teorema 1.1.B. $\square$

Cabe esperar entonces que se puedan cambiar infinitos compactos por otros compactos como nos muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.2.2. *Sean X^1 y X^2 espacios métricos geodésicos, y $\{K_n^1\}_n \subset X^1$, $\{K_n^2\}_n \subset X^2$ subconjuntos compactos, tales que $X_0 := X^1 \setminus \cup_n \operatorname{int} K_n^1 = X^2 \setminus \cup_n \operatorname{int} K_n^2$ es* *conexo por caminos, con* $L_{X^1}(\gamma) = L_{X^2}(\gamma)$*, para toda curva* $\gamma \subset X_0$*. Supongamos también que existen contantes positivas* c_1*,* c_2*, tales que* $\operatorname{diam}_{X^i} K_n^i \le c_1$ *y* $d_{X^i}(K_n^i, K_m^i) \ge c_2$ *si* $n \neq m$*. Entonces existe una quasi-isometría* $f : X^1 \longrightarrow X^2$ *con constantes que sólo dependen de* c_1 *y* c_2*. Consecuentemente,* X^1 *es hiperbólico si y sólo si* X^2 *es hiperbólico. En particular, si* X^1 *es* δ*-hiperbólico, entonces* X^2 *es* δ'*-hiperbólico, con* δ' *una constante universal que sólo depende de* δ*,* c_1 *y* c_2*.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.1, existe una quasi-isometría f_i de X_0 en X^i con constantes que sólo dependen de c_1 y c_2. Puesto que f_1 es c_1-full, por la observación tras la Definición 1.1.4, sabemos que existe una quasi-isometría f_3 de X^1 en X_0 con constantes que sólo dependen de c_1 y c_2. Por lo tanto, $f = f_2 \circ f_3$ es la quasi-isometría que queríamos.

Como el argumento es simétrico en X^1 y X^2, es evidente que también existe una quasi-isometría g de X^2 en X^1.

Las conclusiones sobre la hiperboliciad son consecuencia de estos hechos y el Teorema 1.1.B. $\square$

Definición 2.2.2. Definimos como *grafo* $R = (V, E)$ un conjunto de puntos $V = V(R)$ (llamados vértices), con un conjunto de aristas $E = E(R)$ conectando pares de vértices; las aristas no están orientadas, es decir, $[v_1, v_2] = [v_2, v_1]$; se permite cualquier número finito de aristas entre dos vértices (en particular, entre un vértice y él mismo); a un vértice se le permite ser el final de infinitas aristas. Suponemos tambien que R es conexo.

Un *ciclo* en un grafo es una arista conectando un vértice con él mismo o una sucesión de aristas distintas $[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_{n-1}, v_n], [v_n, v_1]$.

Por un *árbol* entendemos un grafo sin ciclos; por tanto, entre dos vértices distintos existe como mucho una única arista uniéndolos, y no hay aristas conectando vértices con ellos mismos.

Una técnica muy utilizada en la teoría de superficies de Riemann es la de "cortar y pegar" (ver, por ejemplo, [C, Capítulo X.3], [FR2], [R1], [R2]). Vamos a ver ahora un resultado gracias al cual podemos pegar infinitos espacios hiperbólicos. Pero antes necesitamos la siguente definición.

Definición 2.2.3. Sean X un espacio métrico, y $\{X_n\}_n \subseteq X$ una familia de subespacios métricos geodésicos verificando que $\eta_{nm} := \eta_{mn} := X_n \cap X_m$ son conjuntos compactos, y c_1, c_2 constantes positivas. Consideramos el grafo $R = (V, E)$ con vértices $V = \{v_n\}_n$ y aristas E, tal que $[v_n, v_m] \in E$ si y sólo si $\eta_{nm} \neq \varnothing$. Decimos que $\{X_n\}_n$ es una

(c_1, c_2)-*descomposición* de X si R es un árbol, $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \le c_1$ para todo n, m, y $d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk}) \ge c_2$ para todo n, m, k, con $m \ne k$ y $\eta_{nm} \ne \varnothing \ne \eta_{nk}$.

Observación. Puesto que R es un árbol y η_{nm} son conjuntos compactos, está claro que X es un espacio métrico geodésico.

Teorema 2.2.3. *Sean X un espacio métrico y $\{X_n\}_n$ una familia de espacios métricos geodésicos que son una $(0,0)$-descomposición de X. Si δ_n es la mejor constante para que X_n sea thin, entonces X es δ-thin con la mejor constante $\delta = \sup_n \delta_n$. Entonces, X es hiperbólico si y sólo si existe una constante c_1 para la cual X_n es c_1-hiperbólico para todo n.*

Observación. Si al pegar los $\{X_n\}_n$ queremos crear obstáculos topológicos (es decir, considerar una grafo G en vez de un árbol), podemos aplicar el Teorema 2.2.3 con un árbol contenido en G, obteniendo así un espacio conexo, y a continuación, utilizar el Corolario 2.2.1.

Demostración. Obsérvese que cada η_{nm} es un único punto, ya que $c_1 = 0$; entonces, la restricción de d_X a cualquier X_n coincide con d_{X_n}, ya que R es un árbol.

Consideremos un triángulo geodésico T en X. Si los tres vértices de T están en el mismo X_n para algún n, está claro que $T \subseteq X_n$, ya que en otro caso alguna geodésica $[x_i, x_{i+1}] \subset T$ saldría de X_n y entraría de nuevo por el mismo punto (recordemos que R es un ábol), y esto es imposible porque entonces $[x_i, x_{i+1}] \cap X_n$ sería más corta que $[x_i, x_{i+1}]$; por tanto T es δ_n-thin. Esto muestra que $\delta \ge \sup_n \delta_n$.

Si T interseca varios X_n definimos $T_n := T \cap X_n$. Si hay dos vértices de T en el mismo X_n, entonces T_n es un triángulo geodésico si elegimos como tercer vértice de T_n el único punto por el cual T sale de X_n; entonces T_n es δ_n-thin (obsérvese que lados distintos de T_n están contenidos en lados distintos de T). El tercer vértice de T está en algún X_m; entonces T_m es un "biángulo" geodésico si consideramos como segundo vértice para T_m el único punto por el cual T sale de X_m; por tanto T_m es δ_m-thin. Fijamos un punto $x \in T_m$.

En el caso de que T no esté contenido en $T_n \cup T_m$, existe algún T_k sin vértices de T. En este caso T_k es un "biángulo" geodésico, eligiendo como vértices de T_k los dos puntos por los cuales T sale de X_k, y repitiendo el argumento anterior tenemos que T es $(\sup_n \delta_n)$-thin.

Si T tiene los tres vértices en distintos X_n's podemos proceder como en el caso anterior. La única diferencia es que si T_k no tiene vértices de T, T_k puede ser ahora un "biángulo" geodésico o un triágulo geodésico. Entonces, T es $(\sup_n \delta_n)$-thin, y por lo tanto $\delta \le \sup_n \delta_n$.

Finalmente, la última afirmación del teorema es una consecuencia del Teorema 1.1.A y la igualdad $\delta = \sup_n \delta_n$. $\square$

El siguiente resultado permite reducir el estudio de la hiperbolicidad de un espacio métrico geodésico a estudiar la hiperbolicidad de sus "piezas" o "componentes"; esto simplifica enormemente el problema, ya que basta estudiarlo localmente y no globlamente.

Desde otro punto de vista, el próximo teorema permite pegar infinitos espacios, preservando su hiperbolicidad, de una forma mucho más general que en el Teorema 2.2.3; obsérvese que los conjuntos η_{nm} anteriores no necesitan ser conexos y, por tanto, podemos crear un número finito de obstáculos topológicos cada vez que pegamos dos espacios.

Teorema 2.2.4. *Sean X un espacio métrico y $\{X_n\}_n \subseteq X$ una familia de espacios métricos geodésicos que son una (c_1, c_2)-descomposición de X. Entonces X es δ-hiperbólico si y sólo si existe una constante positiva c_3 tal que X_n es c_3-hiperbólico para todo n. Además, δ es una constante universal que sólo depende de c_1, c_2 y c_3.*

Es natural que nos planteemos qué sucede con un grafo G en lugar de un árbol R. Una forma natural de resolver el problema es seguir una estrategia de dos pasos: podemos considerar un árbol R con $V(R) = V(G)$ y $E(R) \subset E(G)$, y entonces aplicamos el Teorema 2.2.4 a R; así conseguimos un espacio conexo al que a continuación le aplicaremos el Teorema 2.2.2 para terminar el proceso de conexión siguiendo el diseño combinatorio de las aristas en $E(G) \setminus E(R)$. De esta forma, si combinamos los teoremas 2.2.2 y 2.2.4 obtenemos resultados más interesantes que aplicándolos por separado.

Queremos recalcar que la conclusión del Teorema 2.2.4 no es cierta si quitamos alguna de las hipótesis $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \le c_1$ ó $d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk}) \ge c_2$.

También queremos enfatizar que la condición $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \le c_1$ no es muy restrictiva: si el espacio es "ancho" en todo punto (en el sentido de radio de inyectividad grande, como ocurre en el caso de los espacios simplemente conexos) o "estrecho" en todo punto (como en los árboles), es más fácil estudiar su hiperbolicidad; si podemos encontrar partes estrechas (como η_{nm}) y partes anchas, el problema se vuelve realmente más difícil e interesante.

Observación. Es intereseante destacar que las condiciones

(1) $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \le c_1$ y $d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk}) \ge c_2$,

implican

(2) $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \le c_1$ y $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \le c_4 d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk})$, con constante $c_4 = c_1/c_2$, y cada curva de longitud finita en X interseca sólo una cantidad finita de η_{nm}'s.

De hecho, en la demostración del Teorema 2.2.4 sólo usamos (2); por tanto, la conclusión del Teorema 2.2.4 es cierta si cambiamos la hipótesis (1) por (2).

Demostración. La idea de la demostración es construir un espacio X' quasi-isométrico a X, que verifique las hipótesis del Teorema 2.2.3. Para lograr esto, elegimos $x_{nm} = x_{mn} \in \eta_{nm} = \eta_{mn}$. Vamos a definir un espacio métrico geodésico X' (como en el Teorema 2.2.3) como la unión de $\{X_n\}_n$ identificando x_{nm} y x_{mn} para cada $[v_n, v_m] \in E$. Consideramos ahora la proyección canónica $p : X' \longrightarrow X$, que es una función continua y suprayectiva. Es evidente que para toda curva γ en X' se tiene que $L_{X'}(\gamma) = L_X(p(\gamma))$. Entonces para todo $x, y \in X'$ se verifica $d_X(p(x), p(y)) \le d_{X'}(x, y)$, ya que hay más curvas uniendo $p(x)$ y $p(y)$ en X que curvas uniendo x e y en X'.

Para probar la otra desigualdad, fijamos $x, y \in X'$ y elegimos una geodésica γ en X uniendo $p(x)$ y $p(y)$. Definimos $\gamma_{nm} := p(\eta_{nm}) = p(\eta_{mn})$. Entonces,

$$d_X(\gamma_{nm}, \gamma_{nk}) = d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk}) \ge c_2 \ge \frac{c_2}{c_1}\, \mathrm{diam}_{X_n}(\eta_{nm})\,,$$

si $m \neq k$, y concluimos

$$\mathrm{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \le c_4\, d_X(\gamma_{nm}, \gamma_{nk})\,, \tag{2.2.3}$$

si $m \neq k$, con $c_4 = c_1/c_2$.

Si γ no interseca con $\cup_{nm}\gamma_{nm}$, entonces $\gamma \subset X_n$ para algún n, y por lo tanto, tenemos $d_X(p(x), p(y)) = d_{X'}(x, y)$. En otro caso, ya que $d_X(\gamma_{nm}, \gamma_{nk}) = d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk}) \ge c_2$, γ interseca sólo con un número finito de γ_{nm}'s, que denotaremos por $\gamma_{n_1n_2}, \gamma_{n_3n_4}, \dots, \gamma_{n_{2r-1}n_{2r}}$.

Vamos a considerar γ como una curva orientada de $p(x)$ a $p(y)$; así podemos asumir que γ corta a $\gamma_{n_1n_2}, \gamma_{n_3n_4}, \dots, \gamma_{n_{2r-1}n_{2r}}$ en este orden.

Si $\gamma : [0, l] \longrightarrow X$, definimos

$$t_1^1 := \min\{0 \le t \le l : \gamma(t) \in \gamma_{n_1n_2}\}\,, \qquad t_1^2 := \max\{0 \le t \le l : \gamma(t) \in \gamma_{n_1n_2}\}\,.$$

De forma similar, definimos recursivamente

$$t_i^1 := \min\{t_{i-1}^2 \le t \le l : \gamma(t) \in \gamma_{n_{2i-1}n_{2i}}\}\,, \qquad t_i^2 := \max\{t_{i-1}^2 \le t \le l : \gamma(t) \in \gamma_{n_{2i-1}n_{2i}}\}\,,$$

si $\gamma([t_{i-1}^2, l]) \cap \gamma_{n_{2i-1}n_{2i}} \neq \varnothing$; en otro caso, elegimos, en vez de i, el número natural más pequeño j tal que $i < j \le r$ y $\gamma([t_{i-1}^2, l]) \cap \gamma_{n_{2j-1}n_{2j}} \neq \varnothing$.

Para simplificar la notación vamos a suponer que podemos definir t_i^1 y t_i^2 para todo $i = 1, 2, \dots, r$ (en otro caso, extraemos una subsucesión). Entonces, tenemos para $1 \le i < r$

$$n_{2i+1} = \begin{cases} n_{2i}, & \text{si } \gamma((t_i^2, l]) \cap X_{n_{2i-1}} = \varnothing\,, \\ n_{2i-1}, & \text{si } \gamma((t_i^2, l]) \cap X_{n_{2i-1}} \neq \varnothing\,. \end{cases}$$

Observemos que $n_{2i+1} = n_{2i}$ si y sólo si cualquier curva uniendo x e y en X interseca con $X_{n_{2i}}$.

Definimos γ_1 como la restricción de γ al conjunto cerrado $[0, t_1^1] \cup [t_1^2, t_2^1] \cup \dots \cup [t_{r-1}^2, t_r^1] \cup [t_r^2, l]$.

Llamamos η_1 a la preimagen de γ_1 por p, de tal forma que la preimagen de cada subconjunto compacto de γ_1 es otro subconjunto compacto en X'. Para cualquier $i = 1, 2, \dots, r$, está claro que podemos elegir un arco $g_i \subset X'$ conectando $p^{-1}(\gamma(t_i^1))$ y $p^{-1}(\gamma(t_i^2))$. Definimos $\eta := \eta_1 \cup g_1 \cup \dots \cup g_r$; esta es una curva continua uniendo x e y en X'.

Vamos a ver ahora que podemos escoger g_i tal que

$$\begin{gathered} L_{X'}(g_1) \le c_1 + c_4 L_X(\gamma[t_1^2, t_2^1])\,, \quad L_{X'}(g_r) \le c_1 + c_4 L_X(\gamma[t_{r-1}^2, t_r^1])\,, \\ L_{X'}(g_i) \le c_4 L_X(\gamma[t_{i-1}^2, t_i^1]) + c_4 L_X(\gamma[t_i^2, t_{i+1}^1])\,, \quad \text{si } 1 < i < r\,. \end{gathered} \tag{2.2.4}$$

Si $n_3 = n_2$, por (2.2.3) podemos elegir g_1 verificando

$$\begin{aligned} L_{X'}(g_1) &\le \operatorname{diam}_{X_{n_1}}(\eta_{n_1 n_2}) + \operatorname{diam}_{X_{n_2}}(\eta_{n_2 n_1}) \\ &\le c_1 + c_4 d_X(\gamma_{n_2 n_1}, \gamma_{n_3 n_4}) \le c_1 + c_4 L_X(\gamma[t_1^2, t_2^1])\,. \end{aligned}$$

Si $n_3 = n_1$, por (2.2.3) podemos elegir g_1 tal que verifique

$$L_{X'}(g_1) \le \operatorname{diam}_{X_{n_1}}(\eta_{n_1 n_2}) \le c_4 d_X(\gamma_{n_1 n_2}, \gamma_{n_3 n_4}) \le c_4 L_X(\gamma[t_1^2, t_2^1])\,,$$

y entonces, conseguimos la primera desigualdad de (2.2.4). La segunda desigualdad en (2.2.4) es similar.

Supongamos ahora que $1 < i < r$. Si $n_{2i+1} = n_{2i}$, por (2.2.3) podemos elegir g_i verificando

$$\begin{aligned} L_{X'}(g_i) &\le \operatorname{diam}_{X_{n_{2i-1}}}(\eta_{n_{2i-1} n_{2i}}) + \operatorname{diam}_{X_{n_{2i}}}(\eta_{n_{2i} n_{2i-1}}) \\ &\le c_4 d_X(\gamma_{n_{2i-1} n_{2i}}, \gamma_{n_{2i-3} n_{2i-2}}) + c_4 d_X(\gamma_{n_{2i-1} n_{2i}}, \gamma_{n_{2i+1} n_{2i+2}}) \\ &\le c_4 L_X(\gamma[t_{i-1}^2, t_i^1]) + c_4 L_X(\gamma[t_i^2, t_{i+1}^1])\,. \end{aligned}$$

Si $n_{2i+1} = n_{2i-1}$, por (2.2.3) podemos elegir g_i tal que cumpla

$$L_{X'}(g_i) \le \operatorname{diam}_{X_{n_{2i-1}}}(\eta_{n_{2i-1} n_{2i}}) \le c_4 d_X(\gamma_{n_{2i-1} n_{2i}}, \gamma_{n_{2i-3} n_{2i-2}}) \le c_4 L_X(\gamma[t_{i-1}^2, t_i^1])\,,$$

y entonces, conseguimos la última desigualdad de (2.2.4).

Consecuentemente, por (2.2.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
d_{X'}(x,y) &\le L_{X'}(\eta) = L_{X'}(\eta_1) + \sum_{i=1}^{r} L_{X'}(g_i) \\
&\le L_X(\gamma[0,t_1^1]) + \sum_{i=1}^{r-1} L_X(\gamma[t_i^2,t_{i+1}^1]) + L_X(\gamma[t_r^2,l]) + c_1 + c_4 L_X(\gamma[t_1^2,t_2^1]) \\
&\quad + c_4 \sum_{i=2}^{r-1} \big(L_X(\gamma[t_{i-1}^2,t_i^1]) + L_X(\gamma[t_i^2,t_{i+1}^1]) \big) + c_1 + c_4 L_X(\gamma[t_{r-1}^2,t_r^1]) \\
&\le \big(1+2c_4\big) \Big(L_X(\gamma[0,t_1^1]) + \sum_{i=1}^{r-1} L_X(\gamma[t_i^2,t_{i+1}^1]) + L_X(\gamma[t_r^2,l]) \Big) + 2c_1 \\
&\le \big(1+2c_4\big) L_X(\gamma) + 2c_1 = \big(1+2c_4\big) d_X(p(x),p(y)) + 2c_1 \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la proyección canónica $p : X' \longrightarrow X$ es una $(1+2c_4, 2c_1/(1+2c_4))$-quasi-isometría suprayectiva, y entonces, existe una "inversa" $j : X \longrightarrow X'$, la cual es una $(1+2c_4, 2c_1)$-quasi-isometría.

Finalmente, los teoremas 2.2.3 y 1.1.B dan el resultado deseado. $\square$

Como hemos dicho en el párrafo tras el enunciado del Teorema 2.2.4, si queremos crear más obstáculos topológicos al pegar los $\{X_n\}_n$, (es decir, considerar un grafo en vez de un árbol), primero aplicamos el Teorema 2.2.4 con un árbol y a continuación usamos el Teorema 2.2.2. Una aplicación muy simple de esta idea se nos muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.5. *Sea $\{X_n\}_n$ una familia de espacios métricos geodésicos. Consideremos un grafo $R := (V,E)$ con vértices $V = \{v_n\}_n$ y aristas E, tal que existe un subconjunto finito de aristas $E_1 \subset E$, con $R' := (V, E \setminus E_1)$ un árbol. Denotamos por $\{[v_n,v_m]^i\}_{i=1}^{r(n,m)}$ las aristas que conectan v_n y v_m. Construimos un espacio métrico X pegando los $\{X_n\}_n$ siguiendo el diseño combinatorio de R de la siguiente forma: si $[v_n,v_m]^i \in E$ elegimos subconjuntos compactos $\eta_{nm}^i \subseteq X_n$, $\eta_{mn}^i \subseteq X_m$, con $(\eta_{nm}^i, d_{X_n}|_{\eta_{nm}^i})$ y $(\eta_{mn}^i, d_{X_m}|_{\eta_{mn}^i})$ isométricos; definimos X como la unión de los $\{X_n\}_n$ al identificar η_{nm}^i con η_{mn}^i mediante una isometría, para cada $[v_n,v_m]^i \in E$. Supongamos que X es un espacio métrico geodésico y que existen constantes positivas c_1, c_2 tales que $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}^i) \le c_1$ y $d_{X_n}(\eta_{nm}^i, \eta_{nk}^j) \ge c_2$ si $m \ne k$ or $i \ne j$. Entonces X es hiperbólico si y sólo si existe una constante c_3 tal que X_n sea c_3-hiperbólico para todo n.*

El siguiente resultado es muy simple, pero nos será muy útil en la demostración de la Proposición 2.3.1.

Lema 2.2.1. *Sea X un espacio métrico geodésico. Si todo triángulo geodésico en X tal que sea una curva simple cerrada, es δ-thin, entonces X es δ-thin.*

Demostración. Antes de comenzar la demostración, observemos que una geodésica no puede autointersecarse. Sea T un triángulo geodésico en X con lados $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, y supongamos que $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ no es una curva simple cerrada. En los puntos en los que dos lados se intersecan, la distancia de dichos puntos a la unión de los otros dos lados es cero. Consideramos ahora un punto x que sólo pertenezca a un lado de T (sin pérdida de generalidad, $x \in \gamma_1$); hay una curva simple cerrada T_x tal que $x \in T_x \subset T$ y que es unión de dos o tres segmentos $\eta_i \subseteq \gamma_i$. Para ver esto, consideramos el segmento abierto maximal $g \subseteq \gamma_1$ con $x \in g$ y $g \cap (\gamma_2 \cup \gamma_3) = \varnothing$. Denotamos por η_1 la clausura de g y consideramos $\partial\eta_1 = \{y, z\}$. Supongamos que $y \in \gamma_2$ y $z \in \gamma_3$; ya que $\gamma_2 \cap \gamma_3$ tiene al menos un punto, podemos elegir segmentos $\eta_2 \subseteq \gamma_2$, $\eta_3 \subseteq \gamma_3$, con $\partial\eta_2 = \{y, w\}$, $\partial\eta_3 = \{z, w\}$ y $\eta_2 \cap \eta_3 = \{w\}$; entonces, $T_x = \eta_1 \cup \eta_2 \cup \eta_3$. Supongamos ahora que $y, z \in \gamma_2$ (el caso $y, z \in \gamma_3$ es similar); como γ_2 no puede autointersecarse, podemos escoger un segmento $\eta_2 \subseteq \gamma_2$ con $\partial\eta_2 = \{y, z\}$, y entonces $T_x = \eta_1 \cup \eta_2$.

Si T_x es la unión de tres segmentos $\eta_i \subseteq \gamma_i$, entonces T_x es un triángulo geodésico en X tal que es una curva simple cerrada. La hipótesis da que la distancia de x a la unión de los otros lados es menor o igual que δ.

Si T_x es la unión de dos segmentos $\eta_i \subseteq \gamma_i$, entonces T_x es un "biángulo" geodésico, y se obtiene la misma conclusión. $\square$

§2.3. Resultados en superficies de Riemann.

En esta sección presentamos resultados que permiten pegar superficies de Riemann preservando su hiperbolicidad.

La intuición podría hacernos creer que la curvatura negativa debe implicar la hiperbolicidad; de hecho, esto es lo que sucede si no hay obstáculos topológicos (como sucede con el disco de Poincaré $\mathbf{D}$) y si hay un número finito de ellos (ver Proposición 2.3.2). No obstante, si hay infinitos obstáculos topológicos, la hiperbolicidad puede fallar, como es el caso del jungle-gym bidimensional (un $\mathbf{Z}^2$-cubrimiento del toro con género 2), que es quasi-isométrico al plano euclídeo.

Los resultados de esta sección son interesantes no sólo porque nos muestran muchos ejemplos de superficies de Riemann hiperbólicas, sino porque también establecen criterios que nos permiten determinar cuándo una superficie es o no hiperbólica.

Definición 2.3.1. Un conjunto I en una superficie de Rieman abierta no excepcional S se llama *r-uniformemente separado* si las bolas $\{B_S(p,r)\}_{p\in I}$ son disjuntas dos a dos. Decimos que I es *uniformemente separado* si el valor de r no es importante.

A un conjunto I de una superficie de Rieman abierta no excepcional S le llamamos *r-fuertemente uniformemente separado* si las bolas $\{B_S(p,r)\}_{p\in I}$ son simplemente conexas y disjuntas dos a dos. Decimos que I es *fuertemente uniformemente separado* si el valor de r no es importante.

Los conjuntos fuertemente uniformemente separados juegan un papel central en el estudio de las desigualdades isoperimétricas hiperbólicas (HII) en superficies de Riemann abiertas. De hecho, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3.A. ([APR, Teorema 1]) *Sean S_1 una superficie de Riemann abierta no excepcional, I un subconjunto cerrado y numerable de S_1 y $S_2 := S_1 \setminus I$. Entonces, S_2 tiene* HII *si y sólo si S_1 tiene* HII *e I es fuertemente uniformemente separado en S_1.*

Recordemos que una superficie de Riemann abierta no excepcional S satisface una desigualdad isoperimétrica hiperbólica si hay una constante positiva h tal que

$$A_S(D) \le h\, L_S(\partial D)$$

para todo dominio relativamente compacto $D \subset S$ con frontera suave, donde $A_S(D)$ denota el área de D en la métrica de Poincaré de S.

Existen relaciones interesantes entre la desigualdad isoperimétrica hiperbólica y otros invariantes conformes de una superficie de Riemann (ver, por ejemplo, [APR], [C, p. 95], [Ch], [FR1]).

Los teoremas 2.2.2 y 2.2.4 tienen un enunciado más simple en el contexto de superficies de Riemann no excepcionales (con o sin borde) si nosotros pegamos esas superficies identificando geodésicas simples cerradas como mostramos a continuación. La superficie S_0 se obtiene según la Definición 2.2.1.

Teorema 2.3.1. *Sean S una superficie de Riemann no excepcional con borde, y $\{\eta_n^1, \eta_n^2\}_n$ $(c_1, 0)$-identificables, tal que $\{\eta_n^1, \eta_n^2\}_n \subseteq \partial S$ son geodésicas simples cerradas disjuntas dos a dos y $L_S(\eta_n^1) \le c_1$ para todo n. Entonces S es hiperbólica si y sólo si S_0 es hiperbólica. En particular, si S es δ-hiperbólica, entonces S_0 es δ'-hiperbólica, con δ' una constante universal que sólo depende de δ y c_1.*

Observación. Como los η_n^i son curvas simples cerradas, la condición de que $(\eta_n^1, d_S|_{\eta_n^1})$ y $(\eta_n^2, d_S|_{\eta_n^2})$ sean isométricos es equivalente a $L_S(\eta_n^1) = L_S(\eta_n^2)$.

Teorema 2.3.2. *Sean S una superficie de Riemann no excepional (con o sin borde) y $\{S_n\}_n$ una familia de superficies de Riemann con borde que es una $(c_1, 0)$-descomposición de S, con $\{\eta_{nm}\}_m \subseteq \partial S_n$ geodésicas simples cerradas disjuntas dos a dos para todo n y $L_S(\eta_{nm}) \le c_1$ para todo n, m. Entonces S es δ-hiperbólica si y sólo si existe una constante c_2 tal que S_n es c_2-hiperbólica para todo n. Además, δ es una constante universal que sólo depende de c_1 y c_2.*

Observación. La conclusión del Teorema 2.3.2 sigue siendo cierta si sustituimos las geodésicas simples cerradas $\eta_{nm} \subseteq \partial S_n$, por familias de geodésicas simples cerradas $\{\eta_{nm}^j\}_{j=1}^{r(n,m)} \subseteq \partial S_n$, con $r(n,m) = r(m,n)$, $L_S(\eta_{nm}^j) = L_S(\eta_{mn}^j) \le c_1$, y $d_{S_n}(\eta_{nm}^j, \eta_{nm}^l) \le c_1$.

Demostración de los teoremas 2.3.1 and 2.3.2. Estos resultados son consecuencia directa de los teoremas 2.2.2 y 2.2.4, respectivamente, y los siguiente hechos:

Toda superfice de Riemann no excepcional (con o sin borde) es un espacio métrico geodésico.

Si γ_1, γ_2, son geodésicas simples cerradas disjuntas dos a dos contenidas en una superficie de Riemann abierta no excepcional, con longitud menor o igual que a, el Lema del Collar (ver [R]) dice que existen collares de γ_i disjuntos de ancho d_0, donde $\cosh d_0 = \coth(a/2)$. Consecuentemente, $d(\gamma_1, \gamma_2) \ge 2\,\mathrm{Argcosh}(\coth(a/2))$; está claro que esta desigualdad sigue siendo cierta si S tiene borde, ya que entonces S está contenida en una superficie de Riemann abierta no excepcional. $\square$

A continuación recogemos los resultados técnicos que necesitaremos en la demostración del Teorema 2.3.3.

Lema 2.3.1. *Si η es una curva uniendo $z, w \in \partial B_{\mathbf{D}}(p,r)$, con $0 < r \le R$ y $\eta \subset \overline{B_{\mathbf{D}}(p,r)}$, entonces existe una curva $\eta_0 \subset \partial B_{\mathbf{D}}(p,r)$ uniendo z y w, con $L_{\mathbf{D}}(\eta_0) \le c_1 L_{\mathbf{D}}(\eta)$, donde c_1 es una constante universal que sólo depende de R.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p = 0$.

Es bien conocido (ver, por ejemplo, [An, p. 100]) que

$$d_{\mathbf{D}}(0,z) = \log \frac{1+|z|}{1-|z|} = 2 \operatorname{Argtanh} |z| \,,$$

y según esto, entonces $B_{\mathbf{D}}(0,r) = B(0, \tanh(r/2))$. Puesto que la densidad de la métrica de Poincaré es $\lambda_{\mathbf{D}}(z) = 2/(1-|z|^2)$, tenemos $2L(g) \le L_{\mathbf{D}}(g) \le 2L(g)/(1-\tanh^2(R/2)) = 2L(g)\cosh^2(R/2)$, para cualquier curva $g \subset \overline{B_{\mathbf{D}}(0,r)}$, si L denota la longitud euclídea. Por lo tanto, basta con probar el lema para la longitud euclídea en vez de la longitud de Poincaré. Este resultado es evidente para la longitud euclídea con constante $\pi/2$, ya que $t|\theta - \phi| \le \pi/2 |te^{i\theta} - te^{i\phi}|$ para $t > 0$ y $|\theta - \phi| \le \pi$. $\square$

Lema 2.3.2. *Sean S una superficie de Riemann abierta no excepcional e I un conjunto r-fuertemente uniformemente separado en S. Si $x, y \in S_1 := S \setminus \cup_{p\in I} B_S(p,r)$ y γ es una curva uniendo x e y en S, entonces existe una curva $\gamma_0 \subset S_1$ uniendo x e y con $L_S(\gamma_0) \le c_1 L_S(\gamma)$, donde c_1 es una constante universal que sólo depende de r. En particular, $d_S|_{S_1}(x,y) \le c_1 d_S(x,y)$, para todo $x, y \in S_1$.*

Demostración. Supongamos que $x, y \in \partial B_S(p,r)$ y $\gamma \subset \overline{B_S(p,r)}$, para algún $p \in I$; como $B_S(p,r)$ es simplemente conexo, es isométrico a $B_{\mathbf{D}}(0,r)$ y basta con aplicar el Lema 2.3.1.

En el caso general, la curva γ puede intersecar con muchas bolas $B_S(p_1,r), B_S(p_2,r), \dots, B_S(p_k,r)$. Entonces podemos sustituir cada componente conexa η^{ij} de $\eta^i := \gamma \cap \overline{B_S(p_i,r)}$ por una curva $\eta_0^{ij} \subset \partial B_S(p_i,r)$ como en el último caso. Como la constante c_1 es la misma para cualquier i, la curva γ_0 es la unión de η_0^{ij} y $\gamma \setminus \cup_{i=1}^k \eta^i$. $\square$

Lema 2.3.3. *Sean S una superficie de Riemann abierta no excepcional con una puntura p, y $0 < \alpha \le 1$. Entonces, tenemos que*

$$C_S\Big(p, \frac{4\alpha}{\sqrt{\alpha^2+16}}\Big) \cap \gamma = \varnothing \,,$$

para cualquier geodésica γ uniendo puntos $w_1, w_2 \in S \setminus C_S(p,\alpha)$.

Demostración. Es bien conocido que S puede expresarse como un cociente $\mathbf{U}/\Gamma$, donde Γ es un grupo discreto de transformaciones de Möbius preservando el semiplano superior $\mathbf{U}$, y el conjunto $D_\alpha = \{z \in \mathbf{U} : 0 \le \operatorname{Re} z < 1\,,\ \operatorname{Im} z > 1/\alpha\}$ es proyectado biyectivamente sobre $C_S(p,\alpha)$, para $0 < \alpha \le 1$.

Sea γ una geodésica uniendo los puntos $w_1, w_2 \in S \setminus C_S(p,\alpha)$. Si γ no interseca $C_S(p,\alpha)$, entonces no hay nada que probar, ya que $4\alpha/\sqrt{\alpha^2+16} < \alpha$. Podemos asumir que γ interseca a $C_S(p,\alpha)$. Entonces, existe una geodésica η en $\mathbf{U}$ (una semicircunferencia centrada en un punto del eje real) cuya proyección es γ y tal que la proyección de $\eta \cap D_\alpha$ es $\gamma \cap C_S(p,\alpha)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que η interseca con la recta horizontal $\{\operatorname{Im} z = 1/\alpha\}$ en los puntos i/α, $t+i/\alpha$, con $0 < t \le 1/2$ (si $t > 1/2$, la geodésica uniendo i/α, $t-1+i/\alpha$ sería más corta).

Está claro que el peor caso es cuando $t = 1/2$. Tomamos, por lo tanto, $t = 1/2$, y calculamos el radio euclídeo r del semicírculo η; entonces, $\gamma \cap C_S(p,\beta) = \varnothing$ para $\beta = 1/r$. Si $z = x + iy$, la ecuación de η es $(x-1/4)^2 + y^2 = r^2$. Como $i/\alpha \in \eta$, tenemos $1/16 + 1/\alpha^2 = r^2$, lo cual da $r = \sqrt{\alpha^2+16}/(4\alpha)$ y $\beta = 4\alpha/\sqrt{\alpha^2+16}\,$. □

El lema siguiente da la primera familia de ejemplos de superficies de Riemann no excepcionales hiperbólicas.

Lema 2.3.4. *Todo α-collar de una puntura en una superficie de Riemann abierta no excepcional es c_0-thin, para $0 < \alpha \le 1$, con $c_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{17}{16}$. Además, la clausura de cualquier α-collar de una puntura es c_0-thin, para $0 < \alpha < 1$.*

Demostración. Observemos que, dado $0 < \alpha \le 1$, dos α-collares cualesquiera son isométricos. Como $C_S(p,\alpha) \subseteq C_S(p,1)$ para cualquier $0 < \alpha \le 1$ y las geodésicas (con la métrica de $C_S(p,1)$) uniendo $w_1, w_2 \in C_S(p,\alpha)$ están contenidas en $C_S(p,\alpha)$, se tiene que si $C_S(p,1)$ es c_0-thin, entonces $C_S(p,\alpha)$ is c_0-thin, para cualquier $0 < \alpha \le 1$. El mismo argumento es válido para $\overline{C_S(p,\alpha)}$, con $0 < \alpha < 1$. Por tanto, es suficiente ver que $C_S(p,1)$ is c_0-thin.

Podemos escribir dicho collar como la siguiente unión $C_S(p,1) = \cup_{0<\alpha<1} \partial C_S(p,\alpha)$. Dado un triángulo geodésico $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ en $C_S(p,1)$, denotamos por α_i el número positivo tal que $x_i \in \partial C_S(p,\alpha_i)$. Cambiando apropiadamente la notación, podemos suponer que $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 < 1$. Por el Lema 2.3.3, $T \cap C_S(p, 4\alpha_1/\sqrt{\alpha_1^2+16}\,) = \varnothing$; entonces, $T \subset \cup_{4\alpha_1/\sqrt{\alpha_1^2+16} \le \alpha \le \alpha_3} \partial C_S(p,\alpha)$.

Está claro que todo $\partial C_S(p,\alpha)$, con $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_3$, interseca al menos con dos lados de T;

como $L_S(\partial C_S(p,\alpha))=\alpha$, si $x\in T\cap\partial C_S(p,\alpha)$, con $\alpha_1\le\alpha\le\alpha_3$, entonces la distancia de x a la unión de los otros lados de T es menor o igual que $\alpha/2\le 1/2$. Si $x\in T\cap\partial C_S(p,\alpha)$, con $4\alpha_1/\sqrt{\alpha_1^2+16}\le\alpha<\alpha_1$, entonces

$$d_S(x,\partial C_S(p,\alpha_1))\le d_S\Big(\partial C_S(p,\alpha_1),\partial C_S\Big(p,\frac{4\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+16}}\Big)\Big)=\frac{1}{2}\log\Big(1+\frac{\alpha_1^2}{16}\Big)\le\frac{1}{2}\log\frac{17}{16}\,,$$

y, como hay un punto de la unión de los otros lados de T en $\partial C_S(p,\alpha_1)$, entonces la distancia de x a la unión de los otros lados de T es menor o igual que $\frac{\alpha_1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{17}{16}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{17}{16}$. Esto finaliza la prueba. $\square$

El siguiente teorema permite, en mucho casos, olvidarnos de las punturas a la hora de estudiar la hiperbolicidad de una superficie de Riemann; esto supone una gran simplificación en la topología de la superficie, y por tanto facilita el estudio de su hiperbolicidad.

Teorema 2.3.3. *Sean S una superficie de Riemann abierta no excepcional e I un conjunto r-fuertemente uniformemente separado en S. Entonces, S es hiperbólica si y sólo si $S^*:=S\setminus I$ es hiperbólica. En particular, si S es δ-hiperbólica entonces S^* es δ'-hiperbólica, con δ' una constante universal que sólo depende de δ y r.*

Observación. Recordemos que $d_{S^*}\neq d_S|_{S^*}$, ya que (S^*,d_{S^*}) es una variedad Riemanniana completa (los puntos de I están a distancia d_{S^*} infinita de los puntos de S^*). Este hecho también implica que (S^*,d_{S^*}) es un espacio métrico geodésico.

Demostración. Supongamos que S es δ-hiperbólica. La idea de la demostración es dividir S en dos conjuntos: en un entorno del conjunto I (en el que podremos hacer cálculos a partir de los lemas previos), y el complementario de dicho conjunto (en el cual d_S y d_{S^*} son comparables).

Por la Proposición 1 en [APR], existen $0<r_1<r_2<r$ y $0<\alpha<1$, que sólo dependen de r, tales que

$$B_S(p,r_1)\subseteq C_{S^*}(p,\alpha)\cup\{p\}\subseteq B_S(p,r_2)\,.$$

Definimos $S_0:=S^*\setminus\cup_{p\in I}C_{S^*}(p,\alpha)$. Entonces tenemos que

$$S^*=S_0\cup\big(\cup_{p\in I}\,\overline{C_{S^*}(p,\alpha)}\,\big)\,.$$

Por el Lema 1.2.A, se tiene que

$$\tanh\frac{r_1}{2}<\frac{L_S(\gamma)}{L_{S^*}(\gamma)}<1\,,$$

para toda curva $\gamma \subset S_0$ con longitud finita en S. Y obtenemos para $x, y \in S_0$

$$\tanh \frac{r_1}{2} \le \frac{d_S|_{S_0}(x,y)}{d_{S^*}|_{S_0}(x,y)} \le 1\,.$$

Así pues, la identidad $i : (S_0, d_{S^*}|_{S_0}) \longrightarrow (S_0, d_S|_{S_0})$ es una quasi-isometría con constantes que sólo dependen de r. Obsérvese que $(S_0, d_{S^*}|_{S_0})$ y $(S_0, d_S|_{S_0})$ son espacios métricos geodésicos (son superficies de Riemann no excepcionales con borde).

Probamos ahora que la inclusión $j : (S_0, d_S|_{S_0}) \longrightarrow (S, d_S)$ es una quasi-isometría con constantes que sólo dependen de r.

Se puede ver que para todo $x, y \in S_0$ tenemos que $d_S(x,y) \le d_S|_{S_0}(x,y)$, ya que hay más curvas uniendo x e y en S que en S_0.

Veamos la otra desigualdad. Si $x, y \in S \setminus \cup_{p\in I} B_S(p, r_2)$, entonces el Lema 2.3.2 nos da

$$d_S|_{S_0}(x,y) \le d_S|_{S\setminus \cup_{p\in I} B_S(p,r_2)}(x,y) \le c_1 d_S(x,y)\,, \tag{2.3.1}$$

ya que $S \setminus \cup_{p\in I} B_S(p, r_2) \subseteq S_0$, donde c_1 es una constante que sólo depende de r.

Si $x, y \in S_0$, podemos elegir $x', y' \in S \setminus \cup_{p\in I} B_S(p, r_2)$, con $d_S(x, x') \le d_S|_{S_0}(x, x') \le r_2 - r_1$ y $d_S(y, y') \le d_S|_{S_0}(y, y') \le r_2 - r_1$. Y (2.3.1) da que

$$\begin{aligned} d_S|_{S_0}(x,y) &\le d_S|_{S_0}(x',y') + 2(r_2 - r_1) \le c_1 d_S(x',y') + 2(r_2 - r_1) \\ &\le c_1 d_S(x,y) + 2(r_2 - r_1)(1 + c_1)\,. \end{aligned}$$

Consecuentemente, $j : (S_0, d_S|_{S_0}) \longrightarrow (S, d_S)$ es una quasi-isometría con constantes que sólo dependen de r.

Como S es δ-hiperbólica y $j \circ i$ es una quasi-isometría, el Teorema 1.1.B nos garantiza que $(S_0, d_{S^*}|_{S_0})$ es δ_1-hiperbólica, con δ_1 una constante universal que sólo depende de δ y r.

Recordemos que, por el Lema 2.3.4, $\overline{C_{S^*}(p,\alpha)}$ es c_0-hiperbólica para todo $p \in I$.

Si $p, q \in I$ y $p \ne q$, tenemos

$$\operatorname{diam}_{S^*}(\partial C_{S^*}(p,\alpha)) \le L_{S^*}(\partial C_{S^*}(p,\alpha)) = \alpha < 1\,,$$

$$\begin{aligned} d_{S^*}(\partial C_{S^*}(p,\alpha), \partial C_{S^*}(q,\alpha)) &\ge d_{S^*}(\partial C_{S^*}(p,\alpha), \partial C_{S^*}(p,1)) + d_{S^*}(\partial C_{S^*}(q,1), \partial C_{S^*}(q,\alpha)) \\ &= 2 \log \frac{1}{\alpha}\,. \end{aligned}$$

Entonces, el Teorema 2.2.4 da que S^* es δ'-hiperbólica, con δ' una constante universal que sólo depende de δ y r.

Veamos ahora la otra implicación. Sea S^* hiperbólica; entonces, el Teorema 2.2.4 también da que $(S_0, d_{S^*}|_{S_0})$ es hiperbólica. Como i es una quasi-isometría suprayectiva, el Teorema 1.1.B garantiza que $(S_0, d_S|_{S_0})$ es hiperbólica.

Si $p, q \in I$ y $p \neq q$, tenemos

$$\operatorname{diam}_S(\partial C_{S^*}(p,\alpha)) \leq \operatorname{diam}_S(B_S(p,r_2)) = 2r_2\,,$$
$$d_S(\partial C_{S^*}(p,\alpha), \partial C_{S^*}(q,\alpha)) \geq d_S(B_S(p,r_2), B_S(q,r_2)) \geq 2(r-r_2)\,.$$

Ya que $\operatorname{diam}_S(C_{S^*}(p,\alpha) \cup \{p\}) \leq 2r_2$, entonces $C_{S^*}(p,\alpha) \cup \{p\}$ (con su métrica en S) es $2r_2$-hiperbólica, para todo $p \in I$. Por tanto, el Teorema 2.2.4 da que S es hiperbólica. □

La siguiente proposición proporciona la segunda familia de ejemplos de superficies de Riemann no excepcionales hiperbólicas, con un comportamiento cualitativo de las constantes de hiperbolicidad.

Proposición 2.3.1. *Sean A un anillo, γ su geodésica simple cerrada verificando $L_A(\gamma) \leq a$, y F un fonil con borde γ. Entonces F and A son c_1-hiperbólicos, donde c_1 es una constante que sólo depende de a.*

Este resultado se prueba en [RT1], con una demostración larga y con bastantes cuentas. Sin embargo, hemos preferido no incluir aquí dicha demostración ya que, como consecuencia del trabajo desarrollado en la Sección 3.3, se puede encontrar una prueba que incluso da una expresión explícita para c_1 (ver Lema 3.3.4 y Corolario 3.3.1).

Este resultado permite encontrar importantes clases de superficies de Riemann no excepcionales hiperbólicas, las cuales aparecen en las proposiciones 2.3.2 y 2.3.3.

Definición 2.3.2. Decimos que una superficie de Riemann no excepcional S (con o sin borde) es *de tipo finito* si su grupo fundamental está finitamente generado. Si S no tiene borde, entonces es simple o doblemente conexa o podemos obtenerla a partir de una superficie de Riemann compacta no excepcional pegando n collares de punturas y m foniles.

Parte de la siguiente proposición también aparece en el Capítulo 3 de esta tesis (ver Corolario 3.3.2), pero con otra línea de argumentación diferente a la que mostraremos a continuación. Allí se consigue una expresión explícita para la constante de hiperbolicidad.

Proposición 2.3.2. *Toda superficie de Riemann no excepcional de tipo finito, con borde compacto o sin borde, es hiperbólica.*

Demostración. Vamos a considerar una superficie de Riemann no excepcional de tipo finito S con borde compacto o sin borde.

Si es simplemente conexa, entonces es isométrica a $\mathbf{D}$ (y por lo tanto hiperbólica) o a un subconjunto de $\mathbf{D}$ cuyo borde es una curva de Jordan (así pues es compacta, y consecuentemente es hiperbólica).

Supongamos que S es doblemente conexa. Si S no tiene borde, entonces es isométrica a $\mathbf{D}^*$ o a un anillo, y entonces es hiperbólica por el Teorema 2.3.3 o por la Proposición 2.3.1. Si S tiene borde compacto, entonces es isométrica a una superficie con borde S_1 contenida en R, donde R es $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^*$ o un anillo; dicha superficie R es la unión de S_1 y, a lo sumo, otras dos superficies con borde. Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.2.4 concluimos que S_1 es hiperbólica, ya que R es hiperbólica.

Supongamos ahora que S no es ni simple ni doblemente conexa. Si S no tiene borde, entonces podemos obtenerla a partir de una superficie de Riemann no excepcional compacta S_0 pegando n collares de punturas y m foniles. Sabemos por el Lema 2.3.4 y la Proposición 2.3.1 que los collares de las punturas y foniles son hiperbólicos. Como S_0 tiene diámetro finito, también es hiperbólico. Ahora, el Teorema 2.2.4 da el resultado. Si S tiene borde compacto, entonces existen una superficie de Riemann no excepcional sin borde de tipo finito R y superficies de Riemann compactas no excepcionales con borde $S_1, \dots, S_n$ tales que $R = S \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n$; ahora el Teorema 2.2.5 da el resultado. $\square$

Proposición 2.3.3. *Sea Y una Y-pieza generalizada con borde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (γ_i son geodésicas simples cerradas o punturas). Si $L(\gamma_i) \leq a$ para $i = 1, 2, 3$, entonces Y es c_2-hiperbólica, donde c_2 es una constante que sólo depende de a.*

Observación. En este resultado, como sucede a menudo, se puede considerar un puntura como una geodésica de longitud cero.

Demostración. Sea T un triángulo geodésico en Y, tal que es una curva simple cerrada. Entonces, T es homotópicamente trivial o libremente homótopo a γ_i para algún $i = 1, 2, 3$.

En el primer caso, T es el borde de un dominio simplemente conexo Ω. Así pues, existe un dominio simplemente conexo $\Omega_0 \subset \mathbf{D}$, con $\overline{\Omega_0}$ isométrico a $\overline{\Omega}$. Ya que $\partial\Omega_0$ es un triángulo geodésico en $\mathbf{D}$, es $\log(1+\sqrt{2})$-thin [An, p. 130]. Consecuentemente, T es $\log(1+\sqrt{2})$-thin.

Si T libremente homótopo a γ_i, entonces $T \cup \gamma_i$ es el borde de un dominio doblemente conexo G. Por tanto, hay un dominio doblemente conexo G_0 contenido en el anillo A

con geodésica simple cerrada de longitud $L(\gamma_i)$, con $\overline{G_0}$ isométrico a $\overline{G}$. Como una de las componentes conexas de ∂G_0 es un triángulo geodésico en A, este es $4c_1$-thin por la Proposición 2.3.1, donde c_1 es una constante que sólo depende de a. Por lo tanto, T es $4c_1$-thin.

Ya que todo triángulo geodésico en $\mathbf{D}$ es isométrico a un triángulo geodésico en A, tenemos que $\log(1+\sqrt{2}\,) \le 4c_1$. Consecuentemente, todo triángulo geodésico $T \subset Y$, que sea una curva simple cerrada, es $4c_1$-thin.

Y finalmente, el Lema 2.2.1 y el Teorema 1.1.A dan el resultado que buscábamos. □

Muchas superficies de Riemann pueden descomponerse en la unión de foniles e Y-piezas generalizadas (ver [FM, Teorema 4.1] y [AR]). El siguiente resultado utiliza esta descomposición a la hora de obtener la hiperbolicidad.

No obstante, hay que decir que también este resultado está mejorado en el Capítulo 4 de esta tesis (ver Teorema 4.3.2). También damos expresiones explícitas para c_1 en los capítulos 3 y 4 de esta tesis (ver teoremas 3.3.3 y 4.3.1).

Teorema 2.3.4. *Sean S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde) sin género (S puede verse como un subconjunto del plano complejo) y $a > 0$. Si hay una descomposición de S como unión de foniles e Y-piezas generalizadas $\{Y_n\}_n$ con $L_S(\partial Y_n) \le a$, entonces S es c_1-hiperbólica, donde c_1 es una constante que sólo depende de a.*

Demostración. Puesto que S no tiene género, podemos obtener S pegando los foniles y las Y-piezas siguiendo el diseño combinatorio de un árbol. La Proposición 2.3.3 da que Y_n es c_2-hiperbólica, donde c_2 es una constante que sólo depende de a. Como todo fonil está conectado con alguna Y-pieza, su correspondiente geodésica simple cerrada tiene longitud menor o igual que a; aplicando la la Proposición 2.3.1 tenemos que los foniles en S son c_3-hiperbólicos, donde c_3 es una constante que sólo depende de a. Consecuentemente, el Teorema 2.3.2 nos da el resultado que deseábamos. □

Los Teoremas 2.3.4 y 2.3.1 dan directamente el siguiente resultado.

Corolario 2.3.1. *Sean S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde) de género finito y $a > 0$. Si hay una descomposición de S como unión de foniles e Y-piezas generalizadas $\{Y_n\}_n$ con $L_S(\partial Y_n) \le a$, entonces S es hiperbólica.*

El Teorema 2.3.4 también nos aporta muchos ejemplos no triviales de superficies de Riemann no excepcionales hiperbólicas.

Definición 2.3.3. Vamos a definir de forma natural una familia de conjuntos de Cantor inductivamente. Fijamos sucesiones $\{r_n\}$ y $\{R_n\}$ de números positivos, y $\{N_n\}$ de números naturales, con $r_n \geq c_1 R_n N_n$ y $r_{n-1} \geq c_2 r_n R_{n-1}$, para algunas constantes positivas c_1, c_2. Consideramos primero el intervalo $J_0 := [0,1]$ en la 0-generación K_0. Si tenemos un intervalo J en la $(n-1)$-generación, elegimos N_n subintervalos cerrados $J_1, \ldots, J_{N_n}$ de J; denotamos por $I_1, \ldots, I_{N_n-1}$ los subintervalos abiertos de J que están entre los subintervalos cerrados $J_1, \ldots, J_{N_n}$ (es decir, $J_1 \cup \cdots \cup J_{N_n} \cup I_1 \cup \cdots \cup I_{N_n-1}$ es un intervalo). Supongamos que $|J_j|/|J| \leq R_n$ y $|I_j|/|J| \geq r_n$. La n-generación K_n es la definida por inducción como la unión de todo subintervalo J_j de cualquier intervalo $J \in K_{n-1}$. Decimos que $K := \cap_n K_n$ es un $(\{r_n\}, \{R_n\}, \{N_n\})$-*conjunto de Cantor.*

Corolario 2.3.2. *El complemento en la esfera de Riemann o en el plano complejo de cualquier* $(\{r_n\}, \{R_n\}, \{N_n\})$*-conjunto de Cantor es* δ*-hiperbólico, donde* δ *es una constante que sólo depende de* c_1 *y* c_2*.*

Demostración. Podemos obtener la descomposición de una superficie en Y-piezas, dividiendo sucesivamente en dos grupos los intervalos de cada generación (ponemos en cada grupo el mismo número de intervalos ± 1). Las condiciones $r_n \geq c_1 R_n N_n$ y $r_{n-1} \geq c_2 r_n R_{n-1}$, garantizan que hay suficientes "agujeros" grandes (que dependen sólo de c_1 y c_2) entre los intervalos en K_n. Así pues, un argumento estándar da que las geodésicas simples cerradas tienen longitud acotada por una constante que sólo depende de c_1 y c_2. El resultado final es ahora una consecuencia del Teorema 2.3.4. $\square$

El mismo razonamiento nos da un resultado similar para familias de conjuntos de Cantor bidimensionales.

§3. LAS GEODESICAS SIMPLES CERRADAS DETERMINAN LA HIPERBOLICIDAD DE LAS SUPERFICIES DE RIEMANN

§3.1. Introducción.

En este capítulo de la tesis nos planteamos, de nuevo, el problema de determinar cuándo una superficie de Riemann es o no hiperbólica, pero desde un enfoque totalmente distinto. Si en el capítulo anterior intentábamos enfrentarnos al problema dividiendo el espacio en subespacios y estudiando la hiperbolicidad localmente para obtener así información global sobre la misma, ahora intentamos abordarlo simplificando el conjunto de triángulos sobre los que hay que verificar la condición de Rips (que es equivalente a la hiperbolicidad de Gromov: ver Definición 1.1.3 y Teorema 1.1.A). La pregunta natural que nos planteamos es: ¿existe alguna clase privilegiada de triángulos para los que sea suficiente garantizar la condición de Rips?

El principal resultado de este capítulo es el Teorema 3.3.1 que permite reducir drásticamente el conjunto de triángulos sobre los que hay que comprobar la condición de Rips en las superficies de Riemann. En [FR1, Lema 1.2] se demuestra que para comprobar la desigualdad isoperimétrica lineal en una superficie de Riemann es suficiente estudiar dominios cuyo borde es unión finita de geodésicas simples cerrada; este hecho es interesante en sí mismo y además tiene importantes consecuencias, como la estabilidad de la desigualdad isoperimétrica lineal bajo aplicaciones quasiconformes (ver [FR1, Teorema 1]), y la equivalencia de la desigualdad isperimétrica lineal y la desigualdad de Poincaré (ver [FR1, Teorema 2]). Similarmente a lo que ocurre para la desigualdad isoperimétrica, el Teorema 3.3.1 afirma que si los triángulos contenidos en geodésicas simples cerradas de una superficie de Riemann S satisfacen la condición de Rips, entonces S es hiperbólica.

Este teorema, aparte de la importancia que tiene por sí mismo, nos permite obtener cotas muy buenas para las constantes de hiperbolicidad de ciertas clases de superficies, tales como el disco menos un punto, los anillos y las Y-piezas (ver Lema 3.3.4 y corolarios 3.3.1 y 3.3.3).

Es también una herramienta muy útil para estudiar la hiperbolicidad de una clase de superficies de Riemann según su descomposición en Y-piezas y foniles (ver Teorema 3.3.3).

Como consecuencia de estos resultados, conseguimos ejemplos interesantes sobre superficies de Riemann hiperbólicas (ver Teorema 3.3.3 y corolarios 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3), y un resultado que permite una mejor comprensión del papel que juegan los foniles y los semidiscos (ver Definición 1.2.8) en el estudio de la hiperbolicidad (ver Teorema 3.3.2). Además, gracias al Teorema 3.3.2 hemos conseguido varias aplicaciones que veremos en el Capítulo 4.

§3.2. Resultados en espacios métricos.

Empezaremos mostrando algunos lemas técnicos que necesitaremos en las demostraciones de los teoremas de la siguiente sección.

Lema 3.2.1. *Sean X un espacio métrico geodésico y $\varepsilon > 0$. Si γ es una curva continua uniendo $x, y \in X$ con $L_X(\gamma) \le d_X(x,y) + \varepsilon$, entonces γ es una $(1,\varepsilon)$-quasigeodésica con su parametrización por longitud de arco.*

Demostración. Consideramos γ con su parametrización por longitud de arco $\gamma : [0,l] \longrightarrow X$. Como γ es continua, se verifica que $d_X(\gamma(t),\gamma(s)) \le L_X(\gamma([t,s])) = |t-s|$. Veamos ahora que $|t-s| \le d_X(\gamma(t),\gamma(s)) + \varepsilon$. Supongamos que existen $0 \le t, s \le l$ con $|t-s| > d_X(\gamma(t),\gamma(s)) + \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t < s$. Definimos una curva γ_0 uniendo tres curvas: $\gamma([0,t])$, una geodésica η conectando $\gamma(t)$ con $\gamma(s)$, y $\gamma([s,l])$. Como γ_0 es una curva continua conectando x con y, tenemos que

$$\begin{aligned} d_X(x,y) &\le L_X(\gamma_0) = L_X(\gamma) - L_X(\gamma([t,s])) + d_X(\gamma(t),\gamma(s)) \\ &= L_X(\gamma) - |t-s| + d_X(\gamma(t),\gamma(s)) \\ &< L_X(\gamma) - \varepsilon \le d_X(x,y)\,, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 3.2.1. *Sean X un espacio métrico geodésico y $\varepsilon > 0$. Si γ es una curva continua con $L_X(\gamma) \le \varepsilon$, entonces γ es una $(1,\varepsilon)$-quasigeodésica con su parametrización por longitud de arco.*

Lema 3.2.2. *Sea X un espacio métrico con una geodésica cerrada g de longitud l. Si γ es una $(1,c)$-quasigeodésica continua e inyectiva en X con su parametrización por longitud de arco, y está contenida en g, entonces $L(\gamma) \le (l+c)/2$.*

Observaciones.

1. Toda geodésica cerrada es sólo geodésica local pero no una geodésica (ver Definición 1.1.2); por tanto, y como no hay posibilidad de confusión, la llamamos geodésica cerrada en lugar de geodésica local cerrada.

2. Si γ es una geodésica, se tiene que $L(\gamma) \le l/2$; el Lema 3.2.2 generaliza este hecho.

Demostración. Consideramos γ con su parametrización por longitud de arco $\gamma : [0, l_0] \longrightarrow X$. Supongamos que $l_0 > (l + c)/2$; entonces $l - l_0 < l_0 - c$. Obsérvese que $d(\gamma(0), \gamma(l_0)) \le l - l_0$, ya que $g \setminus \gamma$ es una curva continua de longitud $l - l_0$ uniendo $\gamma(0)$ y $\gamma(l_0)$ (γ es continua e inyectiva). Así pues, tenemos que $l_0 - c \le d(\gamma(0), \gamma(l_0)) \le l - l_0 < l_0 - c$, lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 3.2.3. *Todo triángulo (a, b)-quasigeodésico en un espacio métrico geodésico δ-hiperbólico X es $(4\delta + 2H(\delta, a, b))$-thin, donde H es la constante del Teorema* 1.1.*C*.

Demostración. Dado un triángulo (a, b)-quasigeodésico en X de lados q_1, q_2, q_3, el Teorema 1.1.C nos dice que existen geodésicas g_1, g_2, g_3, tales que g_i tiene el mismo punto final que q_i y $\mathcal{H}(g_i, q_i) \le H = H(\delta, a, b)$. Si $\{i, j, k\}$ es cualquier permutación de $\{1, 2, 3\}$, y $x \in q_i$, entonces hay un punto $x' \in g_i$ con $d(x, x') \le H$. Como X es 4δ-thin, podemos encontrar $y' \in g_j \cup g_k$ con $d(y', x') \le 4\delta$. También existe un punto $y \in q_j \cup q_k$ con $d(y', y) \le H$. Consecuentemente $d(x, q_j \cup q_k) \le d(x, y) \le 4\delta + 2H$. $\square$

El siguiente resultado que mostraremos es una modificación del Teorema 2.2.4 del capítulo anterior (usando una línea argumental completamente distinta). Además, esta demostración nos da expresiones explícitas para las constantes involucradas. Esto puede aplicarse al estudio de la hiperbolicidad de las superficies de Riemann (ver Teorema 3.3.3), pero antes de pasar a verlo necesitamos dar una nueva definición.

Definición 3.2.1. Decimos que los espacios métricos geodésicos $\{X_n\}_{n\in\Lambda}$ son una (c_1, c_2)-*descomposición regular* de un espacio métrico geodésico X si verifican las siguientes condiciones:

(a) $X = \cup_{n\in\Lambda} X_n$ y $X_n \cap X_m = \eta_{nm}$, donde para cada $n \in \Lambda$, $\{\eta_{nm}\}_{m\in\Lambda}$ son subconjuntos disjuntos dos a dos X_n (se permite $\eta_{nm} = \varnothing$); además cualquier geodésica en X con longitud finita interseca como mucho con un número finito de η_{nm}'s.

(b) Para cualesquiera $n, m \in \Lambda$, $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \le c_1$ y si $\eta_{nm} \ne \varnothing$, entonces $X \setminus \eta_{nm}$ no es conexo y a, b están en diferentes componentes conexas de $X \setminus \eta_{nm}$ para cualquier $a \in X_n \setminus \eta_{nm}$, $b \in X_m \setminus \eta_{nm}$.

(c) Para cada $n \in \Lambda$ existen conjuntos distintos $A_n, B_n \subseteq \Lambda$, verificando las siguientes propiedades: si $m \notin A_n \cup B_n$, entonces $\eta_{nm} = \varnothing$; $\operatorname{diam}_{X_n}(\cup_{m \in A_n} \eta_{nm}) \leq c_2$; y toda geodésica uniendo dos puntos en X_n no puede salir de X_n atravesando un η_{nm} con $m \in B_n$,

Observaciones.

1. Los conjuntos Λ, A_n y B_n no tienen que ser numerables.

2. La hipótesis sobre $X \setminus \eta_{nm}$ garantiza que el grafo $R = (V, E)$ construido de la siguiente forma es un árbol: $V = \cup_{n \in \Lambda}\{v_n\}$ y $[v_n, v_m] \in E$ si y sólo si $\eta_{nm} \neq \varnothing$.

3. Podríamos pensar que la hipótesis "una geodésica uniendo dos puntos en X_n no puede salir de X_n atravesando un η_{nm} con $m \in B_n$", puede parecer muy restrictiva; sin embargo, como veremos más adelante, el Lema 3.3.5 da una condición muy simple que permite asegurar esta hipótesis.

4. Si X es una superficie de Riemann, los $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$ son superficies de Riemann con borde y $\eta_{nm} \subset \partial X_n \cap \partial X_m$, la condición "$a, b$ están en diferentes componentes de $X \setminus \eta_{nm}$ para cualquier $a \in X_n \setminus \eta_{nm}$, $b \in X_m \setminus \eta_{nm}$" en (b), es una consecuencia de "$X \setminus \eta_{nm}$ no es conexo".

Teorema 3.2.1. *Sea $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$ una (c_1, c_2)-descomposición regular de un espacio métrico geodésico X. Si existe una constante δ_0 tal que X_n es δ_0-thin para todo $n \in \Lambda$, entonces X es δ-thin con $\delta = 20\delta_0 + \max\{c_1 + c_2/2, c_2\}$.*

Demostración. Consideremos un triángulo geodésico $T = \{a, b, c\}$ en X. Si $T \subseteq X_n$ para algún n, entonces T es δ_0-thin, por hipótesis. Supongamos ahora que T interseca con varios X_n's. La idea de la prueba consiste en estudiar T separadamente en cada X_n.

Tomemos $z \in T$. Si z pertenece a dos lados de T, no hay nada que probar; si z pertenece a un único lado de T, denotemos por A la unión de los lados de T que no intersecan con z.

Fijemos $n \in \Lambda$. Supongamos primero que los tres lados de T intersecan con X_n.

Construimos un polígono geodésico P_n en X_n modificando $T \cap X_n$ de la siguiente forma: Consideremos un lado γ_i $(i = 1, 2, 3)$ de T. Si $\gamma_i \subseteq X_n$, definimos $g_i := \gamma_i$. Si γ_i no está contenido en X_n, consideremos $\gamma_i : [0, l] \longrightarrow X$. Definimos

$$t_1^i := \min\{0 \leq t \leq l : \gamma_i(t) \in X_n\}, \qquad t_4^i := \max\{0 \leq t \leq l : \gamma_i(t) \in X_n\}.$$

Si $\gamma_i([t_1^i, t_4^i]) \subseteq X_n$, consideramos $g_i := \gamma_i([t_1^i, t_4^i])$. En otro caso, definimos

$$t_2^i := \min\{0 \leq t \leq l : \gamma_i(t) \in \cup_{m \in A_n} \eta_{nm}\}, \quad t_3^i := \max\{0 \leq t \leq l : \gamma_i(t) \in \cup_{m \in A_n} \eta_{nm}\},$$

y $g_i := \gamma_i([t_1^i, t_2^i]) \cup [\gamma_i(t_2^i), \gamma_i(t_3^i)] \cup \gamma_i([t_3^i, t_4^i])$, donde elegimos una geodésica $[\gamma_i(t_2^i), \gamma_i(t_3^i)]$ en X_n. Este mínimo y este máximo existen, ya que γ_i es una función continua en un intervalo compacto y $\gamma_i \cap (\cup_{m\in A_n} \eta_{nm})$ es un conjunto compacto: cada η_{nm} es un conjunto cerrado y γ_i interseca como mucho un número finito de η_{nm}'s.

Es posible que $g_1 \cup g_2 \cup g_3$ no sea un polígono, ya que pueden existir espacios entre dos g_i's. Como $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq c_1$ y $X \setminus \eta_{nm}$ no es conexo para cualquier $m \in \Lambda$, podemos encontrar tres geodésicas h_1, h_2, h_3 en X_n de longitud menor o igual que c_1 tal que $g_1 \cup h_1 \cup g_2 \cup h_2 \cup g_3 \cup h_3$ es un polígono geodésico P_n en X_n (algún h_i puede ser un punto). Así pues, P_n tiene como mucho 12 lados, y por tanto es $10\delta_0$-thin.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z \in g_1$. Para simplificar la notación, definimos $x_j := \gamma_1(t_j^1)$ para $1 \leq j \leq 4$.

Si $g_1 := \gamma_1([t_1^1, t_4^1]) = [x_1, x_4]$, entonces existe $w' \in P_n \setminus \operatorname{int} g_1$ con $d_{X_n}(z, w') \leq 10\delta_0$, donde $\operatorname{int} g_1$ denota g_1 sin los puntos de los extremos. Si $w' \in A$, entonces $d_X(z, A) \leq 10\delta_0$; si $w' \notin A$, entonces existe $w \in P_n \cap A$ con $d_{X_n}(w, w') \leq \max\{c_1, c_2/2\}$, y consecuentemente $d_X(z, A) \leq 10\delta_0 + \max\{c_1, c_2/2\}$.

Supongamos ahora que $g_1 := [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$. Recordemos que $[x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \subseteq \gamma_i \subseteq T$, y $L_X([x_2, x_3]) \leq c_2$. Denotemos por $a_1 \in [x_1, x_2]$ el punto más alejado de x_2 tal que $d_{X_n}(a_1, [x_2, x_3]) \leq 10\delta_0$; de forma similar, definimos $a_2 \in [x_3, x_4]$ como el punto más alejado de x_3 tal que $d_{X_n}(a_2, [x_2, x_3]) \leq 10\delta_0$; así pues $d_{X_n}(a_1, a_2) \leq 20\delta_0 + c_2$.

Sea $b_1 \in [a_1, x_1]$ el punto más alejado de a_1 tal que $d_{X_n}(b_1, [x_3, x_4]) \leq 10\delta_0$ (si dicho b_1 no existe, tomamos $b_1 := a_1$) y $b_2 \in [a_2, x_4]$ el punto más alejado de a_2 tal que $d_{X_n}(b_2, [x_1, x_2]) \leq 10\delta_0$ (si tal b_2 no existiese, tomaríamos $b_2 := a_2$). Si $b_1 \neq a_1$, entonces $d_X(b_1, x_3) = L_X([b_1, x_3]) = d_X(b_1, [x_3, x_4]) \leq 10\delta_0$; similarmente, si $b_2 \neq a_2$, entonces $d_X(b_2, x_2) \leq 10\delta_0$. Consideremos ahora las cuatro posibilidades siguientes:

Si $b_1 = a_1$ y $b_2 = a_2$, ya hemos visto que $d_X(b_1, b_2) \leq 20\delta_0 + c_2$.

Si $b_1 \neq a_1$ y $b_2 \neq a_2$, entonces $d_X(b_1, b_2) \leq L_X([b_1, x_3]) + L_X([b_2, x_2]) \leq 20\delta_0$.

Si $b_1 \neq a_1$ y $b_2 = a_2$, entonces existe un punto $z_0 \in [x_2, x_3]$ con $d_X(b_2, z_0) \leq 10\delta_0$; como hay algún x_j $(j = 2, 3)$ con $d_X(x_j, z_0) \leq c_2/2$, concluimos que $d_X(b_1, b_2) \leq d_X(b_1, x_j) + d_X(x_j, z_0) + d_X(z_0, b_2) \leq 20\delta_0 + c_2/2$.

Si $b_1 = a_1$ y $b_2 \neq a_2$, por un razonamiento similar obtenemos que $d_X(b_1, b_2) \leq 20\delta_0 + c_2/2$.

Por lo tanto, en las cuatro situaciones tenemos que $d_X(b_1, b_2) \leq 20\delta_0 + c_2$. Si $z \in [b_1, x_1] \cup [b_2, x_4]$, entonces $d_X(z, A) \leq 10\delta_0 + \max\{c_1, c_2/2\}$. Si $z \in [b_1, b_2]$, podemos tomar b_i con $d_X(z, b_i) \le 10\delta_0 + c_2/2$; como $d_X(b_i, A) \le 10\delta_0 + \max\{c_1, c_2/2\}$, conseguimos $d_X(z, A) \le 20\delta_0 + \max\{c_1 + c_2/2, c_2\}$. Obsérvese que si consideramos $z' \in [b_1, b_2]$, con $z' \notin X_n$, el mismo razonamiento nos da $d_X(z', A) \le 20\delta_0 + \max\{c_1 + c_2/2, c_2\}$.

Supongamos ahora que sólo dos lados de T intersecan X_n. Como en el caso anterior, podemos reemplazar cada γ_i que interseca con X_n por g_i. Y de nuevo, construimos un polígono geodésico P_n en X_n con a lo más 8 lados, que es $6\delta_0$-thin. Así pues, el argumento anterior da el mismo resultado incluso con mejor constante.

Para finalizar, supongamos que sólo un lado de T interseca X_n. Entonces z pertenece a algún $[b_1, b_2]$, y obtenemos la misma desigualdad.

Consecuentemente, X es δ-thin con $\delta := 20\delta_0 + \max\{c_1 + c_2/2, c_2\}$. □

La misma demostración del Teorem 3.2.1 da constantes mucho más precisas en algunos casos particulares.

Corolario 3.2.2. *Bajo las hipótesis del Teorema* 3.2.1*, tenemos que:*

(1) *Podemos tomar* $\delta := \max\{2\delta_0 + c_2, 6\delta_0 + c_2/2, 3c_2/2\}$*, si* $B_n = \varnothing$ *para todo* $n \in \Lambda$.

(2) *Podemos tomar* $\delta := 4\delta_0 + c_1$*, si* $A_n = \varnothing$ *para todo* $n \in \Lambda$.

§3.3. Resultados en superficies de Riemann.

Las definiciones relacionadas con las superficies de Riemann y necesarias para los enunciados de los teoremas se presentaron en la Sección 1.2; no obstante, introduciremos conceptos nuevos.

Definición 3.3.1. Por un *polígono simplemente conexo* en una superficie de Riemann no excepcional entendemos un polígono isométrico a un polígono en el disco de Poincaré. Decimos que dos lados de un polígono *son disjuntos* si sus interiores son disjuntos.

Recogemos a continuación algunos lemas técnicos que nos ayudarán a clarificar la demostración del Teorema 3.3.1.

Lema 3.3.1. *Consideremos un cuadrilátero locálmente geodésico y simplemente conexo en una superfice de Riemann no excepcional* S *con lados disjuntos dos a dos* A, C, B *y* η*, de longitudes* a, c, b *y* l_0*, respectivamente. Supongamos también que* C *interseca ortogonalmente los lados* A *y* B*. Tenemos que:*

(1) $\cosh l_0 = \cosh a \cosh b \cosh c - \sinh a \sinh b$.

(2) *Fijemos* $c_0 > 0$. *Si* $c \geq c_0$, *entonces* $a + b + c - c_1 \leq l_0$, *con* $c_1 := 3\log 2 - 2\log(1 - e^{-c_0})$.

(3) *Si* $c_0 := \log(5 + 2\sqrt{6}\,)$, *entonces* $c_1 = c_0$.

Observación. Por la desigualdad triangular tenemos directamente que $l_0 \leq a + b + c$.

Demostración. Como el cuadrilátero es simplemente conexo, podemos suponer que está contenido en el disco unidad $\mathbf{D}$. La parte (1) la podemos encontrar en [F, p. 88].

Veamos ahora la parte (2). Observemos que $f(t) := 2(\cosh t - 1)e^{-t} = (1 - e^{-t})^2$ es creciente en $[0, \infty)$. Así pues $f(c) \geq f(c_0) = (1 - e^{-c_0})^2$, para $c \geq c_0$, es decir $\cosh c - 1 \geq \frac{1}{2} f(c_0)e^c$. Consecuentemente, si $c \geq c_0$

$$\begin{aligned} e^{l_0} &\geq \cosh l_0 = \cosh a \cosh b \cosh c - \sinh a \sinh b \\ &\geq (\cosh c - 1) \cosh a \cosh b \geq \frac{1}{8} f(c_0)e^{a+b+c}, \end{aligned}$$

y deducimos que $l_0 \geq a + b + c + \log \frac{1}{8}(1 - e^{-c_0})^2 = a + b + c - c_1$.

Un cálculo directo da (3). $\square$

Lema 3.3.2. *Consideremos un cuadrilátero localmente geodésico, simplemente conexo y con autointersecciones en una superfice de Riemann no excepcional* S *con lados* A, C, B *y* η, *de longitudes* a, c, b *y* l_0, *respectivamente. Supongamos también que* C *interseca ortogonalmente los lados* A *y* B. *Si* η *y* C *no son disjuntos, entonces tenemos que:*

(1) $\cosh l_0 = \cosh a \cosh b \cosh c + \sinh a \sinh b$.

(2) $a + b + c - 3\log 2 \leq l_0$.

Demostración. Como el cuadrilátero es simplemente conexo, podemos considerar que está contenido en el disco unidad $\mathbf{D}$. La parte (1) la encontramos en [F, p. 89].

Veamos ahora la parte (2). La desigualdad es consecuencia de

$$e^{l_0} \geq \cosh l_0 = \cosh a \cosh b \cosh c + \sinh a \sinh b \geq \cosh a \cosh b \cosh c \geq \frac{1}{8}\, e^{a+b+c}. \quad \square$$

Lema 3.3.3. *Sean* $c_0 > 0$ *y* Q *un cuadrilátero localmente geodésico y simplemente conexo en una superficie de Riemann no excepcional* S *con lados disjuntos dos a dos* A, C, B *y* η, *de longitudes* a, c, b *y* l_0, *respectivamente. Supongamos también que* C *interseca ortogonalmente a los lados* A *y* B. *Si* $c \geq c_0$, *entonces tenemos que*

$$d(z, \eta) < c_2 := \operatorname{Arcsinh} \frac{e^{c_0} + 1}{e^{c_0} - 1} = \operatorname{Arcsinh}\Big(\operatorname{cotanh} \frac{c_0}{2}\Big),$$

para todo $z \in A \cup B \cup C$.

Demostración. Como Q es simplemente conexo, podemos suponer que está contenido en el semiplano superior $\mathbf{U}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que Q es el cuadrilátero con vértices $i, it, ie^{-i\theta}, ie^{-i\phi}t$, con $0 < \theta, \phi < \pi/2$ y $t = e^c \geq e^{c_0}$.

Está claro que $d(z, \eta) \leq \max\{d(i, \eta), d(it, \eta)\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $d(i, \eta) = \max\{d(i, \eta), d(it, \eta)\}$ (si no es así, podemos cambiar los papeles de θ y ϕ).

Es obvio que $d(i, \eta)$ es menor o igual que la distancia de i a la geodésica η_0 uniendo 1 y t.

La transformación de Möbius $Tz := (z - t)/(z - 1)$ lleva η_0 biyectivamente en el semieje imaginario I, y $Ti = (t + 1 + i(t - 1))/2$. Utilizando un cálculo adecuado conseguimos (ver, por ejemplo [B, p. 162])

$$d(z, \eta) < d(i, \eta_0) = d(Ti, I) = \operatorname{Arcsinh} \frac{t+1}{t-1} \leq \operatorname{Arcsinh} \frac{e^{c_0}+1}{e^{c_0}-1}\,,$$

ya que $t \geq e^{c_0}$. $\square$

Lema 3.3.4. *Denotemos por A_l un anillo cuya geodésica simple cerrada tiene longitud l, y por A_0 el caso límite $A_0 := \mathbf{D}^* := \mathbf{D} \setminus \{0\}$. Entonces A_l es $\delta(l)$-thin para cualquier $l \geq 0$, donde $\delta(l) := \max\big\{l + 2\log(1 + \sqrt{2}\,), d(l) + 3\log(1 + \sqrt{2}\,), d(l)/2 + 6\log(1 + \sqrt{2}\,)\big\}$, con $d(l) := \operatorname{Arcsinh}\big(\sinh(l/2)\operatorname{cotanh}(l/6)\big)$ si $l > 0$ y $d(0) := \operatorname{Arcsinh} 3$. En particular, $\delta(0) := \frac{1}{2}\operatorname{Arcsinh} 3 + 6\log(1 + \sqrt{2}\,) < 6.1975$.*

Demostración. Consideremos un triángulo geodésico $T = \{a, b, c\}$ en A_l. Si T es homótopo a un punto, entonces es la frontera de un conjunto cerrado simplemente conexo E, y consecuentemente E, con su distancia intrínseca, es isométrico a algún subconjunto de $\mathbf{D}$; esto implica que T es δ_0-thin, con $\delta_0 := \log(1 + \sqrt{2}\,)$, ya que $\mathbf{D}$ es δ_0-thin (ver [An, p. 130]). La otra posibilidad es que T sea libremente homótopo a una geodésica simple cerrada g, si $l > 0$, o a la puntura, si $l = 0$.

Supongamos primero que $l > 0$ y $T \cap g \neq \varnothing$. Denotamos por F^1 y F^2 los dos foniles cuya unión es A_l (las clausuras de las dos componentes conexas de $A_l \setminus g$).

Observemos que los foniles son geodésicamente convexos (toda geodésica que conecta dos puntos del fonil está totalmente contenida en dicho fonil). Así pues, sin pérdida de generalidad podemos suponer que a está en el interior de F^1 y b, c están en el interior de F^2 (el caso en el que algún vértice esté g es más fácil). Definimos $B := [a, b] \cap g$ y $C := [a, c] \cap g$. Hay dos geodésicas locales $g_1, g_2 \subset g$ uniendo B y C; observemos que $L_{A_l}(g_i) \leq l$.

Consideramos ahora el triángulo $T_1 = \{a, B, C\}$, de tal forma que elegimos como $[B, C]$ la geodésica local $g_i \subset g$ tal que $[a, B] \cup [B, C] \cup [C, a]$ es homótopo a un punto; como T_1 es homótopo a un punto, el argumento anterior implica que T_1 es δ_0-thin. Dado $x \in [a, B]$ existe algún $y \in [a, C] \cup [B, C]$ con $d_{A_l}(x, y) \le \delta_0$; si $y \in [a, C]$, entonces $d_{A_l}(x, [a, C]) \le \delta_0$; si $y \in [B, C]$, tenemos $d_{A_l}(x, [a, C]) \le d_{A_l}(x, y) + d_{A_l}(y, C) \le \delta_0 + l$. Si $x \in [a, C]$, conseguimos un resultado similar.

Sea el cuadrilátero $Q_1 = \{b, c, C, B\}$ tal que $[B, C]$ es la geodésica local $g_i \subset g$ de tal forma que $[b, c] \cup [c, C] \cup [C, B] \cup [B, b]$ es homótopo a un punto; puesto que Q_1 es homótopo a un punto, el argumento anterior implica que Q_1 es $2\delta_0$-thin. De la misma forma que para T_1, dado un punto en $T \cap Q_1$ existe un punto $y \in T \cap Q_1$ (en otro lado de T) con $d_{A_l}(x, y) \le 2\delta_0 + l$. Entonces T es $(2\delta_0 + l)$-thin.

Supongamos ahora que $l > 0$ y $T \cap g = \varnothing$. Vamos a encontrar una cota superior para $d_{A_l}(T, g)$. Dado un punto w de T, denotamos por w_0 el punto en g tal que $d_{A_l}(w, w_0) = d_{A_l}(w, g)$. Si $T = \{a, b, c\}$, se tiene que $d_{A_l}(a_0, b_0) + d_{A_l}(b_0, c_0) + d_{A_l}(c_0, a_0) = l$. Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $d_{A_l}(a_0, b_0) \ge l/3$. Tomemos el punto $x \in [a, b]$ con $d_{A_l}(x, g) = d_{A_l}([a, b], g)$. Consideramos primero el caso $x \in (a, b)$. Podemos asumir que $t := d_{A_l}(a_0, x_0) \ge l/6$.

A continuación elegimos el cuadrilátero geodésico $Q := \{a, a_0, x_0, x\}$ con tres ángulos rectos (conocido como cuadrilátero de Lambert). Si $s := d_{A_l}(x_0, x)$ y ϕ es el ángulo formado por $[a, a_0]$ y $[a, x]$ en a, las fórmulas trigonométricas dan $\sinh s \sinh t = \cos \phi$ (ver, por ejemplo, [B, p. 157], [C, p. 263]). Así pues

$$\sinh s = \frac{\cos \phi}{\sinh t} < \frac{1}{\sinh t} \le \frac{1}{\sinh(l/6)} \, .$$

Por lo tanto, tenemos

$$d_{A_l}(T, g) < \operatorname{Arcsinh} \frac{1}{\sinh(l/6)} \, . \tag{3.3.1}$$

Si $x = a$ ó $x = b$, el mismo razonamiento con $t := d_{A_l}(a_0, b_0)$ da $\sinh s \sinh t < 1$, y obtenemos $\sinh s < 1/\sinh(l/3)$, lo cual también implica (3.3.1).

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $d_{A_l}(T, g) = d_{A_l}(x, g) = d_{A_l}(x, x_0) = s$. Consideremos la geodésica local g_x que comienza y termina en x y que es libremente homótopa a g. Vamos a ver primero el caso $x \in (a, b)$. Denotamos por $2d_x$ la longitud de g_x y por y el punto en g_x a distancia d_x de x.

Nos construimos el cuadrilátero geodésico $R := \{x, x_0, y_0, y\}$ con tres ángulos rectos. Como $d_{A_l}(x_0, y_0) = l/2$, las fórmulas trigonométricas dan (ver, por ejemplo, [F, p. 88])

$$\begin{aligned}\sinh d_x &= \sinh(l/2)\cosh s = \sinh(l/2)\sqrt{1+\sinh^2 s}\\ &< \sinh(l/2)\sqrt{1+\operatorname{cosech}^2(l/6)} = \sinh(l/2)\operatorname{cotanh}(l/6)\,.\end{aligned}$$

Asumamos ahora que $l = 0$, es decir, que vamos a tratar el caso $A_0 = \mathbf{D}^*$; entonces T es libremente homótopo a la puntura. Consideremos la aplicación recubridora universal $\pi : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{D}^*$, dada por $\pi(z) = \exp(2\pi i z)$. Esta aplica biyectivamente $U_0 := \{z \in \mathbf{U} : 0 \leq \Re z < 1\})$ en $\mathbf{D}^*$. Sin pérdida de generalidad asumimos que $\pi(z_1) = a$, $\pi(z_2) = b$ y $\pi(z_3) = c$, con $\Re z_1 = 0$ y $1/3 \leq \Re z_2 \leq \Re z_3 < 1$. Como $\Re(z_2 - z_1) \geq 1/3$, existe un punto $z \in [z_1, z_2]$ con $\Im z > 1/6$; entonces $\max\big\{\Im z : \pi(z) \in T\big\} > 1/6$. Denotemos por z_0 un punto de U_0 en el que se alcanza este máximo.

Sea g_0 la geodésica local en $\mathbf{D}^*$ que comienza y termina en $\pi(z_0)$ y que es libremente homótopa a la puntura; es bien conocido (ver, por ejemplo, [An, p. 100], [B, p. 131], [JS, p. 227], [N, p. 18]) que

$$\sinh^2 \frac{d_{\mathbf{U}}(z,w)}{2} = \frac{|z-w|^2}{4\Im z \Im w}\,. \tag{3.3.2}$$

Si denotamos por $2d_{\pi(z_0)}$ la longitud de g_0, de (3.3.2) obtenemos que

$$\sinh^2 d_{\pi(z_0)} = \sinh^2 \frac{d_{\mathbf{U}}(z_0, 1+z_0)}{2} < \sinh^2 \frac{d_{\mathbf{U}}(i/6, 1+i/6)}{2} = 9\,,$$

y consecuentemente $d_{\pi(z_0)} < \operatorname{Arcsinh} 3$.

Recordemos que $d(l) := \operatorname{Arcsinh}\big(\sinh(l/2)\operatorname{cotanh}(l/6)\big)$ si $l > 0$ y $d(0) := \operatorname{Arcsinh} 3$. Entonces existe un punto $p \in T$ tal que la geodésica local g_p en A_l, que empieza y termina en p, y es libremente homótopa a g o a la puntura, tiene longitud $2d_p < 2d(l)$.

Supongamos primero que p no es un vértice de T; sin pérdida de generalidad también podemos asumir que $p \in [a, c]$. Como g_p es libremente homótopa a T, tenemos un pentágono geodésico $P' := \{a', b', c', p_1', p_2'\}$ en $\mathbf{D}$ isométrico al pentágono P de lados $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, p]$, g_p y $[p, a]$, si identificamos p_1' con p_2' (hemos elegido P' tal que $d_{\mathbf{D}}(a', b') = d_{A_l}(a, b)$, $d_{\mathbf{D}}(b', c') = d_{A_l}(b, c)$, $d_{\mathbf{D}}(c', p_1') = d_{A_l}(c, p)$, $d_{\mathbf{D}}(p_1', p_2') = L_{A_l}(g_p)$ y $d_{\mathbf{D}}(p_2', a') = d_{A_l}(p, a)$).

Puede comprobarse que si x', y' son los puntos en P' que corresponden a los puntos $x, y \in P$, tenemos $d_{A_l}(x, y) \leq d_{\mathbf{D}}(x', y')$.

A continuación usamos un argumento similar al de la demostración del Teorema 3.2.1.

Como P' es un pentágono geodésico en $\mathbf{D}$, se tiene que es $3\delta_0$-thin. Sea α_1' el punto de la geodésica orientada $[p_1', c']$, definido como $\alpha_1' := \max\{z \in [p_1', c'] : d_{\mathbf{D}}(z, [p_1', p_2']) \le 3\delta_0\}$, y α_2' el punto de la geodésica orientada $[p_2', a']$, definido como $\alpha_2' := \max\{z \in [p_2', a'] : d_{\mathbf{D}}(z, [p_1', p_2']) \le 3\delta_0\}$.

Si α_j es el punto en P correspondiente a α_j', tenemos que $L_{A_l}([\alpha_1, \alpha_2]) = d_{A_l}(\alpha_1, \alpha_2) \le 6\delta_0 + d(l)$, ya que $d_{A_l}(\alpha_j, g_p) \le 3\delta_0$ y $\operatorname{diam}_{A_l}(g_p) \le d_p < d(l)$.

Definamos ahora $\beta_1' := \max\big(\{\alpha_1'\} \cup \{z \in [p_1', c'] : d_{\mathbf{D}}(z, [p_2', a']) \le 3\delta_0\}\big)$, $\beta_2' := \max\big(\{\alpha_2'\} \cup \{z \in [p_2', a'] : d_{\mathbf{D}}(z, [p_1', c']) \le 3\delta_0\}\big)$. Vamos a denotar por β_j el punto en P que corresponde a β_j'.

Si $\beta_1 \ne \alpha_1$, entonces $d_{A_l}(\beta_1, p) = L_{A_l}([\beta_1, p]) = d_{A_l}(\beta_1, [p, a]) \le 3\delta_0$; similarmente, si $\beta_2 \ne \alpha_2$, entonces $d_{A_l}(\beta_2, p) \le 3\delta_0$. Consideramos las cuatro siguientes posibilidades:

Si $\beta_1 = \alpha_1$ y $\beta_2 = \alpha_2$, hemos visto que $d_{A_l}(\beta_1, \beta_2) \le 6\delta_0 + d(l)$.

Si $\beta_1 \ne \alpha_1$ y $\beta_2 \ne \alpha_2$, entonces $d_{A_l}(\beta_1, \beta_2) \le d_{A_l}(\beta_1, p) + d_{A_l}(p, \beta_2) \le 6\delta_0$.

Si $\beta_1 \ne \alpha_1$ y $\beta_2 = \alpha_2$, entonces existe un punto $z_0 \in [p_1', p_2']$ con $d_{\mathbf{D}}(\beta_2', z_0) \le 3\delta_0$; ya que hay algún p_i' con $d_{\mathbf{D}}(p_i', z_0) \le d(l)$, conseguimos que $d_{A_l}(\beta_1, \beta_2) \le d_{\mathbf{D}}(\beta_1', \beta_2') \le d_{\mathbf{D}}(\beta_1', p_i') + d_{\mathbf{D}}(p_i', z_0) + d_{\mathbf{D}}(z_0, \beta_2') \le 6\delta_0 + d(l)$.

Si $\beta_1 = \alpha_1$ y $\beta_2 \ne \alpha_2$, obtenemos de la misma forma que $d_{A_l}(\beta_1, \beta_2) \le 6\delta_0 + d(l)$.

Consecuentemente, en las cuatro situaciones tenemos $d_{A_l}(\beta_1, \beta_2) \le 6\delta_0 + d(l)$. Si $x \in [\beta_1, c] \cup [\beta_2, a]$, entonces $d_{A_l}(x, [a, b] \cup [b, c]) \le 3\delta_0$. Si $x \in [\beta_1, \beta_2]$, podemos tomar β_i con $d_{A_l}(x, \beta_i) \le 3\delta_0 + d(l)/2$; puesto que $d_{A_l}(\beta_i, [a, b] \cup [b, c]) \le 3\delta_0$, obtenemos $d_{A_l}(x, [a, b] \cup [b, c]) \le 6\delta_0 + d(l)/2$.

Si $x \in [a, b]$, existe un punto $y' \in P' \setminus (a', b')$ con $d_{\mathbf{D}}(x', y') \le 3\delta_0$. Si $y' \notin [p_1', p_2']$, entonces $d_{A_l}(x, [b, c] \cup [c, a]) \le 3\delta_0$. Si $y' \in [p_1', p_2']$, existe p_i' con $d_{\mathbf{D}}(y', p_i') \le d(l)$, y por tanto $d_{\mathbf{D}}(x', p_i') \le 3\delta_0 + d(l)$. Como $p \in [a, c]$, tenemos que $d_{A_l}(x, [b, c] \cup [c, a]) \le 3\delta_0 + d(l)$. Si $x \in [b, c]$ conseguimos un resultado similar. Estos hechos dan que T es $\max\{3\delta_0 + d(l), 6\delta_0 + d(l)/2\}$-thin.

Si p es un vértice de T, la demostración es más fácil ya que en este caso construimos un cuadrilátero en lugar de un pentágono, y no necesitamos dividir un lado de T. Esto termina la demostración del Lema 3.3.4. □

A continuación mostramos el principal resultado de este capítulo, el que nos permite comprobar la condición de Rips sólo en los triángulos que están contenidos en geodésicas simples cerradas. No obstante, es necesario que antes introduzcamos un concepto nuevo.

Definición 3.3.2. Un c_0-*triángulo* es un triángulo cuyos lados son $(1, c_0)$-quasigeodésicos continuos e inyectivos, con su parametrización por longitud de arco.

Definimos las constantes

$$c_0 := \log(5+2\sqrt{6}\,) < 2.2925\,,\ K := 2\log(1+\sqrt{2}\,)+\log(5+2\sqrt{6}\,)+\log\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2} < 5.0869\,.$$

Teorema 3.3.1. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional* (*con o sin borde*); *en el caso de que S tenga borde, se requiere además que ∂S sea la unión de geodésicas locales* (*cerradas o no cerradas*) *disjuntas. Entonces S es hiperbólica si y sólo si todo c_0-triángulo contenido en una geodésica simple cerrada en S es δ_0-thin.*

Además, si todo c_0-triángulo contenido en una geodésica simple cerrada en S es δ_0-thin, entonces S es δ-thin, con $\delta = \max\{\delta(4c_0), \delta_0 + K\}$, donde $\delta(t)$ es la constante del Lema 3.3.4 (*y que verifica* $\delta(4c_0) < 10.9325$).

Observaciones.

1. Podríamos pensar que los triángulos quasigeodésicos son un recurso técnico muy artificial; sin embargo, el ejemplo tras la demostración del Teorema 3.3.1 nos mostrará que son esenciales.

2. A pesar de que el teorema reduce drásticamente el conjunto de los triángulos a los que hay que aplicar la condición de Rips, debemos "pagar" por ello trabajando con triángulos quasigeodésicos; no obstante, la situación es ventajosa para nosotros ya que la clase de quasigeodésicas que necesitamos es muy restrictiva: recordemos que sólo nos interesan las $(1, c_0)$-quasigeodésicas, continuas e inyectivas, y el Lema 3.2.2 nos da una cota de su longitud que será suficientemente buena en las aplicaciones (ver Teorema 3.3.3 y corolarios 3.3.2 y 3.3.3).

Demostración. Comenzamos primero suponiendo S hiperbólica; en este caso, el Lema 3.2.3 garantiza que todo c_0-triángulo en S es δ_0-thin.

Supongamos que todo c_0-triángulo contenido en una geodésica simple cerrada en S es δ_0-thin. Antes de continuar, queremos recalcar que si S tiene borde, las hipótesis sobre ∂S nos dicen que es la unión de geodésicas locales disjuntas dos a dos (cerradas o no cerradas).

En este caso, podemos construir una superficie de Riemann abierta no excepcional R pegando a S un fonil en cada geodésica cerrada, y un semidisco (ver Definición 1.2.8) en cada geodésica no cerrada.

Como S es geodésicamente convexa en R (toda geodésica que conecta dos puntos de S está totalmente contenida en S), entonces $d_R(z,w) = d_S(z,w)$ para todo $z, w \in S$, y cualquier geodésica simple cerrada en R está contenida en S.

Sea T un triángulo geodésico en S. Por el Lema 2.2.1 del capítulo anterior de esta tesis, podemos asumir que T es una curva simple cerrada.

Tenemos tres posibilidades: T es homótopo a un punto, T es homótopo a una puntura, o T es libremente homótopo a una geodésica simple cerrada en S. Esto es bien conocido cuando S no tiene borde; en el caso en el que S sí tenga borde, bastará aplicar el resultado a R, ya que R no tiene obstáculos topológicos adicionales (la inclusión de S en R induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales de S y R).

Si T es homótopo a un punto, entonces es el borde de un conjunto cerrado simplemente conexo E, y consecuentemente E, con su distancia intrínseca, es isométrico a algún subconjunto de $\mathbf{D}$; esto implica que T es $\log(1+\sqrt{2}\,)$-thin, puesto que $\mathbf{D}$ es $\log(1+\sqrt{2}\,)$-thin (ver [An, p. 130]).

Si T es homótopo a una puntura, entonces es el borde de un conjunto cerrado doblemente conexo, que es, con su distancia intrínseca, isométrico a algún subconjunto de $\mathbf{D}^* := \mathbf{D} \setminus \{0\}$; esto implica que T es $\delta(0)$-thin con $\delta(0)$ la constante del Lema 3.3.4. Como todo triángulo geodésico en $\mathbf{D}$ es isométrico a algún triángulo geodésico en $\mathbf{D}^*$, tenemos que $\log(1+\sqrt{2}\,) \le \delta(0)$.

En otro caso, T es libremente homótopo a una geodésica simple cerrada γ en S.

Si $L(\gamma) < 4c_0$, consideramos el anillo $A_{L(\gamma)}$ con una geodésica simple cerrada g de longitud $L(\gamma)$. Tenemos que $A_{L(\gamma)}$ es $\delta(L(\gamma))$-thin, con $\delta(L(\gamma))$ la constante del Lema 3.3.4. Como

$$d = d(l) = \operatorname{Arcsinh}\Big(\frac{\sinh(l/2)}{\sinh(l/6)}\cosh(l/6)\Big),$$

si $l > 0$ y $d(0) = \lim_{l\to 0} d(l)$, tenemos que $d = d(l)$ es una función creciente para $l \ge 0$; por tanto, se verifica que $\delta(0) \le \delta(L(\gamma)) < \delta(4c_0)$, con

$$\begin{aligned}\delta(4c_0) = \max\Big\{&4c_0 + 2\log(1+\sqrt{2}\,), \operatorname{Arcsinh}\big(\sinh(2c_0)\operatorname{cotanh}(2c_0/3)\big) + 3\log(1+\sqrt{2}\,),\\ &\frac{1}{2}\operatorname{Arcsinh}\big(\sinh(2c_0)\operatorname{cotanh}(2c_0/3)\big) + 6\log(1+\sqrt{2}\,)\Big\}\\ = {}&4c_0 + 2\log(1+\sqrt{2}\,) < 10.9325\,.\end{aligned}$$

En este caso, el conjunto cerrado en S acotado por T y por γ es, con su distancia intrínseca, isométrico a un conjunto en $A_{L(\gamma)}$, acotado por g y un triángulo T_0. Estos hechos dan que T es $\delta(4c_0)$-thin.

Estudiamos ahora el caso $L(\gamma) \geq 4c_0$.

Primero, suponemos que $\gamma \cap T = \varnothing$. Si η es un lado de T, asociamos a η dos curvas η', η'', de la siguiente forma. Consideramos un cuadrilátero Q localmente geodésico y simplemente conexo en S con lados A, C, B y η, disjuntos dos a dos, de longitudes a, c, b y l_0, respectivamente, con las siguientes condiciones: (i) $C \subset \gamma$, (ii) C corta ortogonalmente a los lados A y B. Q está unívocamente determinado por estas condiciones. Si $c \geq c_0$, el arco $\eta' := A \cup C \cup B$ es una $(1, c_0)$-quasigeodésica continua e inyectiva con su parametrización por longitud de arco por los lemas 3.2.1 y 3.3.1. Si $c < c_0$, tomamos $\eta' := \eta$, que es una geodésica. (Obsérvese que tenemos $c < c_0$ como mucho para un sólo lado de T, ya que $L(\gamma) \geq 4c_0$; en otro caso, T no sería un triángulo geodésico). En ambos casos, definimos $\eta'' := C \subset \gamma$. Tenemos que η'' es siempre una $(1, c_0)$-quasigeodésica continua e inyectiva con su parametrización por longitud de arco: esto está claro si $c \geq c_0$ (ya que $\eta'' \subset \eta'$), y si $c < c_0$ entonces es consecuencia del Corolario 3.2.1 .

Si T es la unión de las geodésicas η_1, η_2, η_3, consideramos el triángulo $(1, c_0)$-quasigeodésico T' definido como la unión de las $(1, c_0)$-quasigeodésicas $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$. Tomamos también el triángulo $(1, c_0)$-quasigeodésico $T'' \subset \gamma$ definido como la unión de las $(1, c_0)$-quasigeodésicas $\eta_1'', \eta_2'', \eta_3''$.

Por hipótesis, T'' es δ_0-thin. Probemos ahora que T' es δ_1-thin, con

$$\delta_1 := \max\{\delta_0, 2\log(1+\sqrt{2}\,)\} + c_0.$$

Si $\eta_i' \neq \eta_i$, para todo $i = 1, 2, 3$, entonces T' es δ_0-thin, puesto que todo punto en $T' \setminus T''$ pertenece simultáneamente a dos lados de T'.

Si este no es el caso, existe un único i con $\eta_i' = \eta_i$; podemos suponer $\eta_1' = \eta_1$. Sea Q_1 el cuadrilátero con lados A_1, C_1, B_1 y η_1; tenemos que $L(C_1) < c_0$. Como Q_1 es simplemente conexo, es isométrico a un cuadrilátero en $\mathbf{D}$ que es $2\log(1+\sqrt{2}\,)$-thin.

Así pues, para cada $z \in \eta_1' = \eta_1$, hay un $w \in A_1 \cup C_1 \cup B_1$ con $d(z, w) \leq 2\log(1+\sqrt{2}\,)$. Si $w \in A_1 \cup B_1$, entonces $d(z, \eta_2' \cup \eta_3') \leq 2\log(1+\sqrt{2}\,)$. Si $w \in C_1$, en tal caso existe $w' \in A_1 \cup B_1$ con $d(w, w') \leq c_0$ (ya que $L(C_1) < c_0$), y tenemos $d(z, \eta_2' \cup \eta_3') \leq 2\log(1+\sqrt{2}\,) + c_0$.

Si $z \in \eta_2'$, consideramos tres casos. Si $z \in \eta_2' \cap \gamma = \eta_2''$, entonces $d(z, \eta_1' \cup \eta_3') \leq d(z, \eta_3'') \leq d(z, \eta_1'' \cup \eta_3'') + c_0 \leq \delta_0 + c_0$. Si $z \in \eta_2' \cap \eta_3'$, entonces $d(z, \eta_1' \cup \eta_3') = 0$. En otro caso, $z \in A_1 \cup B_1$ (podemos asumir que $A_1 \subset \eta_2'$ y $B_1 \subset \eta_3'$); entonces hay un $w \in B_1 \cup C_1 \cup \eta_1$ con $d(z, w) \leq 2\log(1+\sqrt{2}\,)$; como $L(C_1) < c_0$, existe $w' \in B_1 \cup \eta_1 \subset \eta_3' \cup \eta_1'$ con $d(w, w') \leq c_0$, y tenemos $d(z, \eta_1' \cup \eta_3') \leq d(z, w') \leq 2\log(1+\sqrt{2}\,) + c_0$.

Consecuentemente, T' es δ_1-thin, con $\delta_1 := \max\{\delta_0, 2\log(1+\sqrt{2}\,)\} + c_0$.

El caso $z \in \eta_3'$ es similar a $z \in \eta_2'$.

Vamos a ver ahora que T es δ_2-thin, con

$$\delta_2 := \delta_1 + 2\log(1+\sqrt{2}\,) + c_2, \qquad \text{y} \qquad c_2 := \operatorname{Arcsinh}\Big(\operatorname{cotanh}\frac{c_0}{2}\Big) = \log\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}\,.$$

Tomemos $x \in T$; podemos suponer que $x \in \eta_1$. Si $\eta_1 \neq \eta_1'$, entonces $\eta_1 \cup \eta_1'$ es un cuadrilátero geodésico simplemente conexo, y consecuentemente existe $x' \in \eta_1'$ con $d(x, x') \le 2\log(1+\sqrt{2}\,)$. Si $\eta_1 = \eta_1'$, tomamos $x' = x$. En tal caso, hay un $y' \in \eta_2' \cup \eta_3'$ con $d(x', y') \le \delta_1$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y' \in \eta_2'$. Si $\eta_2 \neq \eta_2'$, el Lema 3.3.3 nos garantiza la existencia de un $y \in \eta_2$ con $d(y, y') < c_2$. Si $\eta_2 = \eta_2'$, elegimos $y = y'$. Por lo tanto, tenemos que $d(x, y) < \delta_2 := \delta_1 + 2\log(1+\sqrt{2}\,) + c_2 = \max\{\delta_0, 2\log(1+\sqrt{2}\,)\} + K$.

Concluimos entonces que T es δ-thin, con $\delta := \max\{\delta(4c_0), \delta_0 + K, 2\log(1+\sqrt{2}\,) + K\} = \max\{\delta(4c_0), \delta_0 + K\}$, ya que $\delta(4c_0) > 10 > 2\log(1+\sqrt{2}\,) + K$.

Supongamos ahora que $\gamma \cap T \neq \varnothing$.

Si $\gamma \cap T$ tiene una única componente conexa, repetimos el argumento anterior.

Si $\gamma \cap T$ tiene dos componentes conexas, el razonamiento es similar si utilizamos el Lema 3.3.2 en lugar del Lema 3.3.1. La constante en este caso es más pequeña, ya que $3\log 2 < c_0$. $\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que los triángulos quasigeodésicos T'' de la demostración del Teorema 3.3.1 no tienen que ser necesariamente geodésicos.

Ejemplo. *Existe un triángulo geodésico T en una superficie de Riemann triplemente conexa S_0 tal que T'' no es geodésico.*

Dado $x_0 < \operatorname{Arcsinh} 1$, existe $y > 0$ con $\sinh(x_0 + y) > \cosh y$. Por tanto $\sinh(x + y) > \cosh y$ para cualquier $x_0 \le x < \operatorname{Arcsinh} 1$, y consecuentemente podemos elegir algún $x < \operatorname{Arcsinh} 1$ tal que $\sinh x \sinh(x + y) > \cosh y$.

Si definimos $\varepsilon := \operatorname{Arcsinh}(1/\sinh x) - x > 0$, tenemos que $\sinh x \sinh(x+\varepsilon) = 1$. Vamos a considerar un cuadrilátero geodésico V con tres ángulos rectos y un ángulo igual a cero, tal que los dos lados finitos tienen longitudes x y $x + \varepsilon$ (ver, por ejemplo, [B, p. 157], [F, p. 89]). Si pegamos cuatro cuadriláteros isométricos a V, podemos conseguir una Y-pieza generalizada Y_0 con dos punturas y una geodésica simple cerrada γ con $L(\gamma) = 4(x + \varepsilon)$. Obtenemos la superficie S_0 al conectar Y_0 con un fonil F cuya geodésica simple cerrada tiene longitud $4(x + \varepsilon)$.

Denotamos por μ_0 la geodésica en Y_0 con $L(\mu_0) = 2x$, uniendo γ consigo misma y que no es homótopa a ninguna curva contenida en γ. Sean p'', q'' los extremos de μ_0. Sean μ la geodésica no acotada en S_0 que contiene a μ_0, y los puntos $p, q \in \mu \cap F$ a distancia y de γ.

Definimos el triángulo T como la unión de las dos geodésicas α, β en F conectando p con q (de hecho, T es un "biángulo" geodésico). La longitud del segmento de μ que une p y q es $2x + 2y$; por [F, p. 88] se tiene $\sinh(L(\alpha)/2) = \sinh(x + \varepsilon) \cosh y = \cosh y / \sinh x < \sinh(x + y)$; entonces obtenemos $L(\alpha) < 2x + 2y$, y consecuentemente α, β son realmente geodésicas en S_0. Por otro lado, $T'' = \{p'', q''\}$ está contenido en γ y entonces $L(\alpha'') = L(\beta'') = 2x + 2\varepsilon > 2x = L(\mu_0)$; por lo tanto α'', β'' no son geodésicas en S_0.

Dedicaremos el resto de esta sección a obtener varias consecuencias del Teorema 3.3.1.

Corolario 3.3.1. *El anillo A_l cuya geodésica simple cerrada tiene longitud $l \geq 4c_0$ es $(l/4 + K)$-thin, con $K < 5.0869$ la constante del Teorema* 3.3.1*. El mismo resultado es válido para cada fonil de A_l.*

Observación. Esta cota de la constante de hiperbolicidad del anillo es la mejor posible asintóticamente: toda constante thin de A_l es mayor o igual que $l/4$, ya que tenemos un triángulo geodésico contenido en la geodésica simple cerrada con lados de longitudes $l/2, l/4, l/4$.

Demostración. Observemos que la última parte de la demostración del Teorema 3.3.1 nos da que A_l es δ_2-thin, si $l \geq 4c_0$.

En este caso la hipótesis "cualquier triángulo $(1, c_0)$-quasigeodésico continuo e inyectivo contenido en una geodésica simple cerrada S es δ_0-thin", podemos cambiarla por "cualquier triángulo geodésico contenido en la geodésica simple cerrada γ de A_l es δ_0-thin", ya que T'' es un triángulo geodésico en A_l si T es un triángulo geodésico en A_l. Como los lados de cualquier triángulo geodésico contenido en γ tienen longitud menor o igual que $l/2$, tenemos que cualquier triángulo geodésico contenido en γ es δ_0-thin, con $\delta_0 = \delta_0(A_l) = l/4$. Consecuentemente, obtenemos que A_l is δ_2-thin con

$$\delta_2 = \max\left\{\frac{l}{4}, 2\log(1+\sqrt{2}\,)\right\} + K = \frac{l}{4} + K\,,$$

ya que $l/4 \geq c_0 > 2 > 2\log(1 + \sqrt{2}\,)$. El mismo resultado sigue siendo válido para cada fonil de A_l. $\square$

El siguiente resultado es un buen complemento de la Proposición 2.3.2, pues nos permite dar una cota de la constante de hiperbolicidad de las superficies S de tipo finito (en el caso en que ∂S sea unión de geodésicas locales y S no tenga género).

Corolario 3.3.2. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde), sin género; si S tiene borde, también pedimos que ∂S sea la unión de geodésicas locales (cerradas o no cerradas) disjuntas. Si S es de tipo finito, entonces es hiperbólica. De hecho, si toda geodésica simple cerrada γ en S verifica $L(\gamma) \leq l$, entonces S es δ-thin, con $\delta = \max\{\delta(4c_0), K + (l + c_0)/4\}$ y $c_0, \delta(4c_0), K$ las constantes del Teorema 3.3.1.*

Demostración. El conjunto de geodésicas simples cerradas en S es finito: $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, y tenemos $L(\gamma_j) \leq l$. Toda $(1, c_0)$-quasigeodésica continua e inyectiva con su parametrización por longitud de arco $g \subset \gamma_j$ verifica $L(g) \leq (l + c_0)/2$ por el Lema 3.2.2; así pues $d(z, \partial g) \leq (l + c_0)/4$ para todo $z \in g$. Entonces se verifica la hipótesis del Teorema 3.3.1 con $\delta_0 := (l + c_0)/4$. Por lo tanto S es δ-thin con $\delta = \max\{\delta(4c_0), K + (l + c_0)/4\}$. $\square$

Una consecuencia de este corolario es el resultado que presentamos a continuación.

Corolario 3.3.3. *Toda Y-pieza generalizada Y con $L(\gamma_i) \leq l$, donde las γ_i $(i = 1, 2, 3)$ son las geodésicas simples cerradas de ∂Y, es δ-thin, con $\delta = \max\{\delta(4c_0), K + (l + c_0)/4\}$.*

Observación. Recordemos que consideramos las punturas como geodésicas de longitud cero.

Del Teorema 3.3.1 podemos deducir consecuencias adicionales muy importantes para el estudio de la hiperbolicidad de las superficies de Riemann. La primera de ellas (ver, a continuación, el Teorema 3.3.2) permite simplificar la topología: este resultado garantiza que podemos eliminar foniles y semidiscos (ver definiciones en la Sección 1.2) sin alterar la hiperbolicidad de la superficie de Riemann.

De cara a estudiar la hiperbolicidad, podríamos ver como un criterio muy razonable la siguiente afirmación: si una superficie de Riemann tiene una sucesión de foniles $\{F_n\}_n$ con $\lim_{n\to\infty} L(\partial F_n) = \infty$, entonces no es hiperbólica. Sin embargo, en el próximo capítulo de esta tesis (ver Corolario 4.3.1) probamos que este resultado tan razonable es de hecho falso, y una importante herramienta en la demostración de esto es el Teorema 3.3.2. Asímismo, el Teorema 3.3.2 también es una de las piezas claves en las pruebas de los teoremas 4.3.2, 4.3.6 y 4.3.7 en el capítulo siguiente.

El Teorema 3.3.2 también es una de las piezas claves en la prueba del Teorema 4.3.2 en el capítulo siguiente.

Nuestro trabajo más reciente nos hace creer que el Teorema 3.3.2 será una pieza fundamental en la caracterización de los dominios de Denjoy hiperbólicos.

Teorema 3.3.2. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde); si S tiene borde, también pedimos que ∂S sea la unión de geodésicas locales (cerradas o no cerradas) disjuntas. Denotemos por F la unión de algunos foniles y semidiscos disjuntos de S. Sea S_0 la superficie de Riemann no excepcional con borde que obtenemos al eliminar de S el interior de F. Entonces S es hiperbólica si y sólo si S_0 es hiperbólica.*

Además, si S es δ-thin (respectivamente, δ-hiperbólica), entonces S_0 es δ-thin (respectivamente, δ-hiperbólica); si S_0 es δ'-hiperbólica, entonces S es δ-thin, con $\delta = \max\{\delta(4c_0), 4\delta' + 2H(\delta', 1, c_0) + K\}$, $c_0, \delta(4c_0), K$ las constantes del Teorema 3.3.1, y H la constante del Teorema 1.1.C.

Observación. Queremos destacar que no hay hipótesis sobre la longitud de las curvas que pertenecen al borde de los foniles. Este hecho es importante porque, como ya hemos comentado, hay superficies de Riemann hiperbólicas que contienen foniles F_n con $L(\partial F_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \to \infty$ (ver Corolario 4.3.1).

Demostración. Supongamos primero que S es δ-thin (respectivamente, δ-hiperbólica). Como S_0 es geodésicamente convexa en S (toda geodésica que conecta dos puntos de S_0 está totalmente contenida en S_0), entonces $d_S(z,w) = d_{S_0}(z,w)$ para todo $z, w \in S_0$. Por lo tanto S_0 es también δ-thin (respectivamente, δ-hiperbólica).

Supongamos ahora que S_0 es δ'-hiperbólica. Por el Lema 3.2.3, todo triangulo $(1, c_0)$-quasigeodésico T en S_0 es $(4\delta' + 2H(\delta', 1, c_0))$-thin, donde H es la constante del Teorema 1.1.C. Observemos que cualquier geodésica simple cerrada en S está contenida en S_0. Como $d_S(z,w) = d_{S_0}(z,w)$ para todo $z, w \in S_0$, todo triángulo $(1, c_0)$-quasigeodésico en S (contenido en una geodésica simple cerrada en S) es también un triángulo $(1, c_0)$-quasigeodésico en S_0. Observemos también que $H \ge 1 > \log(1+\sqrt{2}\,)$. Así pues el Teorema 3.3.1 nos garantiza que S es δ-thin, con $\delta = \max\{\delta(4c_0), 4\delta' + 2H(\delta', 1, c_0) + K\}$. $\square$

El siguiente resultado sobre subconjuntos geodésicamente convexos de una superficie de Riemann es una consecuencia del Lema del Collar. Y también será muy útil en la demostración del Teorema 3.3.3.

Lema 3.3.5. *Sean S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde), η una geodésica simple cerrada de S tal que $S \setminus \eta$ no es conexo, y S_0 la clausura de una componente conexa de $S \setminus \eta$. Definimos $L_0 := 4 \operatorname{Arccosh} t_0$, donde t_0 es la única solución mayor que 1 de la ecuación $2t^3 - 2t - 1 = 0$:*

$$t_0 := \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{33}}{36}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{36}{9+\sqrt{33}}} < 1.1915 \,.$$

Si $L(\eta) < L_0$, entonces toda geodésica que conecta dos puntos de S_0 está totalmente contenida en S_0, y consecuentemente $d_S(z,w) = d_{S_0}(z,w)$ para todo $z, w \in S_0$.

Demostración. Supongamos primero que S es abierta. Si $L := L(\eta)$, sabemos por el Lema del Collar (ver [R] o Sección 1.2) que existe un collar de η de ancho d_0 con $\sinh d_0 \sinh(L/2) = 1$. Así pues, $\sinh d_0 \sinh(L_0/2) > 1$, ya que $L < L_0$.

Tomemos $z, w \in S_0$. Para probar el lema, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z, w \in \eta$; por lo tanto $d_{S_0}(z,w) \le L/2$.

Argumentando por contradicción, vamos a suponer que existe una geodésica γ en S uniendo z, w, y no contenida en S_0; entonces $2d_0 \le L(\gamma) \le L/2$ y concluimos que $4d_0 \le L$. Observemos que $2t^3 - 2t - 1 < 0$ para todo $1 < t < t_0$; esto implica que $2\cosh^3(L/4) - 2\cosh(L/4) < 1$, ya que $L < L_0$. Así pues, tenemos

$$2\cosh\frac{L_0}{4}\sinh^2\frac{L_0}{4} < 1\,, \qquad \sinh\frac{L_0}{4}\sinh\frac{L_0}{2} < 1\,, \qquad \sinh\frac{L_0}{4} < \frac{1}{\sinh\frac{L_0}{2}} < \sinh d_0\,,$$

y por tanto obtenemos $L < 4d_0$, lo que contradice la hipótesis de la que partimos.

Si S tiene borde, entonces está contenida en una superficie de Riemann R y $d_S = d_R|_S$. Si γ es una geodésica en S uniendo z, w, tal que no está contenida en S_0, entonces existe una geodésica en R uniendo z, w, que no está contenida en S_0, y ya hemos visto que esto es una contradicción. $\square$

Observación. Si seguimos la demostración del Lema 3.3.5, podemos deducir que si $L(\eta) = L_0$, es posible que γ escape de S_0, pero entonces $L(\eta) = 2d_0 = L/2$, y también tenemos que $d_S(z,w) = d_{S_0}(z,w)$ para todo $z, w \in S_0$.

Muchas superficies de Riemann se pueden descomponer en unión de foniles e Y-piezas generalizadas (ver [FM, Teorema 3.4.1] y [AR]). El próximo resultado que vamos a mostrar usa esta descomposición para obtener la hiperbolicidad. Parte de este resultado aparece en el capítulo anterior; no obstante, aquí damos una demostración nueva, utilizando técnicas totalmente distintas basadas en los resultados de este capítulo, que nos permiten encontrar cotas explícitas para la constante de hiperbolicidad.

Teorema 3.3.3. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde) sin género (podemos ver a S como un subconjunto del plano complejo). Si hay una descomposición de S en una unión de foniles $\{F_m\}_{m\in M}$ e Y-piezas generalizadas $\{Y_n\}_{n\in N}$ con $L_S(\gamma) \le l$ para toda geodésica simple cerrada $\gamma \subset (\cup_n \partial Y_n) \cup (\cup_m \partial F_m)$, entonces S es δ-hiperbólica, donde $\delta := 20\delta_0 + l + K_0$, $\delta_0 := \max\{\delta(4c_0), K + (l + c_0)/4\}$ y*

$$K_0 := \operatorname{Arccosh}\Big(\frac{\cosh(l/2)\,(1+\cosh(l/2))}{\sinh^2(L_0/2)}\Big),$$

con $c_0, \delta(4c_0), K$ las constantes del Teorema 3.3.1 y L_0 la constante del Lema 3.3.5. De hecho, si $l < L_0$, podemos tomar $\delta := 4\delta_0 + l/2$.

Demostración. Antes de nada, observemos que las piezas Y_n son δ_0-thin, con $\delta_0 := \max\{\delta(4c_0), K + (l + c_0)/4\}$, por el Corolario 3.3.3. El Lema 3.3.4 y el Corolario 3.3.1 dan que los F_m también son δ_0-thin.

Denotemos por L_i, para $i = 1, 2, 3$, las tres longitudes de las geodésicas simples cerradas de ∂Y_n ($L_i = 0$ si la geodésica que le corresponde es una puntura).

Si $L_0 \le L_i \le l$ para al menos dos geodésicas, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L_2 = L_{Y_n}(\eta_{nm}) \ge L_0$ y $L_3 = L_{Y_n}(\eta_{nk}) \ge L_0$. Consideramos la geodésica $g_{mk} \subset Y_n$, que une η_{nm} con η_{nk}, y sea $t = L_{Y_n}(g_{mk})$. Denotemos por η_{nr} la geodésica en ∂Y_n con longitud L_1; si consideramos las geodésicas g_{mr}, g_{kr}, uniendo respectivamente η_{nm} y η_{nr}, y η_{nk} y η_{nr}, podemos dividir Y_n en dos hexágonos isométricos con ángulos rectos. Por trigonometría hiperbólica estándar (ver, por ejemplo, [B, p. 161], [Ra, p. 100]), tenemos que

$$\cosh t = \frac{\cosh(L_1/2) + \cosh(L_2/2)\cosh(L_3/2)}{\sinh(L_2/2)\sinh(L_3/2)} \le \frac{\cosh(l/2)\,(1+\cosh(l/2))}{\sinh^2(L_0/2)}\,,$$

y por lo tanto, $t \le K_0$.

Vamos a tratar diferentes casos según los valores de L_i.

(1) Si $L_0 \le L_i \le l$ para $i = 1, 2, 3$, entonces la distancia entre dos geodésicas simples cerradas cualesquiera de ∂Y_n es menor o igual que K_0; así pues, $\operatorname{diam}_{Y_n}(\cup_m \eta_{nm}) \le l/2 + K_0 + l/2 = l + K_0$; y estamos entonces en las hipótesis del Teorema 3.2.1, con $c_2 = l + K_0$ y $B_n = \varnothing$.

(2) Si $L_1 < L_0 \le L_2, L_3 \le l$, la distancia entre dos geodésicas simples cerradas de ∂Y_n de longitudes L_2, L_3, (por ejemplo η_{nm}, η_{nk}) es menor o igual que K_0; entonces $\operatorname{diam}_{Y_n}(\eta_{nm} \cup$

$\eta_{nk}) \leq l + K_0$; y de nuevo estamos bajo las hipótesis del Teorema 3.2.1, con $c_1 = l/2$, $c_2 = l + K_0$ y $A_n = \{m, k\}$.

(3) Si $L_1, L_2 < L_0$, una vez más podemos aplicar el Teorema 3.2.1, con $c_1 = l/2$ y $A_n = \varnothing$.

El caso de F_m es similar a (3), con $c_1 = l/2$ y $A_n = \varnothing$.

Por lo tanto, el Teorema 3.2.1 (con $c_1 = l/2$ y $c_2 = l + K_0$) da que S es δ-thin, con $\delta := 20\delta_0 + \max\{l/2 + (l + K_0)/2, l + K_0\} = 20\delta_0 + l + K_0$.

De hecho, si $l < L_0$, sólo necesitamos considerar (3), y por el Corolario 3.2.2 podemos tomar $\delta := 4\delta_0 + l/2$. $\square$

§4. GRAFOS Y SUPERFICIES DE RIEMANN

§4.1. Introducción.

En este capítulo, abordamos el problema de la caracterización de las superficies de Riemann desde dos perspectivas diferentes. Por un lado, nos volvemos a plantear escribir la superficie original S como unión de subsuperficies $\{S_n\}$. El Teorema 4.2.1 garantiza la hiperbolicidad de algunos espacios métricos que son "estrechos" (en el sentido de radio de inyectividad pequeño). Gracias a este resultado, estudiamos cómo puede afectar la descomposición de una superficie en Y-piezas y foniles (o incluso en superficies con borde más generales) sobre su hiperbolicidad (ver los teoremas 4.3.1, 4.3.2, 4.3.4, 4.3.6 y 4.3.7). En particular, los teoremas 4.3.2, 4.3.6 y 4.3.7 pueden aplicarse incluso en el caso de Y-piezas cuyo borde son geodésicas simples cerradas arbitrariamente largas. La constante de hiperbolicidad en el Teorema 4.2.1 es la mejor posible, y este hecho nos permite obtener constantes de hiperbolicidad muy precisas en el Teorema 4.3.1, y en las proposiciones 4.3.1 y 4.3.2, y buenas constantes en el resto de los resultados.

Conseguimos resultados sobre la hiperbolicidad uniforme de superficies de tipo finito (ver los teoremas 4.3.3 y 4.3.4, y las proposiciones 4.3.1 y 4.3.2). El Teorema 4.3.5 es especialmente interesante, ya que garantiza la hiperbolicidad de superficies de tipo finito, con constantes de hiperbolicidad que sólo dependen de la topología de la superficie y de algunas restricciones métricas; de hecho, podemos ver este teorema como un resultado sobre la estabilidad de las superficies de Riemann hiperbólicas.

Por otro lado, un enfoque alternativo del problema consiste en estudiar la equivalencia que existe entre la hiperbolicidad de una superficie de Riemann y la hiperbolicidad de un grafo asociado a esta. Estos resultados clarifican cómo la descomposición de una superficie de Riemann en Y-piezas y foniles afecta a la hiperbolicidad de la superficie. Todo esto hace más simple la topología de la superficie y permite obtener resultados globales gracias a la información local de la que disponemos. Destacamos especialmente el Teorema 4.3.6, que nos muestra cómo construir explícitamente un grafo muy simple G relacionado con la superficie S, de tal forma que la hiperbolicidad de G garantiza la hiperbolicidad de S. En los teoremas 4.3.1 y 4.3.2 la hiperbolicidad de las piezas implica la hiperbolicidad de la superficie, puesto que unimos las piezas siguiendo el diseño combinatorio de un árbol (es decir, no creamos obstáculos topológicos). En el Teorema 4.3.6 no conseguimos la hiperbolicidad de la superficie sólo a partir de la información local, ya que no tenemos ninguna restricción sobre las conexiones de las piezas; es necesario preguntarnos por la hiperbolicidad del grafo que usamos como modelo para dichas conexiones. Evidentemente este hecho simplifica notablemente la geometría de la superficie, ya que sólo tenemos que trabajar con los "esqueletos".

Una aplicación del Teorema 4.3.6 es comprobar que algunas deformaciones de superficies de Riemann preservan la hiperbolicidad, tales como cambios importantes en las longitudes de las geodésicas simples cerradas (ver el Teorema 4.3.7) o "twists" en las Y-piezas (ver el Corolario 4.3.4).

En la Sección 4.4 probamos que no existe ninguna relación de inclusión entre superficies de Riemann hiperbólicas y las clases habituales de superficies de Riemann, tales como $O_G, O_{HP}, O_{HB}, O_{HD}$, superficies con desigualdad isoperimétrica hiperbólica, o el complementario de estas clases (incluso para el caso de dominios planos). Este resultado nos muestra que el estudio de las superficies de Riemann hiperbólicas es más complicado (e interesante) de lo que podría parecer en un principio.

§4.2. Resultados en espacios métricos.

Empezaremos esta sección definiendo un concepto nuevo y que vamos a necesitar para obtener nuestro primer resultado, el Teorema 4.2.1.

Definición 4.2.1. Un espacio métrico geodésico X es c_1-*descomponible* si verifica:

(1) $X = \cup_{r\in I} X^r$, con I un intervalo en la recta real, $\{X^r\}_{r\in I}$ disjuntos dos a dos, y $X^r = \cup_{a\in A(r)} X^r_a$, con $\{X^r_a\}_{a\in A(r)}$ conjuntos cerrados, disjuntos dos a dos y $\operatorname{diam}_X X^r_a \leq c_1$.

(2) Si para cada geodésica $\gamma : [0,l] \longrightarrow X$ y $s \in [0,l]$, denotamos por $X^{r(s)}_{a(s)}$ el conjunto X^r_a con $\gamma(s) \in X^r_a$, entonces $\cup_{s\in[0,l]} X^{r(s)}_{a(s)}$ es un conjunto cerrado.

(3) Si $X^{r(l)}_{a(l)} \neq X^{r(0)}_{a(0)}$, entonces existe un $s \in (0,l)$ tal que $X \setminus X^{r(s)}_{a(s)}$ no es conexo, y x_0, x_l están en diferentes componentes conexas de $X \setminus X^{r(s)}_{a(s)}$, para todo $x_0 \in X^{r(0)}_{a(0)}$ y $x_l \in X^{r(l)}_{a(l)}$.

Observaciones.

1. El punto (2) es sólo una condición topológica técnica sobre la "continuidad" en r de X^r, que se satisface trivialmente en las aplicaciones desarrolladas en las proposiciones 4.3.1 y 4.3.2, y en los teoremas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.4.

2. Si $\gamma : [0,l] \longrightarrow X$ es una geodésica, entonces $\gamma : [\alpha,\beta] \longrightarrow X$ es también una geodésica para cualquier $0 \le \alpha < \beta \le l$. Así pues, la condición (2) nos da:

(2′) Para cada geodésica $\gamma : [0,l] \longrightarrow X$, el conjunto $\cup_{s\in[\alpha,\beta]} X_{a(s)}^{r(s)}$ es cerrado.

3. De igual forma que en el punto anterior, para cualquier $0 \le \alpha < \beta \le l$, la condición (3) implica:

(3′) Si $X_{a(\beta)}^{r(\beta)} \neq X_{a(\alpha)}^{r(\alpha)}$, entonces existe un $s \in (\alpha,\beta)$ tal que $X \setminus X_{a(s)}^{r(s)}$ no es conexo, y x_α, x_β están en diferentes componentes conexas de $X \setminus X_{a(s)}^{r(s)}$, para todo $x_\alpha \in X_{a(\alpha)}^{r(\alpha)}$ y $x_\beta \in X_{a(\beta)}^{r(\beta)}$.

Teorema 4.2.1. *Todo espacio métrico geodésico c_1-descomponible es $(3c_1/2)$-thin.*

Observación. Un método estándar para conseguir una descomposición es tomar una función continua $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, definir $X^r := f^{-1}(\{r\})$ y tomar $\{X_a^r\}_{a\in A(r)}$ como las componentes conexas de X^r. Una elección natural de f es $f(x) = d(x,x_0)$, para un punto fijo $x_0 \in X$. Esta elección nos da el primer ejemplo de espacios descomponibles: los árboles son 0-descomponibles. Otros ejemplos no triviales de espacios descomponibles aparecerán en las proposiciones 4.3.1 y 4.3.2, y en los teoremas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.4.

Demostración. La idea de la prueba es mostrar que dado un punto x en un triángulo geodésico T, entonces existe un conjunto X_a^r (cerca de x) que interseca dos lados de T.

Consideremos un triángulo geodésico T con vértices $\{x_1,x_2,x_3\}$. Elegimos cualquier permutación $\{x_i,x_j,x_k\}$ de $\{x_1,x_2,x_3\}$ y $x \in [x_i,x_j]$. Si $l := d_X(x_i,x_j)$, consideramos la parametrización por longitud de arco de $[x_i,x_j]$, $\gamma : [0,l] \longrightarrow X$. Denotemos por η la unión de los otros dos lados $\eta := [x_j,x_k] \cup [x_k,x_i]$. Si $x \in X_a^r$ y $\eta \cap X_a^r \neq \varnothing$, entonces $d_X(x,\eta) \le c_1$ por (1), y esto finaliza la demostración. Asumamos, por lo tanto, que $\eta \cap X_a^r = \varnothing$, y probemos que $d_X(x,\eta) \le 3c_1/2$. Tomemos $s_1 := \gamma^{-1}(x) \in (0,l)$. Vamos a definir

$$s_0 := \inf \left\{\alpha > 0 :\, X_{a(s)}^{r(s)} \cap \eta = \varnothing \ \ \forall s \in (\alpha, s_1]\right\},$$
$$s_2 := \sup \left\{\beta < l :\, X_{a(s)}^{r(s)} \cap \eta = \varnothing \ \ \forall s \in [s_1, \beta)\right\}.$$

Veamos que $X_{a(s_0)}^{r(s_0)} \cap \eta \neq \varnothing$ y $X_{a(s_2)}^{r(s_2)} \cap \eta \neq \varnothing$. Sólo trataremos el segundo caso, ya que el primero es similar. Por definición de s_2 tenemos únicamente dos posibilidades:

$X_{a(s_2)}^{r(s_2)} \cap \eta \neq \varnothing$ ó $X_{a(t_k)}^{r(t_k)} \cap \eta \neq \varnothing$ con $t_k \searrow s_2$. En el primer caso, ya hemos obtenido lo que deseábamos. Supongamos que tenemos la segunda posibilidad; entonces para cada k podemos elegir $x_k \in X_{a(t_k)}^{r(t_k)} \cap \eta$. Puesto que η es un conjunto compacto, podemos elegir una subsucesión (que continuaremos denotando por x_k) y un punto $x_0 \in \eta$ con $x_k \to x_0$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que $x_k \in \eta \cap \big(\cup_{s\in[s_2,s_2+\varepsilon]} X_{a(s)}^{r(s)} \big)$, para todo $k \geq N$. Recordemos que por $(2')$ el conjunto $\eta \cap \big(\cup_{s\in[s_2,s_2+\varepsilon]} X_{a(s)}^{r(s)} \big)$ es cerrado, y por lo tanto $x_0 \in \eta \cap \big(\cup_{s\in[s_2,s_2+\varepsilon]} X_{a(s)}^{r(s)} \big)$ para todo $\varepsilon > 0$.

Antes de continuar veamos que se verifica:

$$\cap_{\varepsilon>0} \cup_{s\in[s_2,s_2+\varepsilon]} X_{a(s)}^{r(s)} = X_{a(s_2)}^{r(s_2)}.$$

Es obvio que $X_{a(s_2)}^{r(s_2)} \subseteq \cap_{\varepsilon>0} \cup_{s\in[s_2,s_2+\varepsilon]} X_{a(s)}^{r(s)}$. Para ver la otra inclusión tomemos $y \in \cap_{\varepsilon>0} \cup_{s\in[s_2,s_2+\varepsilon]} X_{a(s)}^{r(s)}$. Por pertenecer y a la intersección, existe una sucesión $\{u_n\}_n$ que decrece (no estrictamente) a s_2, tal que $y \in X_{a(u_n)}^{r(u_n)}$ para todo n, y entonces $X_{a(u_n)}^{r(u_n)} = X_{a(u_1)}^{r(u_1)}$ para todo n.

Ya que $X_{a(u_1)}^{r(u_1)}$ es cerrado, $\lim_{n\to\infty} \gamma(u_n) = \gamma(s_2)$ y $\gamma(u_n) \in X_{a(u_1)}^{r(u_1)}$, entonces $\gamma(s_2) \in X_{a(u_1)}^{r(u_1)}$; por tanto $X_{a(u_1)}^{r(u_1)} = X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$, puesto que $\gamma(s_2) \in X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$ por definición. Consecuentemente, $y \in X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$ como queríamos ver.

Continuando con la prueba, podemos afirmar entonces que $x_0 \in \eta \cap X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$, y por lo tanto $X_{a(s_2)}^{r(s_2)} \cap \eta \neq \varnothing$.

Probemos ahora que $X_{a(s_0)}^{r(s_0)} = X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$. Argumentando por contradicción, supongamos que no es cierto. Por $(3')$ podemos tomar $s \in (s_0, s_2)$ tal que $X \setminus X_{a(s)}^{r(s)}$ no es conexo, y $\gamma(s_0)$, $\gamma(s_2)$ están en diferentes componentes conexas de $X \setminus X_{a(s)}^{r(s)}$; también por $(3')$, el resultado sigue siendo cierto si cambiamos $\gamma(s_0)$ por cualquier punto de $X_{a(s_0)}^{r(s_0)}$ y $\gamma(s_2)$ por cualquier punto de $X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$.

Consideremos ahora una parametrización de la curva $\eta : [0, l_3] \longrightarrow X$. Puesto que $X_{a(s_0)}^{r(s_0)} \cap \eta \neq \varnothing$ y $X_{a(s_2)}^{r(s_2)} \cap \eta \neq \varnothing$, podemos escoger $0 \leq l_1 < l_2 \leq l_3$ con $\eta(l_1) \in X_{a(s_0)}^{r(s_0)}$, $\eta(l_2) \in X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$ (o viceversa). Denotemos por $\eta_0 : [l_1, l_2] \longrightarrow X$ la restricción de η a $[l_1, l_2]$. Es evidente que $\eta_0 \cap X_{a(s)}^{r(s)} = \varnothing$ (ya que $\eta \cap X_{a(s)}^{r(s)} = \varnothing$) y, por tanto, η_0 une $\eta(l_1) \in X_{a(s_0)}^{r(s_0)}$ con $\eta(l_2) \in X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$ en $X \setminus X_{a(s)}^{r(s)}$, y llegamos así a una contradicción. Consecuentemente $X_{a(s_0)}^{r(s_0)} = X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$.

Como $X_{a(s_0)}^{r(s_0)} = X_{a(s_2)}^{r(s_2)}$, se tiene $L_X(\gamma([s_0, s_2])) = d_X(\gamma(s_0), \gamma(s_2)) \leq \operatorname{diam}_X \big(X_{a(s_0)}^{r(s_0)} \big) \leq$

c_1. Recordemos además que $x = \gamma(s_1)$. Por lo tanto

$$d_X\big(x, X_{a(s_0)}^{r(s_0)}\big) \leq \min\{L_X(\gamma([s_0, s_1])), L_X(\gamma([s_1, s_2]))\} \leq c_1/2$$

y concluimos

$$d_X(x, \eta) \leq d_X\big(x, X_{a(s_0)}^{r(s_0)}\big) + \operatorname{diam}_X\big(X_{a(s_0)}^{r(s_0)}\big) \leq c_1/2 + c_1 = 3c_1/2. \quad \square$$

Vamos a terminar esta sección con un teorema que será una herramienta fundamental en la demostración de algunos de los principales resultados de este capítulo. Para ello, necesitamos introducir un concepto nuevo.

Definición 4.2.2. Decimos que un espacio métrico geodésico X admite una *descomposición*, si existe una familia de espacios métricos geodésicos $\{X_n\}_{n\in\Lambda}$ con $X = \cup_{n\in\Lambda} X_n$ y $X_n \cap X_m = \eta_{nm}$, donde para cada $n \in \Lambda$, $\{\eta_{nm}\}_m$ son subconjuntos cerrados y disjuntos dos a dos de X_n (también permitimos que $\eta_{nm} = \varnothing$); además cualquier segmento geodésico en X interseca como mucho con un número finito de η_{nm}'s.

Decimos que X_n, con $n \in \Lambda$, es una (k_1, k_2, k_3)-*pieza arbórea* si satisface las siguientes propiedades:

(a) Si $\eta_{nm} \neq \varnothing$, entonces $X \setminus \eta_{nm}$ no es conexo y a, b están en diferentes componentes conexas de $X \setminus \eta_{nm}$ para todo $a \in X_n \setminus \eta_{nm}$, $b \in X_m \setminus \eta_{nm}$.

(b) $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_1$ para todo $m \neq n$, y existe $A_n \subseteq \Lambda$, tal que $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_2\, d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk})$ si $m \neq k$ y $m, k \in A_n$, y $\sum_{m\notin A_n} \operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_3$.

Decimos que un espacio métrico geodésico X tiene una (k_1, k_2, k_3)-*descomposición arbórea* si tiene una descomposición tal que todo X_n, con $n \in \Lambda$, es una (k_1, k_2, k_3)-pieza arbórea.

Observaciones.

1. Evidentemente, la condición (b) sólo se exige en el caso de que $\eta_{nm}, \eta_{nk} \neq \varnothing$.

2. Los conjuntos Λ y A_n no tiene que ser necesariamente numerables.

3. La hipótesis $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_2\, d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk})$ se verifica automáticamente si tenemos que $d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk}) \geq k_2'$, ya que $\operatorname{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_1$.

4. La condición (a) para todo $n \in \Lambda$ garantiza que el grafo $R = (V, E)$, construido a continuación, sea un árbol: $V = \cup_{n\in\Lambda}\{v_n\}$ y $[v_n, v_m] \in E$ si y sólo si $\eta_{nm} \neq \varnothing$.

5. Si X es una superficie de Riemann, $\{X_n\}_{n\in\Lambda}$ son superficies de Riemann con borde y $\eta_{nm} \subset \partial X_n \cap \partial X_m$, entonces la condición "a, b están en diferentes componentes conexas de $X \setminus \eta_{nm}$ para todo $a \in X_n \setminus \eta_{nm}$, $b \in X_m \setminus \eta_{nm}$" en (a), es una consecuencia de "$X \setminus \eta_{nm}$ no es conexo".

Podemos aplicar el siguiente resultado al estudio de la hiperbolicidad de las superficies de Riemann (ver los teoremas 4.3.3, 4.3.5 y 4.3.7). En [PRT1] aparecen expresiones explícitas para las constantes δ y k_4.

Teorema 4.2.A. ([PRT1, Teorema 1]) *Sea $\{X_n\}_{n\in\Lambda}$ una (k_1, k_2, k_3)-descomposición arbórea de un espacio métrico geodésico X. Entonces X es δ-hiperbólico si y sólo si existe una constante k_4 tal que X_n es k_4-hiperbólico para todo $n \in \Lambda$. Además, si X es δ-hiperbólico, entonces k_4 sólo depende de δ, k_1, k_2 y k_3; si existe k_4, entonces δ sólo depende de k_1, k_2, k_3 y k_4.*

§4.3. Resultados en superficies de Riemann.

Comenzamos esta sección deduciendo varias aplicaciones del Teorema 4.2.1 que nos garantizan la hiperbolicidad de muchas superficies de Riemann, teniendo además un gran control sobre sus constantes de hiperbolicidad.

Proposición 4.3.1. *Toda Y-pieza generalizada Y_0 con $L(\gamma) \le l$, para toda geodésica simple cerrada $\gamma \subseteq \partial Y_0$, es $(4r_0 + l)$-descomponible y $3(4r_0 + l)/2$-thin, donde $r_0 := 2\,\mathrm{Arcsinh}(1/2)$.*

Demostración. Denotemos por $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, las geodésicas simples cerradas de ∂Y_0 (como es habitual, identificamos una puntura con una geodésica de longitud cero). Si $\{i, j, k\}$ es una cualquier permutación de $\{1, 2, 3\}$, consideremos la geodésica B_i en Y_0 que es ortogonal a γ_j y γ_k. Si dividimos Y_0 a través de las curvas B_i, obtenemos dos hexágonos convexos isométricos con ángulos rectos H_1, H_2, con lados consecutivos de longitud $L(\gamma_1)/2, L(B_3), L(\gamma_2)/2, L(B_1), L(\gamma_3)/2, L(B_2)$.

Tomemos el punto medio x_i del lado con longitud $L(\gamma_i)/2$ de H_1, y consideremos el triángulo geodésico $T = \{x_1, x_2, x_3\} \subset H_1$. Podemos trazar la bola $B(z_0, r)$ contenida en H_1, y que es tangente a algún $y_1 \in [x_2, x_3]$, $y_2 \in [x_1, x_3]$ y $y_3 \in [x_1, x_2]$. Tenemos que $\pi \ge A(T) > A(B(z_0, r)) = 4\pi \sinh^2(r/2)$, y entonces $r < r_0$.

Vamos a considerar las geodésicas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en H_1 que comienzan en z_0 y terminan respectivamente en x_1, x_2, x_3.

Para cada punto $p \in [x_i, x_j] \subset T$, consideremos la geodésica a_p en H_1 que comienza en p ortogonalmente a $[x_i, x_j]$ y finaliza en $\alpha_i \cup \alpha_j$, y la geodésica b_p en H_1 que comienza ortogonalmente a B_k y finaliza en p. Observemos que $L(a_p) + L(b_p) < r_0 + l/4$.

Por lo tanto, podemos trazar en H_1 curvas que unan dos de los conjuntos B_1, B_2, B_3, con diámetro menor que $2r_0 + l/2$; de hecho, la "curva" que contiene a z_0 es la unión de tres curvas y conecta los tres conjuntos.

Repetimos el mismo diseño en H_2, ya que es isométrico a H_1. Si pegamos estos hexágonos, tenemos que Y_0 es $(4r_0 + l)$-descomponible. El Teorema 4.2.1 nos da que Y_0 es $3(4r_0 + l)/2$-thin. □

Como ya hemos comentado anteriormente, muchas superficies de Riemann pueden descomponerse en unión de foniles e Y-piezas generalizadas (ver [FM, Teorema 4.1] y [AR]). El siguiente resultado utiliza esta descomposición para obtener la hiperbolicidad.

Teorema 4.3.1. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde) sin género (podemos ver a S como un subconjunto del plano complejo). Si hay una descomposición de S en unión de Y-piezas generalizadas $\{Y_n\}_{n\in N}$ con $L_S(\gamma) \le l$ para toda geodésica simple cerrada $\gamma \subset \cup_n \partial Y_n$, entonces S es $(4r_0 + l)$-descomponible y $3(4r_0 + l)/2$-thin, donde $r_0 := 2\,\mathrm{Arcsinh}(1/2)$.*

Demostración. Por la Proposición 4.3.1 sabemos que cada Y_n es $(4r_0 + l)$-descomponible. Puesto que S es un dominio plano, la unión en n de las curvas construidas en la Proposición 4.3.1 en cada Y_n da que S también es $(4r_0 + l)$-descomponible, ya que cualquiera de dichas curvas desconecta S. Y por el Teorema 4.2.1 concluimos que S es $3(4r_0 + l)/2$-thin. □

Con una idea adicional podemos mejorar la Proposición 4.3.1 y el Teorema 4.3.1.

Proposición 4.3.2. *Toda Y-pieza generalizada Y_0 con $L(\gamma) \le l$, para al menos dos geodésicas simples cerradas $\gamma \subseteq \partial Y_0$, es $(2r_1 + l)$-descomponible y $3(2r_1 + l)/2$-thin, donde*

$$r_1 := \max\left\{ \mathrm{Arcsinh}(\coth(l/4)), 4\,\mathrm{Arcsinh}(1/2)\right\}.$$

Observación. Este es el mejor resultado que podemos obtener sobre Y-piezas: Si $L(\gamma) \le l$ para una geodésica simple cerrada $\gamma \subseteq \partial Y_0$, δ puede ser arbitrariamente grande, como veremos en el ejemplo posterior a la demostración de la Proposición 4.3.2.

Demostración. Denotemos por $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, las geodésicas simples cerradas en ∂Y_0 (como es habitual, identificamos una puntura con una geodésica de longitud cero). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L(\gamma_3) > l$, ya que en otro caso podemos aplicar la Proposición 4.3.1 (tenemos $r_1 \ge 2r_0$).

Si $\{i,j,k\}$ es cualquier permutación de $\{1,2,3\}$, consideremos la geodésica B_i en Y_0 ortogonal a γ_j y γ_k. Si dividimos Y_0 a través de las curvas B_i, obtenemos dos hexágonos convexos isométricos con ángulos rectos H_1, H_2.

Para cada punto $p \in g_3 := \gamma_3 \cap H_1$, consideramos la geodésica a_p en H_1 que empieza en p y termina ortogonalmente en B_3. Queremos conseguir una cota para $L(a_p)$; para ello, tratamos primero el caso más simple: γ_1 y γ_2 son punturas. Así pues, H_1 es un cuadrilátero con dos ángulos rectos y tres lados de longitud infinita; si p_0 es el punto medio de g_3, podemos dividir H_1, cortando a través de la geodésica a_{p_0}, en dos cuadriláteros isométricos Q_1, Q_2, con tres ángulos rectos y dos lados de longitud infinita. Los otros lados tienen longitud $L(\gamma_3)/4$ y $L(a_{p_0})$, con $\sinh(L(\gamma_3)/4)\sinh L(a_{p_0}) = 1$ (ver, por ejemplo, [B, p. 157], [F, p. 89]). Si p_0, p_1 son los extremos de g_3 en Q_1, podemos dividir Q_1, cortando a través de la geodésica a_{p_1}, en un triángulo y un cuadrilátero Q_{11} con tres ángulos rectos y cuatro lados finitos. En Q_{11} se tiene que $\sinh L(a_{p_1}) = \sinh L(a_{p_0}) \cosh(L(\gamma_3)/4) = \coth(L(\gamma_3)/4)$ (ver, por ejemplo, [F, p. 88]), y consecuentemente $L(a_p) \le L(a_{p_1}) < \operatorname{Arcsinh}(\coth(l/4)) \le r_1$, since $L(\gamma_3) > l$.

Observemos ahora que, en el caso general (con $0 \le L(\gamma_1), L(\gamma_2) \le l$), tenemos $L(a_p) < r_1 + l/2$.

Denotemos por b_p la curva en Y_0 que obtenemos al unir a_p y su curva simétrica $a_{p'}$; cada b_p une γ_3 consigo misma y tiene longitud menor que $2r_1 + l$. Se puede comprobar que el conjunto de puntos de Y_0 que no están en la unión de los b_p's tiene dos componentes conexas, las cuales son entornos tubulares N_1 de γ_1 y N_2 de γ_2 en Y_0. Podemos trazar en N_i curvas libremente homótopas a γ_i de longitud menor que $2r_1 + l$.

Así pues, por el Teorema 4.2.1, concluimos que Y_0 es $(2r_1 + l)$-descomponible y $3(2r_1 + l)/2$-thin.

□

Ejemplo. *La mejor constante de hiperbolicidad de la Y-pieza generalizada Y_t con una puntura y dos geodésicas simples cerradas de longitud $2t$ tiende a infinito cuando $t \to \infty$.*

Denotemos por γ_1, γ_2, las geodésicas simples cerradas de Y_t. La idea que hay tras la demostración es que dados dos puntos en γ_i, la distancia entre ellos es aproximadamente la longitud de una subcurva de γ_i uniéndolos. Denotemos por $p_1 \in \gamma_1, p_2 \in \gamma_2$, los puntos tales que $d(p_1, p_2) = d(\gamma_1, \gamma_2) =: s$. A continuación elegimos puntos $q_1 \in \gamma_1, q_2 \in \gamma_2$, con $d(p_1, q_1) = d(p_2, q_2) = t$. Si dividimos Y_t a través de las geodésicas que comienzan ortogonalmente a γ_1 en p_1 y q_1 , y a γ_2 en q_2, obtenemos dos hexágonos convexos isométricos con ángulos rectos H_1, H_2. Cada H_i tiene lados con longitudes $t, s, t, \infty, 0, \infty$.

Aplicando trigonometría hiperbólica estándar (ver, por ejemplo, [B, p. 161]) deducimos

$$\cosh s = 1 + \frac{2}{\sinh^2 t}\,, \qquad \sinh s = \frac{2\cosh t}{\sinh^2 t}\,.$$

Consideremos la geodésica γ_0 en H_1 que da la distancia entre $[p_1, q_1]$ y el lado A de longitud infinita que no interseca con $[p_1, q_1]$; definamos $x := \gamma_0 \cap [p_1, q_1]$ e $y := \gamma_0 \cap A$. La geodésica γ_0 divide a H_1 en un pentágono de ángulos rectos y un cuadrilátero cpn tres ángulos rectos y un ángulo cero. La trigonometría hiperbólica para pentágonos (ver, por ejemplo, [B, p. 159]) da que $\cosh L(\gamma_0) = \sinh s \sinh t = 2\coth t$; entonces $\lim_{t\to\infty} \cosh L(\gamma_0) = 2$ y $\lim_{t\to\infty} \sinh L(\gamma_0) = \sqrt{3}$. También tenemos que $\sinh L(\gamma_0) \sinh d(x, q_1) = 1$ y por tanto $\lim_{t\to\infty} d(x, q_1) = \operatorname{Arcsinh}(1/\sqrt{3}\,)$. Consecuentemente, la distancia $d(x, q_1)$ está acotada para valores grandes de t.

Teniendo en cuenta estos cálculos, consideremos el biángulo geodésico γ_1 en Y_t con vértices $\{p_1, q_1\}$ (es geodésico por la simetría de Y_t). Elijamos el punto $z \in \gamma_1 \cap H_1$ tal que $d(z, p_1) = d(z, q_1) = t/2$. Entonces existe alguna constante c con $d(z, \gamma_1 \cap H_2) \geq t/2 - c$ si t es suficientemente grande, como consecuencia de los cálculos anteriores; concluimos que $\lim_{t\to\infty} \delta(Y_t) = \infty$.

Antes de seguir adelante, necesitamos introducir un concepto nuevo y recordar un bonito teorema de Bers.

Definición 4.3.1. Sea S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde) de tipo finito; si S tiene borde, también pedimos que ∂S sea la unión de geodésicas locales (cerradas o no cerradas) disjuntas. Un *outer loop* en S es una geodésica simple cerrada que además es o bien el borde de un fonil o bien está contenida en ∂S. Un *inner loop* en S es una geodésica simple cerrada que no es un outer loop. La *característica* de S es $a = 2g - 2 + n$, donde g es el género de S y n es la suma del número de punturas y de outer loops de S.

Teorema 4.3.A. ([Be, Teorema 1]) *Sea S una superficie de Riemann no excepcional de tipo finito (con o sin borde); si S tiene borde, también pedimos que ∂S sea la unión de geodésicas locales (cerradas o no cerradas) disjuntas. Si S tiene característica a, la longitud de su inner loop más corto (en el caso de que exista) está acotado superiormente por una constante $J = J(a, L)$ que depende sólo de a y de la longitud L del outer loop más largo (en el caso de que exista).*

Observación. Existe tal inner loop si $3g-3+n>0$.

De hecho, el Teorema 4.3.A está probado en [Be] únicamente para superficies sin borde, pero el otro caso es directo a partir de este.

Si usamos la Proposición 4.3.2 en lugar de la Proposición 4.3.1 en la demostración del Teorema 4.3.1, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde), sin género. Si hay una descomposición de S en unión de foniles $\{F_m\}_{m\in M}$ e Y-piezas generalizadas $\{Y_n\}_{n\in N}$ ($N\neq\emptyset$) con $L_S(\gamma)\le l$ para al menos dos geodésicas simples cerradas $\gamma\subseteq\partial Y_n$ para todo $n\in N$, entonces S es δ-hiperbólica, donde δ es una constante que sólo depende de l.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.2, podemos suponer que $M=\varnothing$. Consideremos Y_n con $L_S(\gamma)>l$ para alguna geodésica simple cerrada $\gamma\subseteq\partial Y_n$. Supongamos que existe algún $n_0\neq n$ con $\gamma\subseteq\partial Y_{n_0}$; podemos aplicar el Teorema 4.3.A a superficies de Riemann con borde $Y_n\cup Y_{n_0}$ con característica $a=2$, y así tenemos un inner loop γ' en $Y_n\cup Y_{n_0}$ con $L_S(\gamma')\le J(2,l)$. Si dividimos $Y_n\cup Y_{n_0}$ por γ', obtenemos dos Y-piezas generalizadas Y_n',Y_{n_0}', tales que $Y_n\cup Y_{n_0}=Y_n'\cup Y_{n_0}'$, y $L_S(\sigma)\le l_0:=\max\{l,J(2,l)\}$ para toda geodésica simple cerrada $\sigma\subseteq\partial Y_n'\cup\partial Y_{n_0}'$.

Consecuentemente, sin pérdida de generalidad podemos asumir que la descomposición de S en la unión de Y-piezas generalizadas $\{Y_n\}_{n\in N}$ verifican la siguiente propiedad: si $L_S(\gamma)>l_0$ para alguna geodésica simple cerrada $\gamma\subseteq\cup_n\partial Y_n$, entonces γ está precisamente en el borde de una única Y-pieza generalizada.

Por la Proposición 4.3.2 tenemos que cada Y_n es $(2r_1+l_0)$-descomponible, con

$$r_1:=\max\big\{\operatorname{Arcsinh}(\coth(l_0/4)),4\operatorname{Arcsinh}(1/2)\big\}.$$

Como S es un dominio plano, la unión en n de las curvas construidas en la Proposición 4.3.2 en cada Y_n da que S es también $(2r_1+l_0)$-descomponible, ya que cualquiera de estas curvas desconecta S. Por lo tanto, el Teorema 4.2.1 garantiza que S es $3(2r_1+l_0)/2$-thin. $\square$

Como el fonil F_l con $L(\partial F_l)=l$ tiene constante thin $\delta_l\ge l/4$, podríamos pensar que una superficie con foniles cuyas geodésicas simples cerradas son arbitrariamente largas no puede ser hiperbólica. Sin embargo, el Teorema 4.3.2 nos permite probar el siguiente resultado realmente sorpredente.

Corolario 4.3.1. *Existen dominios planos hiperbólicos con foniles cuyas geodésicas simples cerradas son arbitrariamente largas.*

Demostración. Para cada entero positivo n consideramos una Y-pieza Y_n cuyo borde está formado por dos geodésicas de longitud 1 y una geodésica de longitud n. Denotamos por Z_1 la unión de Y_1 y dos foniles tal que sus bordes son geodésicas de longitud 1, y por Z_n $(n > 1)$ la unión de Y_n y un fonil cuyo borde es una geodésica de longitud n.

Denotamos por Ω la unión de $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ al identificar las geodésicas del borde (Z_1 está conectado con Z_2, y Z_n está conectado con Z_{n-1} y Z_{n+1}, si $n > 1$). Así pues, Ω tiene foniles cuyos bordes son geodésicas simples cerradas de longitud arbitrariamente grande, y el Teorema 4.3.2 nos garantiza que es hiperbólico. $\square$

Para poder probar nuestros próximos teoremas necesitamos algunas definiciones previas.

Definición 4.3.2. Dada una superficie de Riemann S con género finito g, decimos que las geodésicas simpes cerradas $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ son *generadoras del género de* S si $S \setminus a_j$ y $S \setminus b_j$ son conexos, $a_j \cap b_j$ es un único punto, y $(a_j \cup b_j) \cap (\cup_{k \neq j}(a_k \cup b_k)) = \varnothing$.

Dado $c > 0$, decimos que una superficie de Riemann S con género finito g tiene *género* c*-pequeño* si existen $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ generadoras del género de S tales que $L_S(a_j) \leq c$, $L_S(b_j) \leq c$, para $j = 1, \dots, g$. Decimos que un dominio plano (una superficie sin género) tiene *género* 0*-pequeño*.

Definición 4.3.3. Para cada $l, c \geq 0$ y cada entero no negativo a, denotamos por $\mathcal{S}_G(a, l, c)$ el conjunto de superficies de Riemann no excepcionales de tipo finito S que verifican las siguientes propiedades: si S tiene borde, entonces ∂S es la unión de geodésicas locales (cerradas o no cerradas), S tiene característica menor o igual que a y género c-pequeño, y todo outer loop tiene longitud menor o igual que l.

Sea $\mathcal{S}_G(a, l) = \mathcal{S}_G(a, l, 0)$ el conjunto de dominios planos en $\mathcal{S}_G(a, l, c)$.

Los dos próximos teoremas garantizan la hiperbolicidad de superficies de tipo finito, de tal forma que sus correspondientes constantes de hiperbolicidad sólo dependen de dos o tres parámetros topológicos y métricos.

Teorema 4.3.3. *Para cada $l \geq 0$ y cada entero no negativo a, existe una constante $\delta = \delta(a, l)$, que sólo depende de a y l, tal que toda superficie en $\mathcal{S}_G(a, l)$ es δ-hiperbólica.*

Demostración. Vamos a probar el resultado aplicando inducción sobre a.

Tratemos primero el caso $a = 0$. Si $S \in \mathcal{S}_G(0, l)$, esta puede ser un subconjunto (propio o no) de S_0, siendo S_0 cualquiera de las siguientes superficies: o bien del disco, o bien del disco menos un punto, o bien de un anillo. Si la superficie es S_0, tenemos que: $\mathbf{D}$ es $\log(1+\sqrt{2})$-thin (ver [An, p. 130]), el Lema 3.3.4 y el Corolario 3.3.1 en el capítulo anterior de esta tesis nos dan el resultado en el resto de los casos. Si S es un subconjunto de S_0, dicha superficie es geodésicamente convexa, por lo tanto es δ-hiperbólica con el mismo δ que S_0.

Consideremos ahora el caso $a = 1$. Si $S \in \mathcal{S}_G(1, l)$, entonces es la unión de una Y-pieza generalizada y de un máximo de tres foniles. Como toda geodésica simple cerrada de S es un outer loop, el Teorema 4.3.2 nos da el resultado.

Para finaliar el argumento, supongamos que el resultado es cierto para $a-1$, con $a \geq 2$, y vamos a probarlo para a. Tomemos una superficie $S \in \mathcal{S}_G(a, l)$. Por el Teorema 4.3.A podemos encontrar un inner loop γ con longitud menor o igual que $J(a, l)$ (sabemos que existe tal inner loop ya que $g = 0$ y $a - 1 > 0$). Por tanto S es la unión de dos superficies S_1, S_2, con $S_1 \cap S_2 = \gamma$, ya que S tiene género 0; observemos que $\gamma \subseteq \partial S_1, \partial S_2$. Si definimos $l_a := J(a, l)/2$ (que depende únicamente de a y l), $A_1 := A_2 := \varnothing$, vemos que $\{S_1, S_2\}$ es una $(l_a, 0, l_a)$-descomposición arbórea de S (ver Definición 4.2.2). Observemos que S_1 y S_2 tienen característica menor o igual que a, y que todo outer loop tiene longitud menor o igual que $\max\{l, J(a, l)\}$; por tanto son δ_0-hiperbólicas, con δ_0 una constante que sólo depende de a y l, por la hipótesis de inducción. Entonces el Teorema 4.2.A garantiza que existe una constante $\delta = \delta(a, l)$, que depende únicamente de a y l, tal que S es δ-hiperbólica. $\square$

Podemos mejorar este último resultado en el siguiente teorema, en el que tratamos el caso de superficies con género.

Teorema 4.3.4. *Para cada $l, c \geq 0$ y cada entero no negativo a, existe una constante $\delta = \delta(a, l, c)$, que sólo depende de a, l y c, tal que toda superficie en $\mathcal{S}_G(a, l, c)$ es δ-hiperbólica.*

Demostración. Fijemos a, l, c, y $S \in \mathcal{S}_G(a, l, c)$. Si $S \in \mathcal{S}_G(a, l)$, sólo necesitamos aplicar el Teorema 4.3.4. En otro caso, elegimos $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ generadoras del género de S. Entonces consideramos la superficie con borde S_1 que obtenemos al cortar S por $a_1, \ldots, a_g$, y definimos $t := \max\{l, c\}$. Al cortar por cada una de las a_j el género decrece en 1 unidad y crece el número de outer loops en 2 unidades; así pues, la característica permanece constante. Vemos que $S_1 \in \mathcal{S}_G(a, t)$, y por el Teorema 4.3.3 tenemos que S_1 es

δ_0-hiperbólica, con δ_0 una constante que depende únicamente de a y t. Observemos que $L_S(b_j) \le c$; por tanto las dos copias de a_j en ∂S_1 son $(2c, 0)$-identificadas (ver Definición 2.2.1); entonces el Teorema 2.3.1 nos asegura que existe una constante $\delta = \delta(\delta_0, c)$, que sólo depende de δ_0 y c, tal que S es δ-hiperbólica. $\square$

Si consideramos $\mathbf{D} \setminus \{z_1, z_2\}$, con $z_1, z_2 \in \mathbf{D}$, muchos de sus invariantes conformes (por ejemplo, su exponente de convergencia y su constante isoperimétrica) degeneran cuando z_2 tiende a z_1. Como consecuencia directa del Teorema 4.3.3 se obtiene el siguiente sorprendente resultado sobre establidad de la hiperbolicidad.

Corolario 4.3.2. *Para cada número natural n existe una constante δ_n tal que la mejor constante de hiperbolicidad de $\mathbf{D} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ verifica*

$$\delta(\mathbf{D} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}) \le \delta_n, \qquad \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbf{D}.$$

La conclusión del Teorema 4.3.4 no es cierta sin la hipótesis de género c-pequeño, como podemos ver a continuación en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. *Existe una superficie de Riemann no excepcional abierta de tipo finito S_t con género 1 y característica 1, una puntura, y $\lim_{t \to 0^+} \delta(S_t) = \infty$.*

Para cada $t > 0$, vamos a tomar la Y-pieza generalizada Y_t con una puntura y dos geodésicas simples cerradas γ_1, γ_2, de longitud $2t$. Si dividimos Y_t en dos hexágonos isométricos (con un lado de longitud cero), por trigonometría hiperbólica estándar (ver, por ejemplo, [B, p. 161]) conseguimos

$$d_{Y_t}(\gamma_1, \gamma_2) = \operatorname{Arccosh}\left(1 + \frac{2}{\sinh^2 t}\right) =: g(t)\,.$$

Vamos a denotar por S_t la superficie de Riemann de tipo finito con género 1 y una puntura obtenida a partir de Y_t al identificar γ_1 con γ_2. Se puede ver que existe una geodésica simple cerrada con longitud $g(t)$ en S_t "rodeando" el género; consecuentemente tenemos que si S_t es δ-thin, entonces $\delta \ge g(t)/4$ y $\lim_{t \to 0^+} g(t) = \infty$.

El próximo resultado que vamos a mostrar se consigue a partir de los teoremas 4.3.4 y 4.2.A.

Teorema 4.3.5. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde). Si existe una descomposición arbórea de S en unión de superficies con borde $\{S_m\}_{m\in M} \subset \mathcal{S}_G(a,l,c)$, entonces S es δ-hiperbólica, donde δ es una constante que sólo depende de a, l y c.*

Observación. La condición "$\{S_m\}_{m\in M}$ es una descomposición arbórea de S" se verifica automáticamente si "$\{S_m\}_{m\in M}$ es una descomposición de S tal que para todo $m, n \in M$, $\partial S_m \cap \partial S_n$ es el conjunto vacío o un único outer loop γ de S_m y S_n, y $S \setminus \gamma$ no es conexo si $\gamma = \partial S_m \cap \partial S_n$"; basta con tomar $k_1 = l/2$, $A_n = \varnothing$, $k_2 = 0$ y $k_3 = (a+2)l/2$, que son constantes que dependen únicamente de a y l.

Esta observación y el Teorema 4.3.5 nos dan el resultado que mostramos a continuación.

Corolario 4.3.3. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde) sin género. Si existe una descomposición de S en una unión de superficies con borde $\{S_m\}_{m\in M} \subset \mathcal{S}_G(a,l)$, entonces S es δ-hiperbólica, donde δ es una constante que sólo depende de a y l.*

Nuestro siguiente propósito es obtener la equivalencia que existe entre la hiperbolicidad de una amplia clase de superficies de Riemann y algunos grafos. Para ello, comenzamos primero con una definición.

Definición 4.3.4. Sea Y_0 una Y-pieza generalizada, con $L(\gamma_i) = l_i \leq l$, para toda geodésica simple cerrada $\gamma_i \subseteq \partial Y_0$. Decimos que un árbol $G := (V, E)$ es el *l-esqueleto* de Y_0 si G tiene vértices $V = \{v, v_1, v_2, v_3\}$ y aristas $E := \cup_{i=1}^{3}[v, v_i]$, tales que $L([v, v_i]) = \operatorname{Arccosh}(\coth(l_i/2))$ for $i = 1, 2, 3$.

Vamos a considerar una Y-pieza generalizada Y_0, con $L(\gamma_i) = l_i$, para toda geodésica simple cerrada $\gamma_i \subseteq \partial Y_0$, $l_1, l_2 \leq l$ y $l_3 > l$. Decimos que un árbol G es el *l-esqueleto* de Y_0 si G tiene exactamente una única arista $[v_1, v_2]$, tal que

$$L([v_1, v_2]) = \operatorname{Arccosh}\Big(\frac{\cosh(l_3/2) + \cosh(l_1/2)\cosh(l_2/2)}{\sinh(l_1/2)\sinh(l_2/2)}\Big).$$

Observación. Si $L(\gamma_i) = l_i = 0$ (es decir, si γ_i es una puntura), elegimos como $[v, v_i]$ una semirrecta que comienza en v. $L([v_1, v_2])$ es la distancia entre γ_1 y γ_2 (ver, por ejemplo, [B, p. 161]).

Proposición 4.3.3. *Dada una Y-pieza generalizada Y_0 con $L(\gamma_i) = l_i \leq l$, para al menos dos geodésicas simples cerradas $\gamma_i \subseteq \partial Y_0$, existe una $(1, M)$-quasi-isometría de Y_0*

sobre su l-esqueleto G, con

$$M := \max\left\{\frac{3}{2}\Big(\log\Big(2\cosh\frac{l}{2}\Big(1+\cosh\frac{l}{2}\Big)\Big)+\frac{l}{2}\coth\frac{l}{2}\Big),\ 2\operatorname{Arcsinh}\Big(\coth\frac{l}{4}\Big)+l\right\}.$$

Demostración. Vamos a denotar por $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, las geodésicas simples cerradas en ∂Y_0 (como es habitual, identificamos una puntura con una geodésica de longitud cero).

Tratemos primero el caso $L(\gamma_i) = l_i \leq l$, para $i = 1, 2, 3$. El Lema del Collar nos garantiza que, para cada geodésica γ_i, existe un collar C_{γ_i} en Y_0 de ancho $d_i = \operatorname{Arccosh}(\coth(l_i/2))$ (ver Definición 1.2.3), cuyas curvas frontera son γ_i y η_i; la curva cerrada η_i verifica $L(\eta_i) = L(\gamma_i)\cosh d_i = l_i \coth(l_i/2)$, para $i = 1, 2, 3$. Cuando γ_i es una puntura, tenemos $l_i = 0$, $d_i = \infty$ y $L(\eta_i) = 2$ (ver [Bu, Capítulo 4.4]).

Dada cualquier permutación $\{i, j, k\}$ de $\{1, 2, 3\}$, vamos a considerar el segmento geodésico B_i en Y_0 que es ortogonal a γ_j y γ_k. Si cortamos Y_0 por las curvas B_i, obtenemos dos hexágonos convexos isométricos con ángulos rectos H_1, H_2, con lados consecutivos de longitudes $L(\gamma_1)/2, L(B_3), L(\gamma_2)/2, L(B_1), L(\gamma_3)/2, L(B_2)$, tales que

$$L(B_i) = \operatorname{Arccosh}\Big(\frac{\cosh(l_i/2)+\cosh(l_j/2)\cosh(l_k/2)}{\sinh(l_j/2)\sinh(l_k/2)}\Big)$$

(ver [B, p. 161]). Ahora, definimos el hexágono $H_1^* := H_1 \setminus \cup_{i=1}^3 C_{\gamma_i}$ en H_1 (similarmente H_2^* en H_2), con lados consecutivos de longitud $L(\eta_1)/2, \alpha_3, L(\eta_2)/2, \alpha_1, L(\eta_3)/2, \alpha_2$, que verifican

$$\begin{aligned}
\alpha_i :=& L(B_i) - (d_j + d_k)\\
=& \operatorname{Arccosh}\Big(\frac{\cosh(l_i/2)+\cosh(l_j/2)\cosh(l_k/2)}{\sinh(l_j/2)\sinh(l_k/2)}\Big)\\
&-\Big(\operatorname{Arccosh}(\coth(l_j/2))+\operatorname{Arccosh}(\coth(l_k/2))\Big)\\
\leq& \log\Big(2\,\frac{\cosh(l_i/2)+\cosh(l_j/2)\cosh(l_k/2)}{\sinh(l_j/2)\sinh(l_k/2)}\Big)-\Big(\log(\coth(l_j/2))+\log(\coth(l_k/2))\Big)\\
=& \log\Big(2\,\frac{\cosh(l_i/2)+\cosh(l_j/2)\cosh(l_k/2)}{\cosh(l_j/2)\cosh(l_k/2)}\Big) \leq \log\big(2\cosh(l/2)(1+\cosh(l/2))\big).
\end{aligned}$$

Cuando γ_i es una puntura, conseguimos la misma desigualdad pasando al límite (ver [Bu, Capítulo 4.4]).

Por otro lado, la función $g(t) = t\coth(t/2)$ es creciente en $t \in (0, \infty)$; por lo tanto $L(\eta_i) \leq l\coth(l/2)$. Consecuentemente, $L(\partial H_i^*) \leq 2M$ y $\operatorname{diam}(H_i^*) \leq M$ para $i = 1, 2$.

Y definimos $B_2' := B_2 \cap C_{\gamma_1}$, $B_3' := B_3 \cap C_{\gamma_2}$ y $B_1' := B_1 \cap C_{\gamma_3}$.

A continuación consideramos la función continua $f : Y_0 \longrightarrow G$, con $f(H_1^* \cup H_2^*) = v$, que es una isometría entre B_2' y la arista $[v, v_1]$, entre B_3' y $[v, v_2]$, y entre B_1' y $[v, v_3]$. Para los otros puntos de Y_0, si $a \in C_{\gamma_1}$, definimos $f(a) = f(a') \in [v, v_1]$, donde a' es el punto en B_2' tal que $d(a, \gamma_1) = d(a', \gamma_1)$; definimos f de la misma forma en C_{γ_2} y C_{γ_3}.

Observemos antes de nada que $d_G(f(x), f(y)) \le d_{Y_0}(x, y)$ para todo $x, y \in Y_0$.

También tenemos $d_{Y_0}(x, y) \le d_G(f(x), f(y)) + M$ para todo $x, y \in Y_0$.

Así pues, se tiene que f es una $(1, M)$-quasi-isometría de Y_0 sobre G.

Tratemos ahora el caso $l_1, l_2 \le l$ y $l_3 > l$. Tenemos que $G = [v_1, v_2]$ y que $L([v_1, v_2])$ es igual a la longitud del segmento geodésico B_3 en Y_0 uniendo γ_1 y γ_2. Hemos visto en la demostración de la Proposición 4.3.2 que cualquier punto en Y_0 tiene un punto de B_3 a distancia menor o igual que $\operatorname{Arcsinh}(\coth(l/4)) + l/2 \le M/2$; consecuentemente, la aplicación $f_1 : Y_0 \longrightarrow B_3$ tal que $f_1(x)$ es el punto más próximo a x en B_3 verifica $d_{B_3}(f_1(x), f_1(y)) \le d_{Y_0}(x, y) \le d_{B_3}(f_1(x), f_1(y)) + M$ para todo $x, y \in Y_0$. Por lo tanto, tenemos que $f := f_2 \circ f_1$ es una $(1, M)$-quasi-isometría sobreyectiva de Y_0 en G, si f_2 es una isometría entre B_3 y G. $\square$

Definición 4.3.5. Sean $l > 0$ y una superficie de Riemann (con o sin borde) S, tal que existe una descomposición de S en una unión de Y-piezas generalizadas $\{Y_n\}_{n \in N}$ y foniles $\{F_m\}_{m \in M}$, con $L_S(\gamma) \le l$ para al menos dos geodésicas simples cerradas $\gamma \subseteq \partial Y_n$ in each n. Decimos que un grafo G es un l-*esqueleto* de S si es la unión de $\{G_n\}_{n \in N}$ con las siguientes propiedades:

(a) G_n es el l-esqueleto de Y_n para $n \in N$.

(b) Si $Y_n \cap Y_m = \cup_{i \in I_{nm}} \gamma_{nm}^i$ (con $\gamma_{nm}^i = \gamma_{mn}^i$), entonces $G_n \cap G_m = \cup_{i \in I_{nm}} v_{nm}^i$, donde v_{nm}^i es el vértice asociado a γ_{nm}^i, e identificamos v_{nm}^i con v_{mn}^i para obtener G.

Observaciones.

1. Como una consecuencia de (b), tenemos:

(P) si $L_S(\gamma) > l$ para alguna geodésica simple cerrada $\gamma \subseteq \cup_n \partial Y_n$, entonces γ pertenece al borde de una única Y-pieza generalizada.

Conviene resaltar que (P) no es una restricción en absoluto, ya que si $\{Y_n\}_n$ no satisface esta propiedad, podemos reemplazar $\{Y_n\}_n$ por $\{Y_n'\}_n$, como en la demostración del Teorema 4.3.2, donde $\{Y_n'\}_n$ verifica (P) si sustituimos l por $\max\{l, J(2, l)\}$ (J es la constante del Teorema 4.3.A). Consecuentemente, si S admite una descomposición en unión de Y-piezas generalizadas $\{Y_n\}_{n \in N}$ y foniles $\{F_m\}_{m \in M}$, con $L_S(\gamma) \le l$ para al menos dos geodésicas simples cerradas $\gamma \subseteq \partial Y_n$ en cada n, entonces podemos asegurar que tiene un $\max\{l, J(2,l)\}$-esqueleto.

2. Observemos que $\operatorname{card} I_{nm} \leq 3$, y además $G_n \cap G_m = \varnothing$ si y sólo si $Y_n \cap Y_m = \varnothing$.

El teorema que mostramos a continuación, nos permite pasar de estudiar la hiperbolicidad en una superficie de Riemann S a estudiarla en un grafo G cuya estructura es mucho más simple, siempre y cuando entre ellos exista la relación descrita en la Definición 4.3.5.

Teorema 4.3.6. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional (con o sin borde), con un l-esqueleto G. Si S (respectivamente G) es δ-hiperbólica, entonces G (respectivamente S) es δ'-hiperbólico, con δ' una constante que sólo depende de δ y l.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.2 podemos suponer sin pérdida de generalidad que S no tiene foniles (es decir, que $M = \varnothing$). Veamos ahora que existe una $(1+c, 2M)$-quasi-isometría de S sobre G, con M la constante de la Proposición 4.3.3 y $c := M/(2\operatorname{Arccosh}(\coth(l/2)))$.

Para cada $n \in N$, tenemos $\partial Y_n = \cup_{mi} \gamma_{nm}^i$ (como es habitual, identifcamos una puntura con una geodésica de longitud cero). Tomemos la $(1, M)$-quasi-isometría $f_n : Y_n \longrightarrow G_n$ definida en la demostración de la Proposición 4.3.3. Y definimos $f : S \longrightarrow G$ tal que $f|_{Y_n} := f_n$; veremos ahora que f es una $(1+c, 2M)$-quasi-isometría.

Observemos, antes de nada, que $d_G(f(x), f(y)) \leq d_S(x, y)$ para todo $x, y \in S$.

Probemos ahora la otra desigualdad. Si x e y están en la misma Y_n, aplicamos la Proposición 4.3.3. Si x e y no están en la misma Y_n, consideremos la geodésica g que une $f(x)$ y $f(y)$ en G. Puesto que g interseca como mucho con un número finito de G_n's, los denotaremos por $G_{n_1}, G_{n_2}, \dots, G_{n_r}$, donde $f(x) \in G_{n_1}$, $f(y) \in G_{n_r}$, y g interseca $G_{n_{k+1}}$ después de G_{n_k}. Tomemos ahora una curva continua γ en S uniendo x e y, tal que $f(\gamma) = g$ y $\gamma \cap Y_n$ es una geodésica en Y_n; entonces γ interseca cada curva simple cerrada $\sigma \subseteq \cup_n \partial Y_n$ a lo sumo en un punto, γ sólo interseca las piezas $Y_{n_1}, Y_{n_2}, \dots, Y_{n_r}$, y γ interseca $Y_{n_{k+1}}$ después de Y_{n_k}.

Antes de continuar, recordemos que $d_{G_n}(v_{nm_1}^{i_1}, v_{nm_2}^{i_2}) \geq 2\operatorname{Arccosh}(\coth(l/2))$, por el Lema del Collar. Así pues, si $a \in \gamma_{nm_1}^{i_1}, b \in \gamma_{nm_2}^{i_2}$, obtenemos (usando la Proposición 4.3.3)

$$\begin{aligned} d_{Y_n}(a,b) \leq & d_{G_n}(v_{nm_1}^{i_1}, v_{nm_2}^{i_2}) + M = d_{G_n}(v_{nm_1}^{i_1}, v_{nm_2}^{i_2}) + 2c\operatorname{Arccosh}(\coth(l/2)) \\ \leq & (1+c) d_{G_n}(v_{nm_1}^{i_1}, v_{nm_2}^{i_2}). \end{aligned}$$

Si definimos $x_k := \gamma \cap \partial Y_{n_k} \cap \partial Y_{n_{k+1}}$, para $k = 1, \dots, r-1$, se tiene

$$\begin{aligned} d_S(x,y) &\le L_S(\gamma) = d_{Y_{n_1}}(x, x_1) + \sum_{k=2}^{r-1} d_{Y_{n_k}}(x_{k-1}, x_k) + d_{Y_{n_r}}(x_{r-1}, y) \\ &\le d_{G_{n_1}}(f(x), f(x_1)) + M + (1+c) \sum_{k=2}^{r-1} d_{G_{n_k}}(f(x_{k-1}), f(x_k)) \\ &\quad + d_{G_{n_r}}(f(x_{r-1}), f(y)) + M \\ &\le (1+c) d_G(f(x), f(y)) + 2M. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f : S \longrightarrow G$ es una $(1+c, 2M)$-quasi-isometría, y aplicando el Teorema 1.1.B conseguimos el resultado que queremos. $\square$

A continuación, nuestro propósito es mostrar que la hiperbolicidad es una propiedad que permanece inalterable bajo ciertos cambios métricos significativos (incluso con deformaciones no quasi-isométricas), siempre y cuando preservemos la topología. La siguiente definición describe los parámetros relevantes que están implicados en la clase de deformaciones que aparece en el Teorema 4.3.7.

Definición 4.3.6. Dada una constante positiva l, decimos que dos superficies de Riemann S y S' (con o sin borde) tienen *l-esqueletos similares* si existen descomposiciones $\{Y_n\}_{n\in N} \cup \{F_m\}_{m\in M}$ de S e $\{Y'_n\}_{n\in N} \cup \{F'_m\}_{m\in M'}$ de S', con l-esqueletos asociados G y G' respectivamente, tales que:

(a) $Y_n \cap Y_m = \cup_{i\in I_{nm}} \gamma^i_{nm}$ (con $\gamma^i_{nm} = \gamma^i_{mn}$) e $Y'_n \cap Y'_m = \cup_{i\in I_{nm}} \eta^i_{nm}$ (con $\eta^i_{nm} = \eta^i_{mn}$).

(b) Si definimos $c_1 := \inf\{L_S(\gamma) : \gamma \subseteq (\cup_n \partial Y_n) \setminus \partial S$ y $S \setminus \gamma$ es conexo$\}$ y $c'_1 := \inf\{L_{S'}(\eta) : \eta \subseteq (\cup_n \partial Y'_n) \setminus \partial S'$ y $S' \setminus \eta$ es conexo$\}$, entonces $c_1 = 0$ si y sólo si $c'_1 = 0$.

(c) Si definimos $c_2 := \sup\{L_S(\gamma) : \gamma \subseteq (\cup_m \partial F_m) \cup \partial S$ y $\gamma \subseteq \partial Y_n$ con $S \setminus Y_n$ es conexo$\}$ y $c'_2 := \sup\{L_{S'}(\eta) : \eta \subseteq (\cup_m \partial F'_m) \cup \partial S'$ y $\eta \subseteq \partial Y'_n$ con $S' \setminus Y'_n$ es conexo$\}$, entonces $c_2 = \infty$ si y sólo si $c'_2 = \infty$.

Teorema 4.3.7. *Sean S y S' dos superficies de Riemann no excepcionales (con o sin borde) con l-esqueletos similares. Entonces S es hiperbólica si y sólo si S' es hiperbólica. Además, si S es δ-hiperbólica, entonces S' es δ'-hiperbólica, con δ' una constante que depende únicamente de δ, l, c_j y c'_j $(j = 1, 2)$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.2 podemos suponer sin pérdida de generalidad que S y S' no tienen foniles (es decir, que $M = \varnothing$). Si $c_1 = 0$, entonces existen geodésicas

γ^i_{nm} (que no desconectan la superficie S), con longitudes $l^i_{nm} \to 0$; entonces el Teorema 3.3 en [PRT2] nos dice que S no es hiperbólico (como $c_1' = 0$, también se tiene que S' no es hiperbólica).

Si $c_2 = \infty$, entonces existen Y-piezas generalizadas Y_n (que no desconectan la superficie S), con $l^{i_1}_{nm_1}, l^{i_2}_{nm_2} \le l$ y $d_{Y_n}(\gamma^{i_1}_{nm_1}, \gamma^{i_2}_{nm_2}) \to \infty$; entonces el Teorema 2.2 en [PRT2] garantiza que S no es hiperbólica (como $c_2' = \infty$, también se tiene que S' no es hiperbólica).

Supongamos ahora que $c_1, c_1' > 0$ y $c_2, c_2' < \infty$. Primero, probemos el resultado si $S \setminus \gamma$ y $S' \setminus \eta$ son conexos para toda $\gamma \subseteq \cup_n \partial Y_n$ y $\eta \subseteq \cup_n \partial Y_n'$. Si G y G' son los l-esqueletos de S y S' respectivamente, el Teorema 4.3.6 garantiza que existen dos $(1+c, 2M)$-quasi-isometrías suprayectivas $f : S \longrightarrow G$ y $f' : S' \longrightarrow G'$, donde M y c sólo dependen de l. Por el Teorema 1.1.B, sólo necesitamos probar que si G es δ_0-hiperbólico, entonces G' es δ_0'-hiperbólico, con δ_0' una constante que depende únicamente de δ_0, l, c_j y c_j' (ya que S y S' juegan papeles simétricos).

Decimos que una arista e en un grafo es una *hoja* si un vértice de e tiene grado uno. Vamos a considerar ahora el grafo G_0 (respectivamente G_0') que obtenemos al eliminar de G (respectivamente de G') el conjunto de todas sus hojas. Obsérvese que $\delta(G_0) = \delta(G)$ y $\delta(G_0') = \delta(G')$.

Definamos una función $F : G_0 \longrightarrow G_0'$, de la siguiente forma:

Sea Y_n una Y-pieza generalizada tal que sus tres curvas en ∂Y_n tienen longitud menor o igual que l. Si $f(\gamma^i_{nm}) = v^i_{nm}$ y $f'(\eta^i_{nm}) = w^i_{nm}$, F es una dilatación de $[v_n, v^i_{nm}] \in G_0$ sobre $[w_n, w^i_{nm}] \in G_0'$.

Si Y_n tiene una curva en ∂Y_n con longitud mayor que l, y las otras curvas del borde son $\gamma^{i_1}_{nm_1}, \gamma^{i_2}_{nm_2}$, F es una dilatación de $[v^{i_1}_{nm_1}, v^{i_2}_{nm_2}] \in G_0$ sobre $[w^{i_1}_{nm_1}, w^{i_2}_{nm_2}] \in G_0'$.

Probemos ahora que F es una $(\alpha, 0)$-quasi-isometría biyectiva, donde α es una constante que sólo depende de l, c_j y c_j': Como $c_1, c_1' > 0$ y $c_2, c_2' < \infty$, y no hay hojas ni en G_0 ni en G_0', entonces $c_1 \le l^i_{nm} := L_S(\gamma^i_{nm}) \le \max\{l, c_2\}$ y $c_1' \le L^i_{nm} := L_{S'}(\eta^i_{nm}) \le \max\{l, c_2'\}$, si $v^i_{nm} \in G_0$ (recordemos que $v^i_{nm} \in G_0$ si y sólo si $w^i_{nm} \in G_0'$). Por tanto $L_G([v_n, v^i_{nm}]) = \operatorname{Arccosh}\big(\coth(l^i_{nm}/2)\big)$ y $L_{G'}([w_n, w^i_{nm}]) = \operatorname{Arccosh}\big(\coth(L^i_{nm}/2)\big)$ son comparables con constantes que sólo dependen de l, c_j y c_j' (si toda curva en ∂Y_n tiene longitud menor o igual que l). Conseguimos el mismo resultado para $L_G([v^{i_1}_{nm_1}, v^{i_2}_{nm_2}])$ y $L_{G'}([w^{i_1}_{nm_1}, w^{i_2}_{nm_2}])$ (si Y_n tiene una curva en ∂Y_n con longitud mayor que l).

Vamos a suponer ahora que hay geodésicas γ^i_{nm} tales que $S \setminus \gamma^i_{nm}$ no es conexo (si es así, también tenemos que $S' \setminus \eta^i_{nm}$ no es conexo). En este caso, podemos descomponer $S = \cup_r S_r$

(respectivamente $S' = \cup_r S'_r$), donde $\{S_r\}_r$ son las componentes conexas que obtenemos al dividir S cortando a través de toda geodésica simple cerrada $\gamma \subseteq \cup_n \partial Y_n$ con $S \setminus \gamma$ no conexa; entonces cualquier geodésica simple cerrada $\gamma \subseteq (\cup_n \partial Y_n) \cap S_r$ (respectivamente $\eta \subseteq (\cup_n \partial Y'_n) \cap S'_r$) no desconecta S_r (respectivamente S'_r). Consecuentemente $\{S_r\}_r$ es una $(k_1, k_2, 0)$-descomposición arbórea de S con $A_n = \Lambda$, $k_1 = \frac{l}{2}$ y $k_2 = \frac{l}{4 \operatorname{Arccosh}(\coth(l/2))}$ (ver Definición 4.2.3; para encontar una estimación de $d_{S_r}(\gamma^i_{nm}, \gamma^u_{st})$ podemos utilizar el Lema del Collar, ya que $\gamma^i_{nm}, \gamma^u_{st}$ son geodésicas simples cerradas disjuntas). Similarmente $\{S'_r\}_r$ también es una $(k_1, k_2, 0)$-descomposición arbórea de S'.

Entonces el Teorema 4.2.A nos garantiza que si S es δ-hiperbólica entonces S_r es δ_1-hiperbólica para todo r, con δ_1 dependiendo sólo de δ y l. Ahora, podemos aplicar el último argumento a S_r y S'_r, y por tanto S'_r es δ_2-hiperbólica con δ_2 una constante que sólo depende de δ, l, c_j y c'_j. Finalmente, usamos una vez más el Teorema 4.2.A para asegurar que S' es δ'-hiperbólica, con δ' una constante que depende únicamente de δ, l, c_j y c'_j.

Esto termina la demostración, ya que S y S' juegan papeles simétricos. $\square$

Observación. Tras las demostraciones de los teoremas 4.3.6 y 4.3.7, podemos ver que las conclusiones de estos teoremas siguen siendo ciertas si definimos el l-esqueleto de una Y-pieza de la siguiente manera:

Si $L(\gamma_i) = l_i \leq l$, para $i = 1, 2, 3$, definimos $L([v, v_i]) := \log(1 + l_i^{-1})$ para $i = 1, 2, 3$. Si $l_1, l_2 \leq l$ y $l_3 > l$, tomamos $L([v_1, v_2]) := \log(1 + l_1^{-1}) + \log(1 + l_2^{-1}) + l_3$.

Una consecuencia importante que deducimos del Teorema 4.3.7 es que la hiperbolicidad es una propiedad que permanece estable bajo “twisting” en superficies de Riemann con l-esqueletos (el resultado es falso sin la hipótesis sobre los l-esqueletos).

Observemos que si dos superficies de Riemann no excepcionales tienen el mismo l-esqueleto G, entonces tienen la misma descomposición $\{Y_n\}_{n \in N} \cup \{F_m\}_{m \in M}$, y se obtienen al pegar las piezas siguiendo el mismo diseño de G, tras aplicar un twist a las curvas de $\cup_n \partial Y_n$.

Corolario 4.3.4. *Consideremos dos superficies de Riemann no excepcionales S, S' (con o sin borde), con el mismo l-esqueleto. Si S es δ-hiperbólica, entonces S' es δ'-hiperbólica, con δ' una constante que sólo depende de δ y l.*

§4.4. La hiperbolicidad en la Teoría de Clasificación de superficies de Riemann.

En esta seción vamos a probar que no existen relaciones de inclusión entre superficies de Riemann hiperbólicas y las clases habituales de superficies de Riemann, tales como O_G (superficies sin función de Green), superficies con desigualdad isoperimétrica hiperbólica (ver la definición tras el Teorema 2.3.A), o los complementarios de estas clases (incluso en el caso de dominios planos). Este hecho es importante ya que muestra claramente que las superficies de Riemann hiperbólicas son una clase completamente diferente de las clases más habituales de superficies de Riemann. Esto hace que el estudio de las superficies de Riemann hiperbólicas sea más complicado e interesante.

Tenemos el mismo resultado para las clases O_{HP} (superficies sin funciones armónicas positivas no constantes), O_{HB} (superficies sin funciones armónicas no constantes acotadas), y O_{HD} (superficies sin funciones armónicas no constantes con integral de Dirichlet finita), ya que en el caso de los dominios planos (e incluso para superficies con género finito) tenemos $O_G = O_{HP} = O_{HB} = O_{HD}$ (ver, por ejemplo, [AS, p. 208]).

Denotemos por H la clase de superficies de Riemann hiperbólicas y por HII la clase de superficies de Riemann con desigualdad isoperimétrica hiperbólica. Vamos a mostrar algunos dominios planos que prueban los siguientes hechos:

(a) HII no está contenido en H.
(b) $(HII)^c$ no está contenido en H.
(c) H no está contenido en HII.
(d) H no está contenido en $(HII)^c$.
(e) O_G no está contenido en H.
(f) $(O_G)^c$ no está contenido en H.
(g) H no está contenido en O_G.
(h) H no está contenido en $(O_G)^c$.

Realmente sólo necesitamos probar (a), (d), (e) y (h), ya que $HII \subset (O_G)^c$.

Definición 4.4.1. Podemos definir el *módulo* de un anillo $\{r < |z - z_0| < R\}$ como R/r. Decimos que el anillo $A = \{r < |z - z_0| < R\}$ *separa el borde* de un dominio plano Ω si $A \subseteq \Omega$ y cada componente conexa del complementario de A interseca con $\partial\Omega$. Decimos que un dominio plano Ω es *modulado* si hay una cota superior para el módulo de todo anillo que separa el borde de Ω.

Todo dominio plano modulado pertenece a HII (ver, por ejemplo, [FR1, Teorema 3]). Recordemos que un dominio plano Ω pertenece a O_G si y sólo si $\partial\Omega$ tiene capacidad logarítmica cero (ver, por ejemplo, [AS, p. 249]).

Por tanto, los dominios planos en O_G (y O_{HP}, O_{HB}, O_{HD}) se caracterizan simplemente en términos del tamaño euclídeo de su frontera. Sin embargo, caracterizar los dominios planos hiperbólicos es mucho más complicado.

(a) Existe un dominio plano $\Omega_1 \in HII \cap H^c$.

Para cada número natural n tomemos un número real $a_0 := 0$ (si $n = 0$) y $a_n \in (0, 1/2)$ (si $n > 0$), los conjuntos $E_n := \{|z-2n| = 1/2\}$, $F_n := \{|z-2n| = 1/2+1/(n+2),\ |\operatorname{Im} z| \geq a_n,\ \operatorname{Re} z \leq 2n\}$ y $G_n := \{|z-2n| = 1/2+1/(n+2),\ |\operatorname{Im} z| \geq a_{n+1},\ \operatorname{Re} z \geq 2n\}$. Denotamos por H_n^+ el segmento contenido en $\{\operatorname{Im} z = a_{n+1}\}$ que une el punto $G_n \cap \{\operatorname{Im} z = a_{n+1}\}$ con $F_{n+1} \cap \{\operatorname{Im} z = a_{n+1}\}$; y por H_n^- el conjugado de H_n^+.

Definimos Ω_1 como el único dominio plano cuya frontera es igual a $\cup_n(E_n \cup F_n \cup G_n \cup H_n^+ \cup H_n^-)$. Se tiene entonces que $\Omega_1 \in HII$ ya que es un dominio modulado.

Si denotamos por γ_n la geodésica simple cerrada en Ω_1 líbremente homótopa a E_n, elegimos la sucesión $\{a_n\}_n$ suficientemente pequeña para garantizar que $\gamma_n \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ es una geodésica en Ω_1. Así pues, para cada n, podemos elegir un triángulo geodésico contenido en γ_n con constante thin mayor o igual que $L(\gamma_n)/4$. Puesto que $L(\gamma_n) \longrightarrow \infty$, deducimos que Ω_1 no es hiperbólico.

(d) El disco unidad es un dominio plano contenido en $H \cap HII$.

(e) Existe un dominio plano $\Omega_2 \in O_G \cap H^c$.

Para cada entero positivo n tomemos las Y-piezas generalizadas isométricas $\{Y_n^r\}_{r=1}^{2N_n}$ cuyo borde está formado por dos geodésicas de longitud n y una puntura. Sea Z_n la unión de $\{Y_n^r\}_{r=1}^{2N_n}$ al identificar las geodésicas del borde (unimos Y_n^r con Y_n^{r-1} y Y_n^{r+1}, si $1 < r < 2N_n$); pegamos estas piezas sin "twist", es decir, si α_n^r es la geodésica que une las dos geodésicas del borde de Y_n^r, identificamos un punto de α_n^r con un punto de α_n^{r+1}.

Denotemos por Y_1 la Y-pieza generalizada cuyo borde son dos punturas y una geodésica de longitud 1; para cada entero positivo $n > 1$ consideramos la Y-pieza generalizada Y_n cuyo borde está formado por una puntura y dos geodésicas de longitudes n y $n-1$.

Definimos Ω_2 como la unión de $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ identificando las geodésicas del borde que tienen la misma longitud (unimos Z_n con Y_n y Y_{n+1} sin "twist").

Denotemos ahora por β_n la geodésica $\beta_n := \cup_{n=1}^{2N_n}\alpha_n$ que une las dos geodésicas del borde de Z_n.

Consideremos la geodésica "central" de Z_n, $\gamma_n := Y_n^{N_n} \cap Y_n^{N_n+1}$. La simetría de Z_n garantiza que hay un biángulo geodésico en Ω_2 contenida en γ_n: definimos los vértices como $u_n := \beta_n \cap \gamma_n = \alpha_n^{N_n} \cap \alpha_n^{N_n+1}$ y $v_n \in \gamma_n$ con $d_{\gamma_n}(u_n, v_n) = n/2$. Vamos a tomar N_n suficientemente grande para conseguir $d_{Z_n}(\gamma_n, \partial Z_n) \geq n$; esta desigualdad nos muestra que la mejor constante thin de dicho biángulo es $n/4$. Así pues, Ω_2 no es hiperbólico.

No es difícil ver que Ω_2 está contenido en O_G: Sean σ_n la geodésica simple cerrada que une Y_n con Z_n, Φ_n^r la familia de curvas que unen las dos geodésicas simples cerradas en Y_n^r, y Γ_n la familia de curvas uniendo σ_1 con σ_{n+1} en $\cup_{j=1}^{n-1}(Z_j \cup Y_{j+1})$. Para comprobar que $\Omega_2 \in O_G$, es suficiente ver que $\lim_{n\to\infty} \Lambda(\Gamma_n) = \infty$, por [AS, p. 229], donde $\Lambda(\Gamma_n)$ denota la longitud extremal de Γ_n (ver [AS, pp. 220-223] para la definición y las propiedades de la longitud extremal). Como $\Lambda(\Phi_j^r)$ no depende de r, el segundo teorema en [AS, p. 222] da que $\Lambda(\Gamma_n) \geq \sum_{j=1}^{n-1} 2N_j\Lambda(\Phi_j^r)$. Si elegimos $N_j \geq 1/\Lambda(\Phi_j^r)$, conseguimos que $\lim_{n\to\infty} \Lambda(\Gamma_n) \geq \lim_{n\to\infty}(2n-2) = \infty$, y consecuentemente $\Omega_2 \in O_G$.

(h) El plano menos dos puntos $\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$ es un dominio plano contenido $H \cap O_G$. Este es hiperbólico por la Proposición 4.3.1, ya que es una Y-pieza generalizada con tres punturas $(0, 1$ e $\infty)$, y está en O_G puesto que un número finito de puntos tiene capacidad logarítmica cero.

§5. PROBLEMAS ABIERTOS Y FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACION

En este último capítulo expondremos problemas abiertos y futuras líneas de investigación, que son una continuación natural de los trabajos mostrados en esta tesis.

1. La caracterización de espacios hiperbólicos (e incluso de superficies de Riemann hiperbólicas) continúa siendo un problema abierto. Seguimos estando interesados en encontrar otras condiciones suficientes para que una superficie de Riemann no excepcional sea un espacio hiperbólico de Gromov.

Una vez más, una de las técnicas que vamos a utilizar es la descomposición del espacio en piezas apropiadas en las que el estudio de la hiperbolicidad sea más fácil.

Para ello vamos a seguir dos caminos en el contexto de superficies de Riemann:

1.1. Seguiremos estudiando el papel que juegan las punturas e intentaremos rebajar las hipótesis del Teorema 2.3.3, con el objetivo de simplificar la topología de la superficie y hacer más fácil el estudio de la hiperbolicidad.

1.2. Un importante problema abierto es la caracterización de los dominios de Denjoy (dominios planos cuyo complemento está contenido en la recta real) en términos métricos euclídeos del tamaño de su complemento. Los dominios de Denjoy están resultando cada vez más importantes en Teoría Geométrica de Funciones, debido a los numerosos e importantes resultados obtenidos en ellos (por ejemplo, en el estudio de la desigualdad isoperimétrica).

1.3. Como objetivo más ambicioso, sería interesante estudiar la caracterización de la hiperolicidad del doble de Schotkky de una superficie de Riemann (que incluye como caso particular a los dominios de Denjoy), o incluso de un espacio métrico geodésico.

1.4. Sería deseable encontrar también otro tipo de condiciones necesarias o suficientes para decidir si un espacio es o no hiperbólico, que fueran fácilmente verificables.

2. Como hemos comentado, nos gustaría poder generalizar a dimensión n y curvatura variable negativa el resultado publicado recientemente en Acta Mathematica por Jose Luis Fernández y María Victoria Melián (ver [FM]).

Ellos prueban que, dada una superficie con curvatura constante -1 y área infinita, la dimensión de Hausdorff del conjunto de geodésicas que escapan al infinito es 1.

Vamos a trabajar para conseguir la misma conclusión de dicho teorema, en circunstancias más generales, como son las siguientes:

2.1. Para superficies con curvatura variable pero acotada entre dos constantes negativas.

2.2. Para variedades Riemannianas con curvatura seccional constante negativa.

Finalmente, si tenemos éxito en estos dos problemas, intentaremos la generalización más ambiciosa:

2.3. Para variedades Riemannianas con curvatura seccional variable pero acotada entre dos constantes negativas.

BIBLIOGRAFIA

[A] Ahlfors, L. V., *Conformal invariants.* McGraw-Hill, New York, 1973.

[APR] Alvarez, V., Pestana, D., Rodríguez, J. M., Isoperimetric inequalities in Riemann surfaces of infinite type, *Rev. Mat. Iber.* **15** (1999), 353-427.

[AR] Alvarez, V., Rodríguez, J. M., Structure theorems for Riemann and topological surfaces. Preprint.

[ARY] Alvarez, V., Rodríguez, J. M. and Yakubovich, V. A., Subadditivity of p-harmonic "measure" on graphs, *Michigan Mathematical Journal* **49** (2001), 47-64.

[AS] Ahlfors, L., Sario, L. *Riemann surfaces.* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1960.

[An] Anderson, J. W., *Hyperbolic Geometry.* Springer, London, 1999.

[BB] Balogh, Z. M., Buckley, S. M., Geometric characterizations of Gromov hyperbolicity, To appear in *Invent. Math.*

[B] Beardon, A. F., *The geometry of discrete groups.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[Be] Bers, L., An Inequality for Riemann Surfaces. *Differential Geometry and Complex Analysis.* H. E. Rauch Memorial Volume. Springer-Verlag. 1985.

[Bo] Bonk, M., Quasi-geodesics segments and Gromov hyperbolic spaces, *Geometriae Dedicata* **62** (1996), 281-298.

[BHK] Bonk, M., Heinonen, J., Koskela, P., *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces.* Astérisque No. 270 (2001).

[Bu] Buser, P., *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces.* Birkhäuser, Boston, 1992.

[CFPR] Cantón, A., Fernández, J. L., Pestana, D. and Rodríguez, J. M., On harmonic functions on trees, *Potential Analysis* **15** (2001), 199-244.

[C] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry.* Academic Press, New York, 1984.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

[Ch] Cheeger, J., A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, *Problems in Analysis*, Princeton Univ. Press (1970), 195-199.

[F] Fenchel, W., *Elementary Geometry in Hyperbolic Space.* Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1989.

[FM] Fernández, J. L., Melián, M. V., Escaping geodesics of Riemannian surfaces, *Acta Mathematica* **187** (2001), 213-236.

[FR1] Fernández, J. L., Rodríguez, J. M., The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Series AI* **15** (1990), 165-183.

[FR2] Fernández, J. L. and Rodríguez, J. M., Area growth and Green's function of Riemann surfaces, *Arkiv för matematik* **30** (1992), 83-92.

[GH] Ghys, E. and de la Harpe, P., *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov.* Progress in Mathematics, Volume 83. Birkhäuser. 1990.

[G1] Gromov, M., Hyperbolic groups, *Essays in group theory.* Edited by S. M. Gersten, M. S. R. I. Publ. **8**. Springer, 1987, 75-263.

[G2] Gromov, M. (with appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes), *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannnian Spaces.* Progress in Mathematics, vol. 152. Birkhäuser, 1999.

[HS] Holopainen, I., Soardi, P. M., p-harmonic functions on graphs and manifolds, *Manuscripta Math.* **94** (1997), 95-110.

[JS] Jones, G. A., Singerman, D., *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[K] Kra, I., *Automorphic forms and Kleinian groups.* W. A. Benjamin, 1972.

[Kr] Krantz S. G., *Complex Analysis: the geometric viewpoint.* The Carus Mathematical Monographs. The Mathematical Association of America, 1990.

[K1] Kanai, M., Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), 391-413.

[K2] Kanai, M., Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **38** (1986), 227-238.

[K3] Kanai, M., Analytic inequalities and rough isometries between non-compact Riemannian manifolds. *Curvature and Topology of Riemannian manifolds* (Katata, 1985). Lecture Notes in Math. **1201**. Springer (1986), 122-137.

[N] Nicholls, P. J., *The Ergodic Theory of Discrete Groups.* Lecture Notes Series **143**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[P] Paulin, F., On the critical exponent of a discrete group of hyperbolic isometries, *Diff. Geom. Appl.* **7** (1997), 231-236.

[PRT1] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces II. Acepado en *J. Geom. Anal.*

[PRT2] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., The topology of balls and Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces. Aceptado en *Diff. Geom. Appl.*

[PRT3] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., The role of funnels and punctures in the Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces. Preprint.

[R] Randol, B., Cylinders in Riemann surfaces. *Comment. Math. Helv.* **54** (1979), 1-5.

[Ra] Ratcliffe, J.G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[R1] Rodríguez, J. M., Isoperimetric inequalities and Dirichlet functions of Riemann surfaces, *Publicacions Matemàtiques* **38** (1994), 243-253.

[R2] Rodríguez, J. M., Two remarks on Riemann surfaces, *Publicacions Matemàtiques* **38** (1994), 463-477.

[RT1] Rodríguez, J. M., Tourís, E., Gromov hiperbolicity through decomposition of metric spaces. *Acta Mathematica Hungarica* **103** (2004), 53-84.

[RT2] Rodríguez, J. M., Tourís, E., Simple closed geodesics determine the Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces. Preprint.

[RT3] Rodríguez, J. M., Tourís, E., Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces. Preprint.

[S] Shimizu, H., On discontinuous groups operating on the product of upper half-planes, *Ann. of Math.* **77** (1963), 33-71.

[So] Soardi, P. M., Rough isometries and Dirichlet finite harmonic functions on graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **119** (1993), 1239-1248.