Pablo González Vera

Leyla Daruis Luis

Ortogonalidad y cuadratura sobre la circunferencia unidad

XVIII Escuela Venezolana de Matemáticas 2005
Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela

XVIII Escuela Venezolana de Matemáticas 2005
Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela

Ortogonalidad y cuadratura sobre la circunferencia unidad

Pablo González Vera- Leyla Daruis Luis

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
Avda. Astrofísico Francisco Sánchez s/n, 38071
La Laguna, Tenerife España.

Clasificación según A.M.S.
Primaria: 42Cxx, 41A2x;
Secundaria: 26Cxx, 33Cxx.

A Rosa, Laura y Jorge

A mis padres

Índice general

Prólogo

Sin duda alguna, el creciente desarrollo de la Teoría sobre Polinomios Ortogonales en el eje real ha encontrado en la construcción de las bien conocidas "Formulas de Cuadratura Gaussianas" una de sus más inmediatas aplicaciones, existiendo al respecto una vasta literatura, con aportaciones que datan de la 2$^{\underline{a}}$ mitad del siglo XIX y que se ha visto enormemente aumentada en las últimas décadas del siglo XX y comienzos del XXI. Al propio tiempo, el desarrollo de una teoría paralela sobre polinomios ortogonales en la circunferencia unidad, impulsada en la década de los sesentas por los decisivos trabajos de Szegő y retomada en los últimos tiempos por las múltiples aplicaciones de tales polinomios ortogonales en campos tan variados como el procesamiento de señales digitales, la teoría de operadores ó el cálculo de probabilidades, han convertido la misma en un importante campo de investigación matemática. Con todo, cabe señalar que el desarrollo de fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad, y que denominaremos "Fórmulas de Cuadratura de Szegő", como contrapartida análoga a las fórmulas Gaussianas, no ha recibido toda la atención que cabría esperar, de forma que las aportaciones realizadas en este campo, y que se restringen en la mayoría de los casos a publicaciones de los últimos diez años, en modo alguno es comparable a la amplísima bibliografía existente sobre fórmulas Gaussianas. Tal carencia es justamente el objetivo principal de estas notas con las que esperamos brindar una guía a los estudiantes que se matriculen en el curso de igual nombre a impartir en la "XVIII Escuela Venezolana de Matemáticas 2005". Ahora bien, queremos hacer constar que existen muchos aspectos sobre las fórmulas de Szegő que quedan fuera del texto, especialmente aquellos orientados a la computación efectiva de las mismas y la obtención de cotas computables del error, entre otros. En este sentido, queremos reconocer que el contenido del curso estás sesgado, primero por nuestros propios gustos personales y segundo por la investigación llevada a cabo por los autores en este campo en los últimos años, estando parte de la misma reflejada en las presentes notas. La lectura de las mismas requiere como base conocimientos preliminares de Análisis Complejo así como algunas nociones de Análisis Numérico (interpolación y aproximación de funciones). El texto elaborado pretende ser autocontenido, si bien en algunos casos se enuncian resultados cuya demostración se propone como ejercicio, pues entendemos que la misma no requiere ni conocimientos ni técnicas excesivamente elevados. También incluimos algunos teoremas cuyas demostraciones entendemos que escapan a los límites del curso, por lo que remitimos a alguna referencia incluida en la bibliografía. Por otro lado, hemos de reconocer que en la preparación del texto, nos hemos visto obligados a tener que actuar con cierta premura, por los múltiples compromisos docentes e investigadores a los que hemos tenido que enfrentarnos en los últimos meses. Ciertamente esto no ha sido culpa de la Organización del evento por lo que pedimos a los lectores un cierto grado de comprensión y que sepan disculpar los fallos que sin duda van a encontrar y de los cuales somos los autores los únicos responsables. Queremos agradecer a nuestro alumno de doctorado, D. Ruymán Cruz Barroso, su inestimable ayuda y su desinteresada colaboración en la preparación de estas notas que ha permitido que la edición final de las mismas no llegara a sobrepasar límites temporales insalvables. Al propio tiempo, queremos manifestar nuestro profundo agradecimiento a los organizadores de la Escuela por habernos invitado a tomar parte de la misma. Por último, también queremos pedirles disculpas por las posibles molestias que el retraso en la elaboración del texto pudiera haber ocasionado.

Los Autores

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sobre el significado de la integración numérica

El contenido del presente curso queda enmarcado dentro de la parte del Análisis Numérico denominada "Integración Numérica", entendiendo por tal el conjunto de reglas y procedimientos que permiten evaluar una integral dada de forma aproximada con cierto grado de precisión. Sin duda alguna, podemos decir que el cálculo de una integral definida resulta un problema sumamente familiar, no sólo para cualquier matemático, sino para cualquier estudiante de un primer curso de Ciencias o Ingeniería.

Por otro lado, también es sabido que los orígenes de tal problema se remontan a los de las propias matemáticas, pues el mismo está conceptualmente ligado al cálculo de un área plana, estando tal cuestión ya presente entre egipcios y griegos (piénsese en el método de "exhaución" ideado por Arquímides en la resolución del problema de la cuadratura del círculo, que le permitió establecer cotas superiores e inferiores para el número π). Con todo, es a partir del siglo XVI cuando la Integración Numérica desarrolla, junto a la propia evolución del Cálculo integral, una gran abundancia de métodos. Estos incluyen, junto a la bien conocida "Regla de Barrow" (Teorema Fundamental del Cálculo Integral), métodos de cálculo involucrando series infinitas, relaciones funcionales, ecuaciones diferenciales o transformadas de integrales. Junto a otros, tenemos los llamados métodos de integración aproximada basados en las fórmulas de cuadratura, objeto principal del curso y donde básicamente, una integral se aproxima por una combinación de valores del integrando. A saber:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + \ldots A_n f(x_n) = I_n(f). \tag{1.1}$$

En la fórmula anterior, $x_1, \ldots, x_n$ representan las "abscisas" o "nodos" de la fórmula de cuadratura $I_n(f)$, y $A_1, \ldots, A_n$ sus correspondientes "coeficientes" o "pesos". Así, para cada natural fijo n, se dispone de $2n$ parámetros libres que habrán de "seleccionarse" de forma apropiada de modo que $I_n(f)$ nos proporcione una estimación razonable de $I(f)$. Por ejemplo, siempre que $-\infty < a < b < +\infty$, tomando $n > 1$, definiendo $h = \frac{b-a}{n-1}$ y considerando los nodos igualmente espaciados $x_j = a + (j-1)h, \ j = 1, \ldots, n$, surge, a partir de consideraciones geométricas elementales, la bien conocida "Regla Trapezoidal", donde $A_1 = A_n = \frac{h}{2}$ y $A_j = h, \ j = 2, \ldots, n-1$.

Ahora bien, cuando el integrando presenta singularidades próximas al intervalo de integración, la evaluación de $f(x)$ en nodos cercanos a los extremos de dicho intervalo pudiera resultar problemática. Por tal motivo, resulta más conveniente reescribir la integral (1.1) en la forma (siempre que fuese posible)

$$I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx, \tag{1.2}$$

donde se supone que f es lo suficientemente suave sobre $[a, b]$, concentrándose las posibles singularidades en $\omega(x)$ (función peso), la cual, mientras no se indique lo contrario, se supondrá no negativa en el intervalo de integración. Escribiendo

$$I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j) = I_n(f), \tag{1.3}$$

vemos que los coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ dependen, en general, del peso $\omega(x)$ (y de los nodos $x_1, \ldots, x_n$), el cual supondremos fijo, pudiendo variar $f(x)$.

Antes de proseguir, creemos obligado reflexionar sobre el siguiente aspecto: Con la enorme abundancia de métodos existentes (algunos altamente sofisticados) para calcular integrales, ¿vale la pena realmente profundizar en el estudio, aplicabilidad y rentabilidad de las fórmulas (1.3)? La respuesta es muy sencilla: Los procedimientos matemáticos extremadamente refinados no siempre funcionan y aún haciéndolo pudieran no resultar ventajosos desde un punto de vista computacional. Así, consideremos por un momento el Teorema fundamental del cálculo integral. Con este método, se sigue:

$$I_\omega(f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{1.4}$$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Por tanto, siempre que podamos disponer de $F(x)$, el cálculo de una integral definida a través de (1.4), no parece revertir dificultad alguna. Sin embargo, todos sabemos que el cálculo de primitivas conduce, a menudo, a nuevas funciones trascendentes. Así, $\int \frac{1}{x}$ lleva a la función logaritmo, la cual no es una función algebraica, mientras que $\int e^{-x^2}dx$, conduce a una función la cual no puede representarse mediante un número finito de operaciones exponenciales, logarítmicas o algebraicas. Incluso, aún cuando una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ resulte una función elemental que puede obtenerse manualmente sin demasiado esfuerzo, su expresión final podría resultar lo suficientemente complicada para que nos detengamos antes de aplicar (1.4). Tómese como ejemplo, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, de modo que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\arctan \frac{x}{\sqrt{2}-x} + \arctan \frac{x}{\sqrt{2}+x} \right). \end{aligned}$$

Así, el número de computaciones que debemos realizar con esta fórmula "exacta" es sustancial, debiendo calcularse logaritmos y arcotangentes, lo cual sólo puede hacerse hasta cierto grado de aproximación. Vemos pues, que un método aparentemente "exacto" en la superficie se convierte en "aproximado" cuando descendemos a las profundidades de los procesos numéricos efectivos. Ahora bien, ante la abundancia de métodos existentes para computar (1.2), ¿son las fórmulas de cuadratura, siempre las más apropiadas? Como suele ocurrir en matemáticas, es difícil que podamos dar una respuesta categórica, ni afirmativa ni negativa. Para ilustrar este fenómeno, consideremos la siguiente integral que surge en la teoría de la radiación:

$$\int_{-1}^{1} \frac{u^3}{(1-u^2)^{1/2}} \mathrm{sen}(au)du = H(a).$$

Inicialmente, la presencia del factor $\omega(u) = \frac{1}{(1-u^2)^{1/2}}$ (función peso de Chebyshev de 1$^{\underline{a}}$ especie), aconseja escribir

$$H(a) = \int_{-1}^{1} f(u)\omega(u)du,$$

y aplicar las fórmulas de cuadratura de Gauss- Chebyshev de 1$^{\underline{a}}$ especie, las cuales estudiaremos en este capítulo.

Por otro lado, hagamos la transformación $u = \mathrm{sen}t$, de modo que

$$H(a) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{sen}^3 t \mathrm{sen}(a\mathrm{sen}t)dt = 2\int_{0}^{\pi/2} \mathrm{sen}^3 t \mathrm{sen}(a\mathrm{sen}t)dt.$$

Si ahora utilizamos la fórmula elemental $4\mathrm{sen}^3 t = 3\mathrm{sen}t - \mathrm{sen}3t$ y la conocida representación integral para la función de Bessel, a saber:

$$J_{2n+1}(a) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \mathrm{sen}(a\mathrm{sen}t)\mathrm{sen}(2n+1)tdt,$$

resulta:

$$H(a) = \frac{\pi}{4}\left(3J_1(a) - J_3(a)\right). \tag{1.5}$$

Por su importancia y aplicación en gran cantidad de problemas físicos, la función de Bessel ha sido ampliamente estudiada y tabulada de modo que $H(a)$ se puede computar a través de (1.5) de forma directa sin que tengamos que acudir a una fórmula de cuadratura. Tal y como se aconseja en [14], conviene seguir una serie de recomendaciones previas cuando nos encaremos con una integral definida y debamos decidir qué método pudiera ser a priori el más apropiado para su computación. Los pasos a seguir podrían resumirse en

1. Confirmar la existencia de la integral.

2. Asegurar el rango de variación de los parámetros que aparecen en la integral.

3. Reducir la integral a su forma más simple.
4. Entre los parámetros que aparecen en la integral, determinar cuáles son los esenciales.
5. Determinar a priori la precisión de los valores numéricos que vamos a obtener.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, a lo largo del texto nos vamos a ocupar del análisis y estudio de fórmulas de cuadratura del tipo (1.3) para el caso que $f(x)$ sea una función periódica de periodo 2π y $\omega(x)$ una función peso, es decir, nos vamos a ocupar de integrales de la forma

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\omega(x)dx,$$

con f una función periódica. Tales integrales surgen de un modo natural, por ejemplo, con la solución de ciertos problemas de frontera sobre la circunferencia unidad. A tal efecto, se hace preciso dar previamente un recuento de las propiedades generales sobre fórmulas de cuadratura para integrandos, en general, no periódicos con respecto a una función peso $\omega(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ del eje real.

1.2. Generalidades sobre fórmulas de cuadratura en el eje real

A lo largo de este Capítulo nos vamos a ocupar del cálculo aproximado de integrales de la forma:

$$I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx, \ -\infty \leq a < b \leq +\infty, \tag{1.6}$$

donde supondremos que $\omega(x)$ es una función peso, esto es, $\omega(x) \geq 0$ en $[a, b]$, $\int_c^d \omega(x)dx > 0$ en cualquier intervalo $[c, d] \subset [a, b]$ y de modo que $f\omega$ sea integrable en $[a, b]$ en sentido propio o impropio. Como ya se ha apuntado en la sección anterior, proponemos como estimación para $I_\omega(f)$ una expresión del tipo:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j), \ x_i \neq x_j, \ \forall i \neq j, \tag{1.7}$$

que denominaremos una "fórmula de cuadratura" con nodos $\{x_j\}_{j=1}^n$ y coeficientes o pesos $\{A_j\}_{j=1}^n$. De inmediato surge la siguiente cuestión: ¿Cómo se han de elegir los nodos y pesos en (1.7) de modo que $I_n(f)$ represente una aproximación "razonable" para $I_\omega(f)$?

Una vez que para cada natural n se ha fijado la correspondiente fórmula de cuadratura, tenemos la siguientes preguntas:

1. ¿Se pueden dar cotas computables del error:
$$|R_n(f)| = |I_\omega(f) - I_n(f)|?$$

2. ¿Se puede establecer a priori la precisión numérica de la estimación dada por $I_n(f)$?

3. ¿Se puede asegurar que $\lim_{n\to\infty} R_n(f) = 0$? En caso de una respuesta afirmativa, ¿en qué clase de funciones?

4. ¿Con qué velocidad tiende $I_n(f)$ a $I_\omega(f)$ cuando $n \to \infty$?

La última cuestión implica el estudio del límite:

$$\limsup_{n\to\infty} |I_\omega(f) - I_n(f)|^{1/n} = \lambda.$$

(El parámetro $V = \frac{1}{\lambda}$ se denomina velocidad de convergencia de la sucesión $I_n(f)$).

El dar respuesta a algunos de los interrogantes planteados anteriormente será el objetivo del presente capítulo. Conviene, sin embargo, primero dar una sencilla interpretación de la fórmula $I_n(f)$ dada por (1.7), como aproximación a $I_\omega(f)$ en (1.6). A tal efecto, hagamos

$$p = \int_a^b \omega(x)dx > 0,$$

de modo que podemos escribir:

$$p^{-1}\int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{j=1}^n B_j f(x_j),\ B_j = \frac{A_j}{p},\ j = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Aquí los coeficientes $\{B_j\}_{j=1}^n$ son números abstractos que pueden ser interpretados como "pesos" (de ahí su nombre) pertenecientes a los correspondientes valores $f(x_j)$. En efecto, si exigimos que $I_n(f)$ produzca el valor exacto de $I_\omega(f)$ cuando f es una función constante, entonces los coeficientes $\{B_j\}_{j=1}^n$ deben satisfacer: $\sum_{j=1}^n B_j = 1$, de modo que la suma $\sum_{j=1}^n B_j f(x_j)$ tendrá el significado de un "promedio" de los valores $f(x_j)$. El problema de construcción de (1.8) se reduce a encontrar nodos $\{x_j\}_{j=1}^n$ y pesos $\{B_j\}_{j=1}^n$ de modo que el "valor medio ponderado" dé los valores de $f(x_j)$ con pesos B_j nos de una aproximación del valor medio de la integral respecto a $\omega(x)$ en el segmento $[a, b]$: $p^{-1} \int_a^b f(x)\omega(x)dx$.

En lo que sigue, n será un entero positivo arbitrario pero fijo, de modo que parece natural tratar de alcanzar la necesaria precisión en el cálculo de $I_\omega(f)$ a través de $I_n(f)$ con un número de nodos n lo más pequeño posible. Fijado n, veamos cuál ha sido uno de los principios más usados en la determinación de los nodos y pesos de $I_n(f)$. Supongamos que $f \in \mathcal{F}$, siendo $\mathcal{F}$ una cierta clase de funciones, y sea $\{u_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathcal{F}$ tal que fu_k es integrable y donde las integrales

$$\int_a^b u_k(x)\omega(x)dx,$$

son "fácilmente computables" para cualquier $k \geq 0$.

Supongamos que el sistema $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ es completo (el subespacio generado es denso) en la clase $\mathcal{F}$ respecto a la norma L_1 (pesada con $\omega(x)$), esto es, introduciendo la notación $\rho(f, g) = \int_a^b (f(x) - g(x))\omega(x)dx$, con $f, g \in \mathcal{F}$; dada $f \in \mathcal{F}$ y $\epsilon > 0$, $\exists\ s_N(x) = \sum_{k=0}^N \alpha_k u_k(x)$ tal que $\rho(f, s_N) < \epsilon$.

Así pues,

$$|I_\omega(f) - I_\omega(s_N)| \leq \int_a^b |f(x) - s_N(x)|\omega(x)dx = \rho(f, s_N) < \epsilon.$$

Puesto que la integral $I_\omega(s_N) = \int_a^b s_N(x)\omega(x)dx$ se puede calcular fácilmente, $I_\omega(f)$ se podrá estimar (al menos teóricamente) con precisión tan alta como queramos. Desde luego las consideraciones anteriores llevan a un análisis totalmente "heurístico" y sirven como simple motivación para la construcción de las fórmulas de cuadratura. Como veremos a lo largo del capítulo, el error en las fórmulas construidas debe estar sujeto posteriormente al correspondiente y rigurosos análisis y estimación. Con todo, será útil indicar un sencillo principio para la elección de los nodos y pesos: Se intentará determinarlos de modo que $I_n(f)$ "integre exactamente" $I_\omega(f)$ para $f = u_k$ $k = 0, 1, \ldots, N$, con $N = N(n)$ lo más grande posible. Así, decimos que $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ tiene grado de precisión m con respecto a las funciones $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, si es exacta para $u_0, \ldots, u_m$, esto es:

$$\int_a^b u_j(x)\omega(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k u_j(x_k),\ j = 0, \ldots, m$$

y no lo es para $u_{m+1} : \int_a^b u_{m+1}(x)\omega(x)dx \neq \sum_{k=1}^{n} A_k u_{m+1}(x_k)$.

Así pues, fijada la clase $\mathcal{F}$ vemos que la contrucción de $I_n(f)$ depende de la familia $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$. (Téngase en cuenta que, en general, el requisito de "completitud" no la caracteriza del todo). A nuestros efectos, $\mathcal{C}[a, b]$ será la clase de funciones continuas en $[a, b]$, esto es, $\mathcal{F} = \mathcal{C}[a, b]$, y manejaremos, fundamentalmente, dos sistemas $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ "completos". A saber, por un lado, en este Capítulo 1, tomaremos $u_k(x) = x^k,\ k = 0, 1, \ldots,$ mientras que, por otro lado, en los capítulos restantes, al estar tratando con funciones periódicas, se elegirá $u_{2k}(\theta) = \cos k\theta$ y $u_{2k+1}(\theta) = \mathrm{sen} k\theta,\ k = 0, 1, \ldots,$ siendo $[a, b]$ cualquier intervalo de longitud 2π. En ambos casos, la "completitud" del sistema quedará garantizada por el teorema de aproximación de Weierestrass que comentaremos al final del capítulo. (En el caso en el que $[a, b]$ no sea finito, habrá que añadir algunas condiciones extras a la sucesión $c_k = \int_a^b x^k \omega(x)dx,\ k = 0, 1, \ldots$).

Conviene ahora fijar la siguiente notación: En lo que sigue, Π_k (k entero no negativo), denotará el espacio de los polinomios de grado k, mientras que Π designa el espacio de todos los polinomios. Además, diremos que una fórmula de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ para $I_\omega(f)$ tiene grado de precisión algebraica m, sí y sólo si,

$$I_n(P) = I_\omega(P),\ \forall P \in \Pi_m,$$

y existe $Q \in \Pi_{m+1}$ tal que $I_n(Q) \neq I_\omega(Q)$.

Nuestro objetivo será construir fórmulas con el mayor grado de precisión algebraica posible. Para ello, conviene tener presente el siguiente

Lema 1.1 *Sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ una fórmula de cuadratura arbitraria. Entonces, su grado de precisión algebraica no puede ser $2n$.*

Demostración: Hágase $Q(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$, de modo que $Q^2 \in \Pi_{2n}$. Entonces, claramente $I_n(Q^2) = 0$, mientras que $I_\omega(Q^2) > 0$. □

Así pues, vemos que para una fórmula de cuadratura con n nodos, el máximo grado de precisión algebraico alcanzable es $2n-1$. La pregunta es: ¿Existirán tales fórmulas? En caso afirmativo, ¿cómo vienen caracterizadas? ¿Serán únicas? En el resto de la sección, nos ocuparemos de desvelar tales interrogantes mostrando cómo el elemento clave en tal desarrollo, es la teoría de los polinomios ortogonales. Comenzaremos con el siguiente:

TEOREMA 1.1 *Dados n nodos distintos en $[a,b]$, existen pesos $A_1,\ldots,A_n$, unívocamente determinados tales que:*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j),$$

tiene grado de precisión algebraica, al menos $n-1$.

Demostración: Hemos de ver que $I_n(P) = I_\omega(P),\ \forall P \in \Pi_{n-1}$, ó equivalentemente:

$$I_\omega(x^k) = I_n(x^k),\ k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{1.9}$$

Si llamamos $c_k = \int_a^b x^k \omega(x)dx$, entonces (1.9) da lugar a:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j^k = c_k,\ k = 0,1,\ldots,n-1,$$

que representa un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas $A_1,\ldots,A_n$, con solución única, pues el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo: (Determinante de Vandermonde, véase [13])

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow x_i \neq x_j,\ \text{sí } i \neq j.$$

$\square$

Vemos pues que, partiendo de n nodos distintos y arbitrarios, se puede construir (determinando los pesos $A_1, \ldots, A_n$) una fórmula de cuadratura con grado de precisión algebraica, al menos $n-1$. Esto nos lleva a tener que resolver un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas. Alternativamente, podríamos proceder como sigue: Sea $P_n \in \Pi_{n-1}$, el único polinomio que interpola a f en los nodos $x_1, \ldots, x_n$, es decir:

$$P_n(x_j) = f(x_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

Si ahora utilizamos la fórmula de interpolación de Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x) f(x_j),$$

con $L_j \in \Pi_{n-1}$ tal que: $L_j(x_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad j = k, \\ 0, & \text{si} \quad j \neq k, \end{cases}$, podemos escribir:

$$I_\omega(P_n) = \int_a^b P_n(x)\omega(x)dx = \sum_{j=1}^{n} I_\omega(L_j) f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} B_j f(x_j) = \widetilde{I}_n(f),$$

con $B_j = I_\omega(L_j),\ j = 1, \ldots, n$. La fórmula de cuadratura así construida diremos que es de "tipo interpolatorio", siendo fácil probar el siguiente:

Teorema 1.2 *Dados n nodos distintos* $x_1, \ldots, x_n$, $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$, *es de tipo interpolatorio, sí y sólo si, su grado de precisión es* $n-1$ *al menos.*

Además, utilizando la expresión del error para el polinomio de interpolación $P_n(x)$, esto es, si $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$, entonces

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} Q_n(x),\ \xi(x) \in [a,b],$$

y $Q_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$ (polinomio nodal), deducimos la siguiente estimación del error para $I_n(f)$:

Teorema 1.3 *En las condiciones anteriores, hagamos* $R_n(f) = I_\omega(f) - I_n(f)$ *y supongamos que* $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M_n,\ \forall x \in [a,b]$, *entonces:*

$$|E_n(f)| \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b |Q_n(x)|\, \omega(x)dx.$$

En definitiva, partiendo de n nodos distintos y arbitrarios en $[a, b]$, podemos determinar una fórmula de cuadratura con grado de precisión algebraica $n-1$. La pregunta ahora será: ¿Cómo seleccionar tales nodos de modo que podamos incrementar el grado de precisión? Antes de responder a tal cuestión, veamos que sería deseable imponer cierto requisito adicional sobre los pesos $\{A_j\}_{j=1}^{n}$. En efecto, supongamos que $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$, es una fórmula de cuadratura para $I_\omega(f)$ que integra exactamente, al menos la función constante (grado de precisión es mayor o igual que cero), por tanto:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = \int_a^b \omega(x)dx > 0. \tag{1.10}$$

Supongamos que los valores de $f(x_j),\ j = 1, \ldots, n$ se computan con un cierto error, esto es, $f(x_j) = \widetilde{f}(x_j) + \epsilon_j,\ j = 1, \ldots, n$, con $|\epsilon_j| < \epsilon$, y que los pesos $A_j,\ j = 1, \ldots, n$ se computan exactamente. Así pues, en lugar de $I_n(f)$ tendremos el valor computado:

$$\widetilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j \widetilde{f}(x_j),$$

cometiéndose el siguiente error:

$$\left| I_\omega(f) - \widetilde{I}_n(f) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} A_j \left(f(x_j) - \widetilde{f}(x_j) \right) \right| \leq \epsilon \sum_{j=1}^{n} |A_j|. \tag{1.11}$$

La relación (1.11) da lugar a la siguiente

Definición 1.1 *Consideremos la sucesión de fórmulas de cuadratura:*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} f(x_{j,n}),\ n = 1, 2, \ldots.$$

Entonces, se dirá que es estable, sí y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\sum_{j=1}^{n} |A_{j,n}| \leq M,\ n = 1, 2, \ldots.$

Obviamente, la estabilidad significa que los errores de redondeo cometidos en la computación de $I_n(f)$ permanecen acotados $\forall n \geq 1$. Por otro lado, la condición (1.1) implica que una sucesión de fórmulas de cuadratura con coeficientes positivos es estable. Así pues, ya tenemos los dos requisitos que le vamos a imponer a una fórmula de cuadratura $I_n(f)$, a saber:

1. Que tenga el mayor grado de presición algebraica posible.

2. Que tenga coeficientes positivos.

Veremos en la sección 1.4 que ambas exigencias se dan en las llamadas fórmulas de cuadratura de Gauss o de Gauss- Christoffel (también llamadas "Gaussianas"). Ahora finalizaremos esta sección mostrando el papel que juegan los polinomios ortogonales en el desarrollo de tales fórmulas y cuyas propiedades básicas se verán en la sección siguiente. Así pues, nos planteamos el siguiente problema: Dados n y k enteros, siendo $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n-1$, ver si existen nodos distintos $x_1, \ldots, x_n$ en $[a, b]$ y pesos $A_1, \ldots, A_n$ de modo que la fórmula de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ verifique $I_n(P) = I_\omega(P),\ \forall P \in \Pi_{n+k}$, lo cual da lugar al siguiente sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j^r = c_r = \int_a^b x^r \omega(x) dx,\ r = 0, 1, \ldots, n+k, \tag{1.12}$$

en general no lineal, con $n+k+1$ ecuaciones y $2n$ incógnitas. Obsérvese que una vez determinados los nodos $x_1, \ldots, x_n$, los pesos se pueden obtener linealmente de las primeras n ecuaciones de (1.12), haciendo $r = 0, \ldots, n-1$. Ahora, en lugar de hallar directamente los nodos $x_1, \ldots, x_n$, caracterizamos el polinomio de grado n que los contiene como ceros. A tal efecto introducimos:

$$Q_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^j,\ \alpha_n = 1.$$

Por consiguiente, de las n primeras ecuaciones en (1.12), resultará:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 c_0 = A_1 \alpha_0 + A_2 \alpha_0 + \ldots + A_n \alpha_0 \\
&\alpha_1 c_1 = A_1 \alpha_1 x_1 + A_2 \alpha_1 x_2 + \ldots + A_n \alpha_1 x_n \\
&\alpha_2 c_2 = A_1 \alpha_2 x_1^2 + A_1 \alpha_2 x_2^2 + \ldots + A_n \alpha_2 x_n^2 \\
&\ldots \\
&\alpha_n c_n = A_1 \alpha_n x_1^n + A_1 \alpha_n x_2^n + \ldots + A_n \alpha_n x_n^n,
\end{aligned}$$

sumando las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j = \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_j^k \right) = \sum_{i=1}^{n} A_i Q_n(x_i) = 0.$$

Por tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_a^b x^j \omega(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^j \right) \omega(x) dx \\ &= \textstyle\int_a^b Q_n(x) \omega(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Si procedemos de modo análogo, en el sistema (1.12), tomando la ecuaciones que van desde $r = 2$ a $r = n + 1$, desde $r = 2$ a $r = n + 2$, así sucesivamente hasta llegar al sistema que va desde $r = k$ hasta $r = n + k$, concluimos que el polinomio nodal satisface las relaciones

$$\int_a^b x^r Q_n(x) \omega(x) dx = 0, \ r = 0, 1, \ldots, k, \tag{1.13}$$

dando lugar al sistema lineal de $k+1$ ecuaciones con n incógnitas ($k+1 \leq n$), $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ($\alpha_n = 1$):

$$\begin{aligned} &c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_k\alpha_k + \ldots + c_{n-1}\alpha_{n-1} = -c_n \\ &c_1\alpha_0 + c_2\alpha_1 + \ldots + c_{k+1}\alpha_k + \ldots + c_n\alpha_{n-1} = -c_{n+1} \\ &\ldots \\ &c_k\alpha_0 + c_{k+1}\alpha_1 + \ldots + c_{2k}\alpha_k + \ldots + c_{n+k-1}\alpha_{n-1} = -c_{n+k} \end{aligned}$$

Tal sistema es compatible (indeterminado) ya que el determinante de la matriz formada por las $k + 1$ primeras columnas viene dado por:

$$D = det\,(c_{i+j}) = det \left(\int_a^b x^{i+j} \omega(x) dx \right),$$

el cual es el determinante de Gram de las funciones $1, x, \ldots, x^k$, y teniendo en cuenta que estas funciones son linealmente independientes, se sigue que $D \neq 0$. (Véase, Davis [13]).

Recíprocamente, sea $Q_n(x)$ un polinomio de grado n que verifica las condiciones (1.13) y supongamos que sus n raíces $x_1, \ldots, x_n$ son reales, distintas y contenidas en el dominio de la función $f(x)$. Por consiguiente, podemos construir una fórmula de cuadratura con nodos los ceros de $Q_n(x)$ y grado de precisión $n-1$ al menos. Sea dicha fórmula:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) = I_\omega(f),\ \forall f \in \Pi_{n-1}.$$

Tomemos $P \in \Pi_{n+k}$. Entonces: $P(x) = q(x)Q_n(x) + r(x)$, con $q \in \Pi_k$ y $r \in \Pi_{n-1}$. Dado que $Q_n(x_j) = 0,\ j = 1, \ldots, n$, se tiene que:

$$P(x_j) = r(x_j),\ j = 1, \ldots, n,$$

y por consiguiente, teniendo en cuenta que $r \in \Pi_{n-1}$, la exactitud de $I_n(f)$ y la condición (1.13), se sigue que:

$$\begin{aligned} I_\omega(f) &= \int_a^b P(x)\omega(x)dx = \int_a^b q(x)Q_n(x)(x)\omega(x)dx + \int_a^b r(x)\omega(x)dx \\ &= \sum_{j=1}^n A_j r(x_j) = \sum_{j=1}^n A_j P(x_j) = I_n(P). \end{aligned}$$

Así pues, $I_n(f)$ tiene grado de precisión algebraica al menos $n+k$. En definitiva, hemos probado el siguiente

Teorema 1.4 *Una fórmula de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$ para la integral $I_\omega(f)$ tiene grado de precisión algebraica $n+k$, siendo k entero tal que $0 \leq k \leq n-1$, sí y sólo si,*

1. *$I_n(f)$ es de tipo interpolatorio.*
2. *El polinomio nodal $Q_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$, verifica:*

$$\int_a^b x^r Q_n(x)(x)\omega(x)dx = 0,\ r = 0, 1, \ldots, k.$$

Como ya se ha indicado, en la Sección 1.4, nos ocuparemos del caso "óptimo" $k = n-1$ que da lugar a las llamadas "fórmulas Gaussianas", mientras que finalizaremos la presente sección con algunos resultados que relacionan el grado de precisión algebraico de una fórmula de cuadratura con el número de coeficientes o pesos positivos de la misma.

En primer lugar, se tiene:

Proposición 1.2.1 *Una fórmula de cuadratura con n nodos del tipo $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$, con grado de precisión algebraico al menos $2n-2$, tiene todos sus coeficientes positivos.*

Demostración: Tómese $l_j(x) \in \Pi_{n-1}$ definido mediante: $l_j(x_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad j = k, \\ 0, & \text{si} \quad j \neq k, \end{cases}$. Entonces, $l_j^2 \in \Pi_{2n-2}$ y tenemos:

$$0 < \int_a^b l_j^2(x)(x)\omega(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k l_j^2(x_k) = A_j, \ j = 1, \ldots, n.$$

□

Proposición 1.2.2 *Sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ una fórmula de cuadratura con grado de precisión algebraica: G.P.A.$\geq m$ con $m < 2n$. Entonces, el número de coeficientes positivos en $I_n(f)$ es $\geq \left[\frac{m}{2}\right] + 1$, donde $[x]$ denota la parte entera de $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que sea l el número de coeficientes positivos en $I_n(f)$ con $0 \leq l \leq \left[\frac{m}{2}\right]$. Denotemos por $A_{i_1}, \ldots, A_{i_l}$ tales pesos positivos y por $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ los correspondientes nodos. Definamos

$$q(x) = \prod_{p=1}^{l} (x - x_{i_p})^2 \in \Pi_{2l} \subset \Pi_m.$$

(Si $l = 0$ entonces $q(x)$ se toma como idénticamente igual a uno, es decir, $q \equiv 1$.)

Ahora bien, como $I_n(f)$ es exacta en Π_m, tendremos:

$$0 < I_\omega(q) = \int_a^b q(x)\omega(x)dx = I_n(q) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j),$$

pero por otro lado, $= \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) = \sum_{j \neq i_1, \ldots, i_l}^{n} A_j f(x_j) \leq 0$, ya que $A_j \geq 0$ y $q(x_j) > 0$. Llegamos pues a un absurdo que proviene de haber supuesto que $l \leq \left[\frac{m}{2}\right]$. □

Obviamente, si el G.P.A. es $\geq 2n-2$, entonces tomamos $m = 2n-2$ y $\left[\frac{m}{2}\right] + 1 = n$, por lo que todos los coeficientes son positivos y la Proposición 1.2.2 sigue directamente de esta última.

1.3. Polinomios ortogonales sobre el eje real

En las últimas décadas la teoría de los llamados “polinomios ortogonales” ha experimentado un desarrollo inusitado no sólo por su conexión con otras áreas próximas a la Matemática como la Física o la Ingeniería sino por su íntima interrelación con otros campos de la propia Matemática como pueden ser las Ecuaciones Diferenciales, los Aproximantes de Padé, las Fracciones Continuas o las Fórmulas de Cuadratura. En esta sección discutiremos sólo una pequeña porción de esta teoría la cual vamos a necesitar para la construcción de fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión algebraica.

Así pues, sea $[a, b]$ un intervalo del eje real finito o infinito y sea $\omega(x)$ una función peso sobre $[a, b]$ de modo que las integrales (momentos)

$$c_k = \int_a^b x^k \omega(x) dx \ \ , \ k = 0, 1, \ldots \tag{1.14}$$

existan y sean fácilmente computables. Diremos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son ortogonales en $[a, b]$ respecto a la función peso $\omega(x)$ si el producto $f(x)g(x)\omega(x)$ es integrable en $[a, b]$ y verifica

$$\int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx = 0. \tag{1.15}$$

Así, de acuerdo a esta terminología, y teniendo en cuenta (1.13), el polinomio nodal $Q_n(x)$ de una fórmula de cuadratura con n nodos y grado de precisión algebraica $n+k$ es “ortogonal” a cualquier polinomio de grado a lo sumo k. Por otro lado, una función $f(x)$ se dice normalizada en $[a, b]$ con respecto a $\omega(x)$ si $f^2(x)$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f^2(x)\omega(x)dx = 1. \tag{1.16}$$

En lo sucesivo, cuando no haya lugar a confusión respecto a qué función peso estamos considerando la ortogonalidad, podremos omitir la expresión ”con respecto a la función peso $\omega(x)$”. Ahora, para todo $n \geq 0$, consideremos el determinante Δ_n asociado a la sucesión $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ (determinante de Hankel):

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}. \tag{1.17}$$

PROPOSICIÓN 1.3.1 *Para todo $n \geq 0$, $\Delta_n \neq 0$.*

Demostración: Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ tal que $\Delta_n = 0$ y construyamos el sistema homogéneo de $n+1$ ecuaciones en las incógnitas $a_0, \ldots, a_n$:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_0c_0 & + & a_1c_1 & + & \cdots & + & a_nc_n & = & 0 \\ a_0c_1 & + & a_1c_2 & + & \cdots & + & a_nc_{n+1} & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_0c_n & + & a_1c_{n+1} & + & \cdots & + & a_nc_{2n} & = & 0 \end{array}\right\}. \tag{1.18}$$

Dado que $\Delta_n = 0$, (1.18) admite solución no trivial. Ahora bien, por (1.14), el sistema (1.18) es equivalente a:

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b [a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n]\omega(x)dx & = & 0 \\ \int_a^b [a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n]x\omega(x)dx & = & 0 \\ & \vdots & \\ \int_a^b [a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n]x^n\omega(x)dx & = & 0 \end{array}$$

Multiplicando estas ecuaciones respectivamente por $a_0, \ldots, a_n$ y sumando obtenemos

$$\int_a^b [a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n]^2\omega(x)dx = 0$$

lo cual es una contradicción, pues algunos de los coeficientes a_j son no nulos $\square$

Ahora es fácil probar la siguiente:

PROPOSICIÓN 1.3.2 *Dado cualquier número natural $n \geq 1$, existe un polinomio $P_n(x)$ de grado exacto n (determinado salvo factor multiplicativo) que es ortogonal a cualquier polinomio de grado a lo sumo $n-1$.*

Demostración: Hágase como ejercicio. □

Si escribimos $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, se suele elegir a veces el factor multiplicativo que lo caracteriza unívocamente, de modo que:

$$a_n > 0 \;\; , \;\; \int_a^b P_n^2(x)\omega(x)dx = 1.$$

En este caso diremos que $P_n(x)$ es "ortonormal". Otra forma usual de normalizar el polinomio $P_n(x)$ es imponer que $a_n = 1$. En este caso, estamos hablando del n-ésimo polinomio ortogonal "mónico".

Si hacemos $P_0(x) \equiv$ *constante* tal que $\int_a^b P_0^2(x)\omega(x)dx = 1$ y repetimos el proceso para todo $n \geq 1$, generaremos un sistema de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ que denominaremos ortonormal respecto a $\omega(x)$ en $[a, b]$ y que verifica:

1. $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.
2. $\int_a^b P_n(x)P_m(x)\omega(x)dx = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & n \neq m \\ 0 & si & n = m \end{array} \right.$.

En lo que sigue, escribiremos el n-ésimo polinomio ortonormal $P_n(x)$ en la forma

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \cdots \quad , \;\; n \geq 1 \;\; , \;\; a_n > 0$$

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{c_0}} = a_0$$

(recordar que $c_k = \int_a^b x^k \omega(x)dx$). En general, cualquier sucesión o sistema de polinomios ortogonales será de la forma $Q_n(x) = \lambda_n P_n(x)$ con $\lambda_n \neq 0$, de modo que al correspondiente sistema mónico será:

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_n} \;\; , \; n = 0, 1, \ldots .$$

Recíprocamente, si $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es el sistema mónico de polinomios ortogonales,

$$P_n(x) = \frac{Q_n(x)}{k_n} \;\; , \; k_n > 0 \;\; : \;\; k_n^2 = \int_a^b Q_n^2(x)\omega(x)dx$$

será el correspondiente sistema ortonormal.

Veamos ahora algunas propiedades de los polinomios ortogonales:

Teorema 1.5 (Ceros) *Los ceros de cualquier polinomio ortogonal*

$$\varphi_n(x) = \lambda_n Q_n(x) \ \ , \ \lambda_n \neq 0$$

de grado $n \geq 1$ *son reales, distintos y contenidos en* (a, b).

Demostración: Sean $\xi_1, \ldots, \xi_m$ los ceros de $\varphi_n(x)$ de multiplicidad impar contenidos en (a, b). Obsérvese que $0 \leq m \leq n$. Por tanto, hemos de probar que $m = n$. Supongamos pues $m < n$ y definamos $P(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_m) \in \Pi_m$ (si $m = 0$, $P(x)$ se toma como una constante no nula). Vemos que $P(x)\varphi_n(x)$ no cambia de signo en (a, b) y por consiguiente $\int_a^b P(x)\varphi_n(x)\omega(x)dx \neq 0$, lo cual lleva a una contradicción. □

Teorema 1.6 (Ley de recurrencia a tres términos) *Si* $P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \cdots$ *es el* n*-ésimo polinomio ortonormal con respecto a la función peso* $\omega(x)$ *en [a,b], entonces para todo* $n \geq 0$*:*

$$xP_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) P_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} P_{n-1}(x) \quad (1.19)$$

con condiciones iniciales $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$, $P_{-1}(x) \equiv 0$.

Demostración: Dado que $xP_n(x) \in \Pi_{n+1}$, y como $\{P_0(x), \ldots, P_{n+1}(x)\}$ forman una base de Π_{n+1}, podemos escribir

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{k,n} P_k(x)$$

siendo $c_{k,n} = \int_a^b xP_n(x)P_k(x)\omega(x)dx$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$. Dado que $xP_k(x) \in \Pi_{k+1}$, entonces si $k + 1 < n$ ($k < n - 1$ ó $0 \leq k \leq n - 2$) resultará $c_{k,n} = 0$ para $0 \leq k \leq n - 2$, y por consiguiente:

$$xP_n(x) = c_{n+1,n} P_{n+1}(x) + c_{n,n} P_n(x) + c_{n-1,n} P_{n-1}(x) \ \ , \ n > 1.$$

Comparando los coeficientes de mayor grado obtenemos $c_{n+1,n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Además, puesto que $c_{n,k} = c_{k,n}$ deducimos $c_{n,n-1} = c_{n-1,n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$. Para obtener $c_{n,n}$ comparamos el coeficiente del monomio x^n y se tiene

$c_{n,n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$. Finalmente, lo fórmula (1.19) también es válida para $n = 0$ tomando $P_{-1}(x) \equiv 0$. $\square$

Si hacemos ahora,

$$\alpha_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} > 0 \ \text{ y } \ \beta_{n+1} = \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) \tag{1.20}$$

podemos escribir:

$$xP_n(x) = \alpha_{n+1}P_{n+1}(x) + \beta_{n+1}P_n(x) + \alpha_n P_{n-1}(x) \ \ , \ n \geq 0 \tag{1.21}$$

Para la correspondiente sucesión mónica $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tenemos:

Corolario 1.1 *Para todo $n \geq 0$,*

$$Q_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_n^2 Q_{n-1}(x)$$

con las condiciones iniciales $Q_0(x) \equiv 1$, $Q_{-1}(x) \equiv 0$.

Teorema 1.7 (Identidad de Christoffel-Darboux) *Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ el sistema ortonormal de polinomios con respecto a $\omega(x)$. Entonces, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ y $n \geq 1$ se cumple*

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k(x)P_k(y) = \alpha_n \left[\frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x - y} \right] \tag{1.22}$$

siendo $P_n(x) = a_n x^n + \cdots$, $a_n > 0$ y $\alpha_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}$, $n \geq 1$.

Demostración: Multiplicando ambos miembros de (1.21) por $P_n(y)$ obtenemos

$$xP_n(x)P_n(y) = \alpha_{n+1}P_{n+1}(x)P_n(y) + \beta_{n+1}P_n(x)P_n(y) + \alpha_n P_{n-1}(x)P_n(y).$$

Intercambiando x por y:

$$yP_n(x)P_n(y) = \alpha_{n+1}P_{n+1}(y)P_n(x) + \beta_{n+1}P_n(x)P_n(y) + \alpha_n P_{n-1}(y)P_n(x)$$

Restando ahora ambas expresiones:

$$\begin{aligned} (x-y)P_n(x)P_n(y) &= \alpha_{n+1}\left[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)\right] \\ &- \alpha_n\left[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)\right]. \end{aligned}$$

Finalmente, sumando sobre n y recordando que $P_{-1}(x) \equiv 0$ se deduce el resultado. $\square$

COROLARIO 1.2 *Para todo $n \geq 1$,*

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(x) = \alpha_n [P_n'(x)P_{n-1}(x) - P_{n-1}'(x)P_n(x)] \qquad (1.23)$$

$\square$

TEOREMA 1.8 (SEPARACIÓN DE CEROS) *Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ el sistema ortonormal de polinomios con respecto a $\omega(x)$. Para $n \geq 1$, sean $x_1, \ldots, x_n$ los ceros de $P_n(x)$ ordenados en forma creciente. Entonces, entre x_j y x_{j+1} existe un único cero de $P_{n-1}(x)$.*

Demostración: Utilizando la relación (1.23) y teniendo en cuenta que $\alpha_n > 0$, sigue:

$$P_n'(x)P_{n-1}(x) - P_{n-1}'(x)P_n(x) > 0.$$

Haciendo $x = x_j$, dado que $P_n(x_j) = 0$, resulta:

$$P_n'(x_j)P_{n-1}(x_j) > 0 \;\; , \; j = 1, \ldots, n.$$

Ahora bien, $sign\,(P_n'(x_j)) = (-1)^{n-j}$, por lo que $sign\,(P_{n-1}(x_j)) = (-1)^{n-j}$ para $j = 1, \cdots, n$ y se concluye la prueba. $\square$

EJEMPLO 1.1 *Consideremos el intervalo $[-1, 1]$ y la función peso $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. El sistema de polinomios ortogonales que genera tal función peso son los famosos polinomios de Chebyshev de primera especie y que se pueden definir para $n = 0, 1, 2, \ldots$ como:*

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \qquad \cos\theta = x. \qquad (1.24)$$

Así vemos que $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ y

$$T_2(x) = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1.$$

En general, utilizando la conocidas fórmulas trigonométricas:

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \mathrm{sen} n\theta \mathrm{sen}\theta$$

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta + \mathrm{sen} n\theta \mathrm{sen}\theta$$

resultará
$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta,$$
que permite escribir:
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \ \ , \ n \geq 1$$
Esto prueba que la función $T_n(x)$ dada por (1.24) representa un polinomio de grado n de la forma $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$. Por otro lado, es fácil verificar que
$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \pi/2 & si \quad n = m \geq 1 \\ \pi & si \quad n = m = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$
Para ello hágase el cambio $x = \cos\theta$. Así pues, para todo $n \geq 1$, $\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ representa el correspondiente polinomio mónico de grado n, mientras que $\hat{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{\sqrt{\pi/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}T_n(x)$ el correspondiente polinomio ortonormal de grado n.

Por otro lado, para todo $x \in [-1,1]$, $|\tilde{T}_n(x)| = \left|\frac{\cos n\theta}{2^{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ y dado que existen puntos de $[-1,1]$ donde $|T_n(x)| = 1$, tenemos
$$max_{x\in[-1,1]}\left|\tilde{T}_n(x)\right| = \| \tilde{T}_n(x) \|_{[-1,1]} = \frac{1}{2^{n-1}}$$
y por consiguiente:
$$\lim_{n\to\infty} \| \tilde{T}_n(x) \|_{[-1,1]}^{1/n} = \frac{1}{2} \tag{1.26}$$
Al mismo tiempo, $T_n(z)$ con $z \in \mathbb{C}$ admite la siguiente representación:
$$T_n(z) = \frac{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n + \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n}{2}$$
Además, para todo $z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$, $|z+\sqrt{z^2-1}| > 1$. Luego, para todo $z \notin \mathbb{C}\backslash[-1,1]$
$$\begin{aligned} |T_n(z)| &= \tfrac{1}{2}\left|\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n + \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n\right| = \\ &= \tfrac{1}{2}\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|^n \left|1+\left(\tfrac{z-\sqrt{z^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)^n\right| = \\ &= \tfrac{\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|^n}{2}\left|1+\tfrac{1}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{2n}}\right|. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{2n}} = 0$ uniformemente en compactos de $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ deducimos finalmente que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left|\tilde{T}_n(z)\right|^{1/n} &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{T_n(z)}{2^{n-1}}\right|^{1/n} \\ &= \frac{|z+\sqrt{z^2-1}|}{2} = \frac{|\psi(z)|}{2} \end{aligned} \tag{1.27}$$

siendo $\psi(z) = z+\sqrt{z^2-1}$ la transformación conforme que aplica $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ en el exterior del disco unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ conservando el punto del infinito $(\psi(\infty) = \infty)$.

Las relaciones (1.26) y (1.27) válidas para los polinomios de Chebyshev de primera especie se pueden generalizar para cualquier familia de polinomios ortogonales. En efecto, damos sin demostración el siguiente resultado que vamos a necesitar a la hora de estudiar la velocidad de convergencia de las fórmulas de cuadratura Gaussianas. Una demostración del mismo puede verse en el libro de Stahl y Totik [29]. Nos referiremos a un intervalo finito $[a,b]$ y tomaremos por sencillez $[-1,1]$. El caso general se resuelve mediante un simple cambio de variable.

Teorema 1.9 *Denotemos por $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a la función peso $\omega(x)$ en $[-1,1]$. Entonces*

1. $\lim_{n\to+\infty} |Q_n(z)|^{1/n} = \frac{|z+\sqrt{z^2-1}|}{2}$ *uniformemente en compactos de* $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$.

2. $\lim_{n\to+\infty} \| Q_n(z) \|_{[-1,1]}^{1/n} = \frac{1}{2}$. □

1.4. Fórmulas Gaussianas

El objetivo de esta sección será recordar las propiedades fundamentales de las llamadas fórmulas de cuadratura Gaussianas, de Gauss o de Gauss-Christoffel conocidas también como las de “máximo grado de precisión algebraica”. A tal efecto, recuérdese que en una fórmula de cuadratura con n nodos, el máximo grado de precisión algebraica alcanzable en $2n-1$. Así, el teorema de caracterización 1.4 y la propiedad de los ceros de polinomios ortogonales nos permite asegurar que tal grado máximo si que es alcanzable, verificándose el siguiente:

TEOREMA 1.10 *Una fórmula de cuadratura* $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ *con* n *nodos tiene grado de precisión algebraico* $2n-1$ *sí y sólo si*

1. $I_n(f)$ *es de tipo interpolatorio.*

2. *El polinomio nodal* $Q_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$ *coincide con el* n*-ésimo polinomio ortogonal mónico respecto a* $\omega(x)$.

□

OBSERVACIÓN 1 1. *Dado que el polinomio* $Q_n(x)$ *queda determinado salvo factor multiplicativo constante, fijado* n, *las fórmulas del Teorema (1.10) son únicas y las denominaremos Gaussianas.*

2. *Los coeficientes* A_j *son positivos para* $j = 1, \ldots, n$.

En cuanto a los pesos, por el Teorema 1.10, al tratarse de fórmulas de tipo interpolatorio vendrán dados para $j = 1, \ldots, n$ por

$$A_j = \int_a^b l_j(x)\omega(x)dx \ \ , \ l_j(x) \in \Pi_{n-1} \ \ , \ l_j(x_k) = \delta_{j,k} \ \ , \ 1 \le j, k \le n.$$

Ahora bien, recordando que $l_j(x) = \frac{Q_n(x)}{(x-x_j)Q_n'(x_k)}$ para $j = 1, \ldots, n$, tendremos

$$A_j = \frac{1}{Q_n'(x_j)} \int_a^b \frac{Q_n(x)}{(x - x_j)}\omega(x)dx \ \ , \ j = 1, \ldots, n \tag{1.28}$$

El carácter positivo, queda claramente reflejado en la siguiente representación (compruébese como ejercicio):

$$A_j = \frac{1}{(Q_n'(x_j))^2} \int_a^b \left[\frac{Q_n(x)}{(x - x_j)}\right]^2 \omega(x)dx \ \ , \ j = 1, \ldots, n \tag{1.29}$$

o también en el siguiente:

TEOREMA 1.11 *Sea* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la función peso* $\omega(x)$ *en* $[a, b]$ *y sea* $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ *la enésima fórmula Gaussiana. Entonces,*

$$A_j = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(x_j)} \ \ , \ j = 1, \ldots, n. \tag{1.30}$$

Demostración: Utilizando el Corolario 1.2 con $x = x_j$ tenemos

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(x_j) = \alpha_n \left[P_n'(x_j) P_{n-1}(x_j) \right] \ , \ \alpha_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0$$

y siendo $P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \cdots \quad (a_n > 0)$. Por otro lado, si en la identidad de Christoffel-Darboux (1.22) hacemos $x = x_j$ deducimos

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) P_k(x_j) = \alpha_n \frac{P_n(x) P_{n-1}(x_j)}{x - x_j}.$$

Multiplicando ambos miembros por $\omega(x)$ e integrando sobre $[a, b]$, resultará:

$$1 = \alpha_n P_{n-1}(x_j) \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_j} \omega(x) dx$$

lo cual implica

$$A_j = \frac{1}{P_n'(x_j)} \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_j} \omega(x) dx = \frac{1}{\alpha_n P_{n-1}(x_j) P_n'(x_j)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-1} P_k^2(x_j)}.$$

□

Observación 2 *De la propia demostración anterior y utilizando la ley de recurrencia a tres términos para $\{P_n(x)\}_{n=0}\infty$, resultará también:*

$$A_j = \frac{1}{\alpha_n P_{n-1}(x_j) P_n'(x_j)} = \frac{-1}{\alpha_{n+1} P_{n+1}(x_j) P_n'(x_j)} \ , \ j = 1, \ldots, n$$

Veamos a continuación algunas familias de funciones peso cuyas fórmulas Gaussianas han sido estudiadas profundamente. En efecto, consideremos, en primer lugar, las llamadas funciones peso de Jacobi sobre un intervalo finito, el cual para fijar ideas, tomaremos el $[-1, 1]$ y que vienen dadas por:

$$\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta \ , \ \alpha, \beta > -1.$$

En tal sentido, se comprueba que la función dependiente de los parámetros α y β (véase [21] para los detalles):

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \quad (1.31)$$

representa para cada $n \geq 0$ un polinomio de grado n cuyo coeficiente director es

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

verificándose además:

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{1} J_n^{(\alpha,\beta)}(x) J_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx =$$

$$\begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2x+1)n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} & si \quad n = m \end{cases} \tag{1.32}$$

Así pues, la familia de polinomios $\{J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dada por (1.31) representa una familia de polinomios ortogonales con respecto a $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ que denominaremos polinomios de Jacobi, y siendo (1.31) la llamada "fórmula de Rodrigues" para la misma. La correspondiente sucesión ortonormal $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ vendrá dada por

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{J_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\sqrt{I_{n,n}}} = a_n x^n + \cdots$$

con

$$a_n = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)\sqrt{I_{n,n}}}.$$

Algunos casos interesantes son:

1. $\alpha = \beta = 0$; $\omega(x) \equiv 1$. Ahora:

   $$J_n^{(0,0)}(x) = J_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

   con

   $$J_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \cdots$$

   y verificándose:

   $$\int_{-1}^{1} J_n(x) J_m(x) dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & si \quad n = m \end{cases}$$

La sucesión $\{J_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ representa la familia de polinomios de Legendre, ortogonales con respecto a $\omega(x) \equiv 1$ en $[-1, 1]$. Un sistema ortonormal vendrá dado por

$$Q_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} J_n(x) = a_n x^n + \cdots$$

con

$$a_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}. \tag{1.33}$$

2. $\alpha = \beta = -1/2$; $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Así pues, $J_n^{(-1/2,-1/2)}(x) = \lambda_n T_n(x)$ con $\lambda_n \neq 0$ y $T_n(x)$ el n-ésimo polinomio de Chebyshev de primera especie dado por (1.24), siendo $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. $\alpha = \beta = 1/2$; $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$. Consideremos ahora la familia de polinomios dados para $n = 0, 1, 2, \ldots$ por

$$U_n(x) = \frac{\operatorname{sen}((n+1)\theta)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \cos\theta = x. \tag{1.34}$$

comprobándose (hágase como ejercicio) que satisfacen la relación de recurrencia

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x). \tag{1.35}$$

con $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$. Por inducción se sigue que $U_n(x) = 2^n x^n + \cdots$. La sucesión $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ constituye la familia de polinomios ortogonales de Chebyshev de segunda especie, comprobándose que

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \\ \frac{\pi}{2} & si \quad n = m \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$J_n^{(1/2,1/2)}(x) = c_n U_n(x) \ \text{ con } c_n = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n!(n+1)!}$$

En lo concerniente a funciones peso $\omega(x)$ sobre intervalos no acotados, consideremos $\omega(x) = e^{-x^2}$, cuyo sistema de polinomios ortogonales son los llamados polinomios de Hermite definidos por la fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right), \tag{1.36}$$

comprobándose que $H_n(x) = 2^n x^n + \cdots$ y que:

$$I_{n,m}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & si \quad n = m \end{cases} \tag{1.37}$$

También los polinomios $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfacen las leyes de recurrencia

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \tag{1.38}$$

La correspondiente sucesión ortonormal $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ vendrá dada para $n = 0, 1, 2, \ldots$ por

$$Q_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n}\sqrt{n!}\pi^{\frac{1}{4}}} = a_n x^n + \cdots \quad , \; a_n = \sqrt{\frac{2^n}{n!\sqrt{\pi}}} \tag{1.39}$$

Por otro lado, en $(0, +\infty)$ tenemos la función peso, dependiente del parámetro $\alpha > -1$, $\omega(x) = x^{\alpha} e^{-x}$. Ahora un sistema de polinomios ortogonales viene dado por (fórmula de Rodrigues):

$$L_n^{\alpha}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{\alpha+n} e^{-x} \right) \tag{1.40}$$

En efecto, se puede comprobar que $L_n^{\alpha}(x)$ dado por (1.40) es un polinomio mónico de grado n, y se cumple:

$$I_{n,m}(x) = \int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ n!\Gamma(n+\alpha+1) & si \quad n = m \end{cases} \tag{1.41}$$

Los polinomios $\{L_n^{\alpha}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son los llamados polinomios de Laguerre de orden α. El caso particular más conocido son los de orden 0, esto es

$$L_n^0(x) = L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right) = x^n + \cdots. \tag{1.42}$$

Así pues, un sistema ortonormal para la función peso $\omega(x) = e^{-x}$ con $x \in (0, \infty)$ vendrá dado por

$$Q_n(x) = \frac{L_n(x)}{n!} = \frac{1}{n!}x^n + \cdots .$$

Analizadas las familias de polinomios ortogonales para las funciones peso anteriores, veamos ahora cómo quedan las correspondientes fórmulas Gaussianas:

1. <u>Función peso constante</u>

$$\omega(x) \equiv 1 \ \ , \ I_\omega(f) = I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j).$$

Ahora, $\{x_j\}_{j=1}^n$ son los ceros del polinomio de Legendre $J_n(x)$ de grado n con

$$A_j = \frac{-2}{(n+1)P_n'(x_j)P_{n+1}(x_j)} = \frac{2}{nP_n(x)'(x_j)P_{n-1}(x_j)} \qquad (1.43)$$

siendo $P_n(x)$ el correspondiente ortonormal. Teniendo en cuenta que tal sistema ortonormal $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ satisface la relación

$$(1-x^2)P_n'(x) = (n+1)\left[xP_n(x) - P_{n+1}(x)\right] = n\left[P_{n-1}(x) - xP_n(x)\right]$$

obtenemos

$$A_j = \frac{2}{\left(1 - x_j^2\right)\left[P_n'(x_j)\right]^2} \ \ , \ j = 1, \ldots, n \qquad (1.44)$$

2. <u>Función peso de Chebyshev de primera especie</u>

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \ , \ I_\omega(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ la correspondiente fórmula Gaussiana con n nodos. Éstos serán las raíces del n-ésimo polinomio de Chebyshev de primera especie $T_n(x)$, por tanto,

$$x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\right)\pi \ \ , \ j = 1, \ldots, n. \tag{1.45}$$

En este caso se puede comprobar que los pesos A_j son independientes de j y por tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Por consiguiente:

$$A_j = \frac{\pi}{n} \ \ , \ j = 1, \ldots, n. \tag{1.46}$$

3. Función peso de Chebyshev de segunda especie

$$\omega(x) = \sqrt{1-x^2} \ \ , \ I_\omega(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}dx$$

Sea ahora $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ la correspondiente fórmula Gaussiana. Los nodos $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ serán los ceros de

$$U_n(x) = \frac{\operatorname{sen}\left[(n+1)arccosx\right]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por tanto,

$$x_j = \cos\left(\frac{j}{n+1}\right)\pi \ \ , \ j = 1, \ldots, n, \tag{1.47}$$

mientras que los pesos se conocen explícitamente:

$$A_j = \frac{\pi}{n+1}\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \ \ , \ j = 1, \ldots, n \tag{1.48}$$

4. Función peso de Hermite

$$\omega(x) = e^{-x^2} \ \ , \ I_\omega(f) = \int_{-1}^{1} f(x)e^{-x^2}dx$$

Ahora en la correspondiente fórmula Gaussiana con n nodos $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$, los nodos serán los ceros del n-ésimo polinomio de Hermite $H_n(x)$ (1.36) mientras que los pesos vienen dados por

$$A_j = \frac{2^{n+1} n! \pi^{1/2}}{[H_n'(x_j)]^2} \ \ , \ j = 1, \ldots, n.$$

5. Función peso de Laguerre

$$\omega(x) = x^{\alpha} e^{-x} \ \ , \ \alpha > 1 \ \ , \ \ I_{\omega}(f) = \int_{-1}^{1} f(x) x^{\alpha} e^{-x} dx$$

Sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ la enésima fórmula de Gauss. Sus nodos serán los ceros del polinomio de Laguerre de orden α y grado n (1.40) mientras que los pesos A_j se pueden expresar mediante

$$A_j = \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{L_n'^{(\alpha)}(x_j) L_{n+1}^{(\alpha)}(x_j)}$$

Si utilizamos la relación

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - \alpha - n - 1) L_n^{(\alpha)}(x) - x L_n^{(\alpha)}(x)$$

obtenemos

$$A_j = \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{x_j \left[L_n'^{(\alpha)}(x_j) \right]^2} \tag{1.49}$$

Para el caso particular $\alpha = 0$, esto es, $\omega(x) = e^{-x}$, tendremos:

$$A_j = \frac{(n!)^2}{x_j \left[L_n'(x_j) \right]^2} \ \ , \ j = 1, \ldots, n \tag{1.50}$$

con $L_n(x)$ dado por (1.42).

Veamos a continuación cómo se puede proceder en la computación efectiva de las fórmulas Gaussianas para una función peso arbitraria $\omega(x)$ con $x \in [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Uno de los procedimientos más conocidos y eficientes consiste en reducir el cálculo de los nodos $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ y pesos $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ de una fórmula Gaussiana $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ con respecto a $\omega(x)$ a un problema de autovalores. En efecto, si consideramos la familia de polinomios ortonormales $P_n(x)$ para $n = 0, 1, \ldots$ con

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \cdots \ , \ a_n > 0$$

entonces de la relación (1.21) tenemos:

$$xP_{k-1}(x) = \alpha_k P_k(x) + \beta_k P_{k-1}(x) + \alpha_{k-1} P_{k-2}(x) \ , \ k \geq 2 \tag{1.51}$$

siendo

$$\alpha_k = \frac{a_{k-1}}{a_k} \ , \ k = 1, 2, \ldots \ , \ \beta_k = \left(\frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} - \frac{b_k}{a_k} \right) \ , \ k = 2, 3, \ldots$$

la cual también es válida para $k = 1$ tomando $P_{-1}(x) \equiv 0$.

Así pues, si en la relación (1.51) hacemos $k = 1, \ldots, n$ (siendo n un número natural fijo) obtenemos:

$$\begin{array}{lrcl} k=1: & xP_0(x) & = & \beta_1 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) \\ k=2: & xP_1(x) & = & \alpha_1 P_0(x) + \beta_2 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) \\ & & \vdots & \\ k=n: & xP_{n-1}(x) & = & \alpha_{n-1} P_{n-2}(x) + \beta_n P_{n-1}(x) + \alpha_n P_n(x) \end{array} \tag{1.52}$$

Introduciendo ahora la notación matricial

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$J = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_n \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

se tiene que (1.52) toma la forma

$$xP(x) = JP(x) + \alpha_n P_n(x)E.$$

Por consiguiente, x_j será un cero de $P_n(x)$, sí y sólo si $x_jP(x_j) = JP(x_j)$, lo cual significa que x_j es un autovalor de J y $P(x_j)$ el correspondiente autovector. En otras palabras, al cálculo de los nodos de la n-ésima fórmula Gaussiana se reduce a calcular los autovalores de la matriz real simétrica J, llamada "matriz de Jacobi". Veamos también cómo los pesos A_j para $j = 1, \ldots, n$ se expresan en término de los autovectores. En efecto, los pesos A_j vienen dados, según el Teorema (1.11) por

$$\frac{1}{A_j} = \sum_{k=0}^{n-1} [P_k(x_j)]^2 \quad , \; j = 1, \ldots, n$$

lo cual implica:

$$1 = A_j \sum_{k=0}^{n-1} [P_k(x_j)]^2 = A_j [P(x_j)]^T [P(x_j)]$$

(aquí el super-índice T significa "traspuesta"). Por tanto, se sigue que

$$Q(x_j) = A_j^{1/2} P(x_j) \tag{1.54}$$

es el autovector de norma (Euclídea) uno. Si hacemos

$$Q(x_j) = (q_{0,j}, \ldots, q_{n-1,j})^T \in \mathbb{R}^n$$

y seleccionamos la primera componente de ambos lados de (1.54), obtenemos que $q_{0,j} = A_j^{1/2} P_o(x_j)$ para $j = 1, \ldots, n$. Pero, dado que $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$ con $c_0 = \int_a^b \omega(x)dx$, deducimos finalmente que $A_j = c_0 q_{0,j}^2$ para $j = 1, \ldots, n$.

Vemos pues, que la computación de la fórmula Gaussiana se reduce al cálculo de autovalores y autovectores de una matriz tridiagonal simétrica cuyos elementos son los parámtros α_k y β_k que aparecen en la ley de recurrencia a tres términos del correspondiente sistema ortonormal. De ahí la importancia computacional de la referida ley de recurrencia.

Conluímos esta sección dedicando unas líneas a fórmulas de cuadratura con nodos preasignados y máximo grado de precisión. Tales fórmulas resultan de interés en el estudio de métodos para la resolución numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Así pues, dada la función peso $\omega(x)$, pretendemos aproximar $I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ por una fórmula de cuadratura del tipo

$$I_{n+m}(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \sum_{j=1}^{m} B_j f(a_j) \tag{1.55}$$

en la que los nodos $a_j, \ldots, a_m$ se fijan de antemano. Así, (1.55) contiene $2n+m$ parámetros que se habrán de determinar imponiendo que el grado de precisión algebraica para $I_{n+m}(f)$ sea lo más alto posible. Introduciendo los polinomios

$$r(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - a_j) \in \Pi_m \quad \text{y} \quad q_n(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - x_j) \in \Pi_n$$

entonces, aplicando el Teorema 1.4, se puede probar el siguiente

Teorema 1.12 *La fórmula de cuadratura (1.55) tiene grado de precisión algebraica* $2n+m-1$ *al menos sí y sólo si*

1. *Es de tipo interpolatorio.*

2. *El polinomio* $q_n(x)$ *es ortogonal en* $[a,b]$ *con respecto a la función peso* $\tilde{\omega}(x) = r(x)\omega(x)$ *a cualquier polinomio de grado menor que* n.

Vemos que la construcción de la fórmula (1.55) exacta para cualquier polinomio de grado $2n+m-1$ a lo sumo se reduce a encontrar el polinomio de grado n, $q_n(x)$ ortogonal en $[a,b]$ respecto a la función peso $\tilde{\omega}(x) = r(x)\omega(x)$, la cual es de signo variable. Así pues, en general ya no podemos asegurar que $q_n(x)$ tenga grado exacto n y mucho menos que sus raíces sean reales, distintas y contenidas en (a,b) y que además sean distintas a los nodos prefijados a_j $(j = 1, \ldots, m)$. Con todo, veamos algunos casos puntuales sencillos de gran interés y aplicabilidad. En lo que sigue supondremos $[a,b]$ finito. Consideremos primero $m = 1$ con $a_1 = a$ ó $a_1 = b$, dando lugar a las llamadas fórmulas de "Gauss-Radau" para $\omega(\theta)$. Así si tenemos $a_1 = a$, entonces $r(x) = (x-a)$ y $q_n(x)$ será ortogonal a $(x-a)\omega(x)$, que es una función peso positiva. Por consiguiente, los ceros $\{x_j\}_{j=1}^n$ de $q_n(x)$ son distintos y contenidos en (a, b). La fórmula de cuadratura resultante

$$I_{n+1}(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) + B_1 f(a)$$

de tipo interpolatorio, será exacta en Π_{2n} y por consiguiente, los pesos son positivos. Por otro lado, supongamos que $m = 2$ y que elegimos como nodos prefijados $a_1 = 1$ y $a_2 = b$. Ahora $q_n(x)$ es ortogonal respecto a $(x-a)(b-x)\omega(x)$, la cual también en una función peso positiva. Por consiguiente, podemos asegurar que existen n nodos distintos en (a, b) y pesos $A_1, \ldots, A_n, B_1$ y B_2 de modo que

$$I_{n+2}(f) = B_1 f(a) + B_2 f(b) + \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) \tag{1.56}$$

es exacta en Π_{2n+1}. Tal fórmula recibe el nombre de "Gauss-Lobatto" para $\omega(x)$ en $[a, b]$.

Ejercicio: Pruébese que los pesos de la fórmula (1.56) son positivos.

1.5. Algunos resultados auxiliares

Al objeto de que el presente texto resulte autocontenido, a lo largo de esta sección reseñaremos algunos resultados básicos en la Teoría de Aproximación y que habrán de ser utilizados a la hora de establecer la convergencia tanto de una familia de fórmulas de cuadraturas sobre el eje real como sobre la circunferencia unidad. Comenzamos con el famoso "Teorema de Aproximación de Weierstrass" que establece como bien es sabido, la densidad del espacio de los polinomios Π sobre el espacio $C[a, b]$ de las funciones continuas sobre un intervalo finito $[a, b]$ respecto a la norma uniforme. Para nuestro propósito, será más conveniente considerar primero el caso de una función periódica $f(\theta)$ de periodo 2π. Así pues, sea $f(\theta)$ una función de estas características integrable en $[-\pi, \pi]$, esto es, $f \in L[-\pi, \pi]$. Su serie de Fourier asociada viene dada por:

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \mathrm{sen} k\theta) \tag{1.57}$$

con

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos k\theta d\theta \ \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\mathrm{sen} k\theta d\theta \ \ , \ k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Si denotamos por $S_n(f;\theta) = S_n(\theta)$ la suma parcial de orden n de (1.57) se sabe que $S_n(\theta)$ converge a $f(\theta)$ en norma L_2. Sin embargo, la convergencia uniforme depende "fuertemente" de la suavidad de la función. Al respecto, cabe señalar el resultado negativo debido a du-Bois Reymond (véase por ejemplo [13]) que dice que existen funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en algún punto θ. Esto llevó a estudiar otros tipos de convergencia (o sumabilidad) de series como por ejemplo la introducida por E. Césaro. Así, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se dice "$(C,1)$-sumable" o "sumable en sentido Césaro" si los promedios de las sumas parciales

$$\frac{1}{n+1}\left(S_0 + S_1 + \cdots + S_n\right),$$

con $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n = 0, 1, \ldots$, tienen límite S y escribiremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \ (C,1)$$

De esta forma, en 1904, L. Féjer llegó al notable descubrimiento de que la serie de Fourier de una función continua (y periódica de periodo 2π) es $(C,1)$-sumable a $f(x)$. Tal resultado se conoce como "Teorema de Féjer", cuya demostración daremos a continuación siguiendo el texto [13]. Para ello, introducimos los llamados "núcleos de Féjer", siendo preciso una serie de resultados previos.

Lema 1.2 *1.*

$$\mathrm{sen}\frac{x}{2} + \mathrm{sen}\frac{3x}{2} + \cdots + \mathrm{sen}\left(n - \frac{1}{2}\right)x = \frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{1.58}$$

2.

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\mathrm{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{1.59}$$

Demostración: Dado que $\operatorname{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right)x\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos(k-1)x-\cos kx\right]$ se sigue que

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right)x\operatorname{sen}\frac{x}{2} &= \textstyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos(k-1)x-\cos kx\right]= \\ &= \textstyle\frac{1}{2}[1-\cos nx]=\operatorname{sen}^2\left(\frac{nx}{2}\right).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right)x\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Para la demostración de 2. se procede análogamente. □

Lema 1.3 *Sea*

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos k\theta+b_k\operatorname{sen}k\theta\right)$$

la suma parcial de orden n *de la serie de Fourier de* $f(x)$ *y definamos:*

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\left[S_0(x)+\cdots+S_{n-1}(x)\right]. \tag{1.60}$$

Entonces,

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}dt \tag{1.61}$$

Demostración: Utilizando 2. del Lema 1.2 es fácil ver que

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-t)}f(t)dt.$$

Haciendo $t=t'+x$ (x fijo), deducimos

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \textstyle\frac{1}{2\pi}\int_{-n-x}^{n+x}f(x+t')\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t'}{\operatorname{sen}\ \frac{t'}{2}}dt' \\ &= \textstyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}dt.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$S_n(x) = \frac{1}{2n}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}dt. \tag{1.62}$$

Ahora, de la definición de $\sigma_n(x)$, (1.62) y 1. del Lema (1.2) se sigue la demostración. $\square$

Del Lema (1.3) se obtienen las siguientes dos consecuencias que resumimos en el siguiente

Corolario 1.3 *1.*

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = 1.$$

2. Supongamos que $m \leq f(x) \leq M$. Entonces, para todo $n \geq 0$, $m \leq \sigma_n(x) \leq M$. $\square$

Lema 1.4 *Sea $x \in \mathbb{R}$ fijo y definamos $\varphi(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$ y*

$$K_n(t) = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2n\pi\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Entonces,

$$\sigma_n(x) - f(x) = \int_0^\pi K_n(t)\varphi(t)dt.$$

Demostración: Por el Lema (1.3),

$$\sigma_n(x)(x) = \int_0^\pi K_n(t)\left[f(x+t)+f(x-t)\right]dt. \tag{1.63}$$

Por otro lado, del Corolario (1.3) se sigue:

$$f(x) = \int_0^\pi 2f(x)K_n(t)dt. \tag{1.64}$$

Restando (1.64) de (1.63) se concluye la demostración. $\square$

La función $K_n(t) = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2n\pi\left(\frac{t}{2}\right)}$ se conoce como “Núcleo de Féjer” de orden n, y verifica:

1. $K_n(t) \geq 0$

2. $\int_0^\pi K_n(t)dt = \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}^2(\frac{nt}{2})}{\mathrm{sen}^2(\frac{t}{2})}dt = \frac{1}{2}$ para $n = 1, 2, \ldots$

3. Si para $0 < \delta < \pi$ se define $M_n(\delta) = max_{\delta \leq t \leq \pi} K_n(t)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\delta) = 0 \tag{1.65}$$

   Esto último se sigue de:

$$0 \leq K_n(t) = \frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2n\pi\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{1}{2n\pi\left(\mathrm{sen}(\delta/2)\right)^2}.$$

Estamos ya en condiciones de probar el Teorema de Féjer, a saber:

Teorema 1.13 *Sea $f \in L[-\pi, \pi]$ y continua en todo punto x. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

Demostración: En primer lugar, por el Lema (1.4) tenemos, para todo $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \int_0^\pi K_n(t)|\varphi(t)|dt \\ &\leq \int_0^\delta K_n(t)|\varphi(t)|dt + \int_\delta^\pi K_n(t)|\varphi(t)|dt \qquad (1.66) \\ &\leq \int_0^\delta K_n(t)|\varphi(t)|dt + M_n(\delta)\int_\delta^\pi |\varphi(t)|dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, por ser $f(x)$ continua en x, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall t : 0 \leq |t| \leq \delta$, $|f(x) - f(x+t)| < \epsilon$. Ahora bien, $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)$ y por tanto $|\varphi(t)| < \epsilon$, $\forall t : 0 \leq |t| \leq \delta$, lo cual implica

$$\int_0^\delta K_n(t)|\varphi(t)|dt \leq \epsilon \int_0^\delta K_n(t)dt \leq \epsilon \int_0^\delta K_n(t)dt = \epsilon/2. \tag{1.67}$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} M_n(\delta) = 0$, la prueba sigue de (1.66) y (1.67). $\square$

Teorema 1.14 *Sea $f \in L[-\pi,\pi]$ y continua en $[a,b]$, siendo $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

uniformemente en $[a,b]$.

Demostración: Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en $[a,b]$, $f(x)$ es uniformemente continua en dicho intervalo, luego procediendo como en el Teorema anterior, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall t \in [0,\delta]$ y para todo $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \epsilon \int_0^\delta K_n(t)dt + M_n(\delta)\int_\delta^\pi |\varphi(t)|dt \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + M_n(\delta)\int_\delta^\pi |\varphi(t)|dt. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_\delta^\pi |\varphi(t)|dt &\leq \int_0^\pi |\varphi(t)|dt \\ &\leq \int_0^\pi |f(x+t)|dt + \int_0^\pi |f(x-t)|dt + 2\int_0^\pi |f(x)|dt \\ &= \int_{-\pi}^\pi |f(x+t)|dt + 2\pi|f(x)| = \int_{-\pi}^\pi |f(t)|dt + 2\pi|f(x)| \end{aligned}$$

Como $f(x)$ es continua en $[a,b]$, $f(x)$ está acotada y concluimos que existe $C > 0$ tal que $\int_{-\pi}^\pi |\varphi(t)|dt < C$. Dado que $\lim_{n\to\infty} M_n(\delta) = 0$, se concluye la demostración. □

Corolario 1.4 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica de periodo 2π. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $T(x)$ polinomio trigonométrico tal que*

$$|f(x) - T(x)| < \epsilon \ , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Finalmente, el Teorema de Féjer, o más concretamente el Corolario 1.4 nos permite dar una demostración del llamado

Teorema 1.15 (Teorema de aproximación de Weierstrass) *Sea $f(x)$ continua sobre el intervalo finito $[a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ tal que*

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \ , \ \forall x \in [a,b].$$

Demostración: Consideremos la función $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$g(\theta) = \begin{cases} f\left(a + \frac{\theta(b-a)}{\pi}\right) & si \quad 0 \leq \theta < \pi \\ \\ f\left(a + \frac{(2\pi-\theta)(b-a)}{\pi}\right) & si \quad \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Vemos que $g(\theta)$ es continua en $[0, 2\pi]$ y que $g(0) = g(2\pi)$, luego se pude extender periódicamente a todo $\mathbb{R}$. Así pues, dado $\epsilon > 0$, por el Corolario 1.3, existe $T(\theta)$ polinomio trigonométrico tal que:

$$|g(\theta) - T(\theta)| < \epsilon/2 \ \ , \ \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Puesto que $T(\theta)$ es una suma finita de funciones trigonométricas, es decir

$$T(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos k\theta + B_k \mathrm{sen} k\theta)$$

entonces $T(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \theta^k$, con convergencia uniforme en $[0, 2\pi]$. Por consiguiente, existe m suficientemente grande tal que

$$|P_m(\theta) - T(\theta)| < \epsilon/2 \ \ , \ P_m(\theta) = \sum_{k=0}^{m} c_k \theta^k$$

y podemos escribir

$$|g(\theta) - P_m(\theta)| < \epsilon \ \ , \ \forall\theta \in [0, 2\pi]. \tag{1.69}$$

Así pues, $\forall\theta \in [0, \pi] : |g(\theta) - P_m(\theta)| < \epsilon$, implicando por definición de g :

$$\left| f\left(a + \theta\frac{b-a}{\pi}\right) - P_m(\theta) \right| < \epsilon, \ \forall\theta \in [0, \pi].$$

Haciendo $x = a + \theta\frac{b-a}{\pi}$, sigue:

$$\left| f(x) - P_m\left(\frac{(x-a)\pi}{b-a}\right) \right| = |f(x) - P(x)| < \epsilon, \ \forall x \in [a, b],$$

con $P(x) = P_m\left(\frac{(x-a)\pi}{b-a}\right) \in \Pi$. $\square$

Para el caso que $f(x)$ sea sólo Riemann-Stieltjes integrable en $[a, b]$, también se tiene la siguiente propiedad, la cual se puede ver enunciada en [32].

Teorema 1.16 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, siendo $[a,b]$ un intervalo finito, $\alpha(x)$ no decreciente y supongamos que la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ existe. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, existen polinomios $\rho(x)$ y $P(x)$ tales que*

$$\begin{aligned} Inf\,\{f(x) : a \leq x \leq b\} - \epsilon \quad & \leq \rho(x) \leq f(x) \leq P(x) \\ & \leq Sup\,\{f(x) : a \leq x \leq b\} + \epsilon \end{aligned}$$

y además

$$\int_a^b [P(x) - \rho(x)]\, d\alpha(x) < \epsilon.$$

Demostración: Véase [14] para el caso $\alpha(x) = x$ y [3] para el caso general. □

Observación 3 *Un resultado similar también se da para funciones periódicas de periodo 2π utilizando polinomios trigonométricos (véase [32, p.11, Theorem 1.5.3])*

A continuación recordamos algunos resultados básicos del Análisis Funcional que nos permitirán dar una visión unificada de la convergencia en los procesos de cuadratura.

Así pues, sean X e Y espacios vectoriales normados y sea $H : X \to Y$ un operador lineal. Si existe $M > 0$ tal que $\forall x \in X$, $\| Hx \| \leq M \| x \|$, entonces H se dirá acotado. Además, la menor de las constantes M que satisfacen la desigualdad anterior se denomina “norma del operador”, y escribimos:

$$\| H \| = \min\{M \ : \| Hx \| \leq M \| x \| \ , \ \forall x \in X\}.$$

Se tiene la siguiente relación (véase [21]):

$$\| H \| = sup_{\|x\| \leq 1} \| Hx \| \ .$$

Ejemplo 1.2 *Sea $\omega(x)$ una función peso y consideremos*

$$I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx.$$

Entonces claramente $I_\omega : C[a,b] \to \mathbb{R}$ es un operador lineal acotado (en $C[a,b]$ estamos considerando la norma del máximo). Además, es fácil comprobar que:

$$\| I_\omega \| = \int_a^b \omega(x)dx.$$

Supongamos ahora que X e Y son espacios de Banach y sea $\{H_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de operadores lineales de X en Y. Entonces, $\{H_n\}_{n=0}^\infty$ se dirá convergente sí y sólo si $\forall x \in X$ existe una sucesión $y_n = H_n x$ convergente en el espacio Y. Si escribimos $\lim_{n\to\infty} H_n x = y = Hx$, entonces es fácil ver que $H : X \to Y$ es un operador lineal y acotado. Las condiciones que debe cumplir una sucesión de operadores H_n ($n = 1, 2, \ldots$) para que sea convergente quedan recogidas en el siguiente

TEOREMA 1.17 (BANACH-STEINHAUSS) *Sean X e Y espacios de Banach y sea $H_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots,$ una sucesión de operadores lineales. Entonces, $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ converge sí y sólo si:*

1. *Las normas $\| H_n \|$ de los operadores tienen una cota en común, esto es, $\| H_n \| \le M$, $n = 1, 2, \ldots$.*

2. *$H_n x$ es convergente para todo $x \in E \subset X$, E denso en X.*

Demostración: Véase [21, Krylov, pp. 59-61]. □

Por último, enunciaremos un resultado que utilizaremos en el Capítulo 3, que nos proporciona una relación entre la asintótica de la raíz enésima de polinomios y su norma uniforme. Para ello necesitaremos algunas nociones básicas de la Teoría del potencial. La referencia básica aquí es el libro de Stahl y Totik (ver [29]).

Sea K un compacto del plano complejo $\mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{M}(K)$ al espacio de todas las medidas finitas de Borel μ soportadas en K. Denotamos $\|\mu\| = \mu(K)$ y definimos

$$I(\mu) = \int\int \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(z)\, d\mu(\zeta).$$

El valor $I(\mu)$ recibe el nombre de *energía* asociada a μ y denotemos por $I(K)$ a:

$$I(K) = \inf_{\|\mu\|=1} I(\mu).$$

DEFINICIÓN 1.2 *Se llama* capacidad *del compacto K al valor*

$$\mathrm{Cap}K = e^{-I(K)} .$$

Por otro lado,

DEFINICIÓN 1.3 *Dado $\mu \in \mathcal{M}(K)$, se llama* potencial *(logarítmico) de μ a la función*

$$p(\mu; z) = \int_K \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta) .$$

El siguiente resultado se conoce como Teorema Fundamental de la Teoría de Potencial. Pueden ver su demostración en [28].

TEOREMA 1.18 *Sea K un compacto de $\mathbb{C}$ tal que* $\mathrm{Cap}K > 0$. *Entonces, existe una única medida unitaria $\overline{\mu}$ tal que*

$$I(\overline{\mu}) = I(K) .$$

Esta medida está caracterizada por una cualquiera de las siguientes propiedades equivalentes:

a. *Existe una constante w tal que*

$$p(\overline{\mu}; z) = \begin{cases} \leq w , & z \in \mathbb{C} , \\ = w , & z \in K \setminus e , \quad \mathrm{Cap}e = 0 . \end{cases}$$

b. $\displaystyle \min_{z\in K} p(\overline{\mu}; z) = \max_{\|\mu\|=1} \min_{z\in K} p(\mu; z) .$

La medida $\overline{\mu}$ recibe el nombre de *medida de equilibrio* del compacto K y la constante w, *constante de equilibrio*. Como la medida de equilibrio tiene energía finita y $C(e) = 0$, entonces $\overline{\mu}(e) = 0$. Del teorema anterior y de la definición de la capacidad se deduce que

$$\log \frac{1}{CapK} = I(K) = \int_K p(\overline{\mu}; z)\, d\overline{\mu}(z) = w . \tag{1.70}$$

Por último, dado un subconjunto compacto K del plano complejo $\mathbb{C}$, denotamos por $\hat{K}$ a la unión de K y de todas las componentes conexas acotadas de su complemento. Luego, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \hat{K}$ denota la componente conexa no acotada del complemento de K. Así se tiene la siguiente:

DEFINICIÓN 1.4 *Se llama* función de Green *de* Ω *(o también de* K*) con singularidad en el infinito a la función*

$$g_{\Omega}(z;\infty) = w - p(\overline{\mu};z) \ ,$$

donde w *y* $\overline{\mu}$ *son la constante y la medida de equilibrio respectivamente.*

Ya estamos en situación de enunciar el siguiente Teorema, que como hemos dicho, nos va a proporcionar una relación entre la asintótica de la raíz enésima de ciertas sucesiones de polinomios y su norma uniforme. Esto nos permite controlar el crecimiento de un polinomio en el plano complejo si conocemos su norma uniforme sobre un compacto de capacidad mayor que cero.

TEOREMA 1.19 *Sea* $K \in \mathbb{C}$, K *compacto y sea* $\{P_n(z)\}_n$ *una sucesión de polinomios mónicos tales que, para cada* n*, los ceros de* $P_n(z)$ *se hallan en* K*. Denotemos por* $\|P_n\| = \max_{z\in K}|P_n(z)|$ *la norma del máximo de* $P_n(z)$ *en* K*. Sea* $g_K(z,\infty)$ *la función de Green con polo en* ∞ *y sea* $Cap(K)$ *la capacidad logarítmica de* K*. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} |P_n(z)|^{1/n} = exp\{g_K(z,\infty)\}Cap(K),$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{C}\setminus K$*, sí y sólo si,* $\lim_{n\to\infty}\|P_n\|^{1/n} = Cap(K)$.

1.6. Convergencia de las fórmulas de cuadratura

Sea $\omega(x)$ una función peso en un intervalo finito $[a,b]$ de modo que los momentos $c_k = \int_a^b x^k\omega(x)dx$ existan para cualquier entero no negativo k, y denotemos por $I_n = \sum_{j=1}^n A_{j,n}f(x_{j,n})$ la n-ésima fórmula Gaussiana para $\omega(x)$ en $[a,b]$, $n = 1,2,\ldots$. Nos vamos a plantear en qué espacio de funciones $\mathcal{F}$ se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx \ \ , \ \forall f\in\mathcal{F}.$$

Obviamente, interesa que la clase $\mathcal{F}$ sea lo más amplia y general posible. Así, en primer lugar, haciendo uso del Teorema de Banach-Steinhauss y del Teorema de Weierstrass, sigue:

Teorema 1.20

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = I_\omega(f) \ \ , \ \forall f \in C[a,b].$$

$\square$

Veamos ahora, cómo se puede extender tal resultado de convergencia a una clase más amplia de funciones. A tal efecto, introduzcamos la clase

$\mathcal{R}_\omega[a,b] =$

$$\{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ f \ acotada \ , \ f(x)\omega(x) \ Riemann \ integrable \ en \ [a,b]\}\,.$$

Tenemos en primer lugar el siguiente resultado general:

Teorema 1.21 *Sea $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(t_{j,n})$ una sucesión de fórmulas de cuadratura para $I_\omega(f)$ con coeficientes positivos $\lambda_{j,n}$, $j = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$ y verificándose*

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_n(P) = I_\omega(P) \ \ , \ \forall P \in \Pi.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_n(f) = I_\omega(f) \ \ , \ \forall f \in \mathcal{R}_\omega[a,b].$$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{R}_\omega[a,b]$ y $\epsilon > 0$. Por el Teorema 1.16 sabemos que existen polinomios $P(x)$ y $\rho(x)$ tales que $\rho(x) \leq f(x) \leq P(x)$ y

$$\int_a^b [P(x) - \rho(x)]\,\omega(x)dx < \epsilon/2.$$

Puesto que $\rho(x) \in C[a,b]$, $\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_n(\rho) = I_\omega(\rho)$. Por consiguiente, dado $\epsilon^{'} > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1$ se cumple $|I_\omega(\rho) - \tilde{I}_n(\rho)| < \epsilon^{'}$ o equivalentemente,

$$\tilde{I}_n(\rho) - \epsilon^{'} < I_\omega(\rho) < \tilde{I}_n(\rho) + \epsilon^{'}.$$

Análogamente, dado $\epsilon^{''} > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_2$ se cumple

$$I_\omega(P) - \epsilon^{''} < \tilde{I}_n(P) < I_\omega(P) + \epsilon^{''}.$$

Por otra parte,

$$\int_a^b [P(x) - f(x)]\,\omega(x)dx \leq \int_a^b [P(x) - \rho(x)]\,\omega(x)dx < \epsilon/2$$

y

$$\int_a^b [f(x) - \rho(x)]\,\omega(x)dx \leq \int_a^b [P(x) - \rho(x)]\,\omega(x)dx < \epsilon/2.$$

Así, tomando $n > max\{n_1, n_2\} = n_3$, resultará

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\omega(x)dx - \epsilon/2 &< \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \int_a^b [f(x) - \rho(x)]\,\omega(x)dx \\
&= \int_a^b \rho(x)\omega(x)dx < \tilde{I}_n(\rho) + \epsilon^{'} \leq \tilde{I}_n(f) + \epsilon^{'} \\
&\leq \tilde{I}_n(P) + \epsilon^{'} < I_\omega(P) + \epsilon^{'} + \epsilon^{''} \\
&= I_\omega(f) + I_\omega(P - f) + \epsilon^{'} + \epsilon^{''} \\
&< I_\omega(f) + \epsilon/2 + \epsilon^{'} + \epsilon^{''}.
\end{aligned}$$

En definitiva, dado $\epsilon > 0$, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_3$:

$$-\epsilon/2 + I_\omega(f) \leq I_n(f) + \epsilon^{'} < I_\omega(f) + \epsilon/2 + \epsilon^{'} + \epsilon^{''}.$$

Luego,

$$-\epsilon/2 - \epsilon^{'} + I_\omega(f) \leq I_n(f) < I_\omega(f) + \epsilon/2 + \epsilon^{''}.$$

Dado que $\epsilon^{'}$ y $\epsilon^{''}$ son arbitrarios, si hacemos $\epsilon^{'} = \epsilon^{''} = \epsilon/2$, se concluye la demostración. □

COROLARIO 1.5 *Sea* $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_{j,n} f(x_{j,n})$, *para* $n = 1, 2, \ldots$ *la sucesión de fórmulas Gaussianas para* $I_\omega(f)$. *Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_n(f) = I_\omega(f) \ \ , \ \forall f \in \mathcal{R}_\omega[a, b].$$

Demostración: Téngase en cuenta el Teorema 1.20 y el hecho de que $A_j > 0$ para $j = 1, \ldots, n$. □

También, en relación a la convergencia de una sucesión general de fórmulas de cuadratura del tipo $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(t_{j,n})$, cabe señalar el famoso Teorema de Polya-Steklov ([21]), cuya demostración es una consecuencia del Teorema de Banach-Steinhauss y del Teorema de aproximación de Weierstrass.

TEOREMA 1.22 *La sucesión de fórmulas de cuadratura* $\{\tilde{I}_n(f)\}_n$, *con* $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(t_{j,n})$, *convergen en la clase* $\mathcal{C}[a, b]$, *sí y sólo si:*

1.
$$\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_n(P) = I_\omega(P) \ \ , \ \forall p \in \Pi.$$

2. $\exists\, M > 0$ *tal que:* $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_{j,n}| \leq M$, $n = 1, 2, \ldots$.

En el caso que el intervalo $[a, b]$ sea no acotado, es preciso imponer condiciones a los momentos $c_k = \int_a^b x^k \omega(x)dx$. Para fijar ideas, supongamos $[a, b] = [0, \infty)$ y que el problema de los momentos de Stieltjes es determinado, esto es, dada la sucesión $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, existe una única función peso $\omega(x)$ tal que $c_k = \int_0^\infty x^k \omega(x)dx$. En tales condiciones podemos asegurar que el espacio Π de los polinomios es denso en

$$L^{\omega}_{2,[0,\infty)} = \left\{ f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : \int_0^\infty |f(x)|^2 \omega(x)dx < +\infty \right\}.$$

Tal resultado nos va a permitir asegurar que la sucesión de polinomios que interpola a una función en los ceros de los polinomios ortogonales a $\omega(x)$ en $[0, \infty)$ converge en norma L_2 a dicha función f. Esto es, sean $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ los ceros del n-ésimo polinomio ortogonal $Q_n(x)$ con respecto a $\omega(x)$ en $[0, \infty)$ y sea $L_n(f; x) \in \Pi_{n-1}$ tal que $L_n(f; x_{j,n}) = f(x_{j,n})$ para $j = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \parallel f - L_n(f; \cdot) \parallel_\omega^2 = lim_{n\to\infty} \int_0^\infty [f(x) - L_n(f; x)]^2 \omega(x)dx = 0.$$

Así pues, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, obtenemos

$$\begin{aligned} |I_\omega(f) - I_n(f)| &= \left| \int_0^\infty [f(x) - L_n(f; x)] \omega(x)dx \right| \\ &\leq c_0 \int_0^\infty |f(x) - L_n(f; x)|^2 \omega(x)dx. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Por otro lado, se sabe que una condición suficiente para la determinación del problema de los momentos de Stieltjes es la llamada “condición de Carleman” (véase [1]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{c_n}} = +\infty. \tag{1.72}$$

Así, de (1.71) y (1.72) concluimos:

TEOREMA 1.23 *Sea $\omega(x)$ una función peso en $[0,\infty)$ tal que sus momentos $c_k = \int_0^\infty x^k \omega(x)dx$ verifican la condición (1.72). Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_n(f) = I_\omega(f) \ \ , \ \forall f \in L^\omega_{2,[0,\infty)}$$

siendo $\{I_n(f)\}$ la sucesión de fórmulas Gaussianas para $\omega(x)$. $\square$

EJEMPLO 1.3 *Tomemos la función peso de Laguerre de orden cero, esto es, $\omega(x) = e^{-x}$, $x \in [0,\infty)$. Se tiene:*

$$c_k = \int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \Gamma(k+1) = k!.$$

Así pues, $\frac{1}{\sqrt[2k]{c_k}} = \frac{1}{\sqrt[2k]{k!}}$. Haciendo uso de la fórmula de Stirling, $k! \approx \sqrt{2\pi k}[k/2]^k$, es fácil comprobar que la serie de término general $\frac{1}{\sqrt[2k]{k!}}$ tiene el mismo carácter que la del término general $\frac{1}{\sqrt{k}}$ que es divergente. Por consiguiente se cumple (1.72) y se concluye para toda función $f : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ tal que $\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x} dx < +\infty$ que

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \int_0^\infty f(x) e^{-x} dx,$$

siendo $\{I_n(f)\}$ la sucesión de fórmulas Gauss-Laguerre de orden cero.

Cuando estamos considerando integrandos $f(x)$ más generales podemos usar el resultado clásico de Uspensky (véase [33]) que nos asegura el siguiente

TEOREMA 1.24 *Sea $\omega(x)$ una función peso en $[0,\infty)$ tal que los momentos $c_k = \int_0^\infty x^k \omega(x)dx$ verifican la condición*

$$\frac{c_m}{(2m+1)!} < CR^{2m} \ \ , \ m = 1, 2, \ldots,$$

siendo C y R constantes positivas. Entonces $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = I_\omega(f)$, para cualquier función $f(x)$ definida en $[0,\infty)$ tal que $f(x)\omega(x)$ sea integrable en $[0,\infty)$. Aquí $I_n(f)$ con $n = 1, 2, \ldots$ sigue denotando la sucesión de fórmulas Gaussianas para $\omega(x)$ en $[0,\infty)$.

En el resto de la sección supondremos que $[a,b]$ es finito, el cual tomaremos como el intervalo $[-1,1]$ y f una función analítica en un abierto $U \supset [-1,1]$. Nos vamos a ocupar de estudiar la velocidad de convergencia de la sucesión $I_n(f)$ de fórmulas Gaussianas con respecto a $\omega(x)$, esto es,

$$limsup_{n\to\infty} \left| I_\omega(f) - I_n(f) \right|^{1/n}.$$

Con este propósito conviene introducir la llamada "Transformada de Cauchy" de una función $\omega(x)$, dada por

$$F_\omega(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)dx}{z-x} \;\; , \; z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]. \tag{1.73}$$

Así, para todo $x \in [-1,1]$ y $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > 1$, se tiene:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z\left(1-\frac{x}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^k}.$$

Como $\left|\frac{x}{z}\right| < 1$, la serie anterior converge uniformemente en la variable $x \in [-1,1]$ siempre que $|z| > 1$. Por consiguiente,

$$F_\omega(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)dx}{z-x} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} z^{-k} = L_\infty(z) \tag{1.74}$$

donde como siempre, $c_k = \int_{-1}^{1} x^k \omega(x)dx$ para $k = 0, 1, \ldots$ y siendo la convergencia de la serie $L_\infty(z)$ uniforme a $F_\omega(z)$ en conjuntos compactos del exterior del círculo unidad $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \, : |z| > 1\}$. Sea ahora Γ la frontera del abierto U, $\Gamma = \partial U$. Entonces, por el Teorema de Cauchy, para todo $z_0 \in U$ podemos escribir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(x)}{z-z_0} dz.$$

Por tanto:

$$I_\omega(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-x} dz \right] \omega(x)dx$$

y utilizando el Teorema de Fubini:

$$I_\omega(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left[\int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)dx}{z-x} dx \right] f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_\omega(z) f(z)dz. \tag{1.75}$$

Por otro lado, sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ la n-ésima fórmula de cuadratura Gaussiana; de nuevo podemos escribir:

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \sum_{j=1}^{n} A_j \left[\tfrac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tfrac{f(z)}{z-x_j}dz\right] = \\ &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\sum_{j=1}^{n} \tfrac{A_j}{z-x_j}\right] f(z)dz = \tfrac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F_n(z)f(z)dz \end{aligned} \tag{1.76}$$

siendo $F_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{z-x_j}$. Dado que $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ son los ceros de $Q_n(x)$, polinomio ortogonal mónico de grado n correspondiente a $\omega(x)$, podemos escribir:

$$F_n(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \;\; , \; P_{n-1} \in \Pi_{n-1}.$$

Así pues, $F_n(z)$ es una función racional de grado $n-1$ a lo sumo en el numerador y grado exacto n en el denominador con polos simples en el intervalo $[-1,1]$. Por consiguiente, para todo z tal que $|z|>1$ se tiene:

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{k-1}}{z^k}$$

siendo fácil comprobar que $d_j = c_j = \int_{-1}^{1} x^j \omega(x)dx$, $j = 0,1,\ldots,2n-1$. Lo anterior se suele expresar como:

$$L_\infty(z) - F_n(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right) \quad (z \to \infty) \tag{1.77}$$

y diremos que la función racional $F_n(z)$ representa el $[n-1/n]$ aproximante de Padé (en infinito) a la serie $L_0(z)$ ó a $F_\omega(z)$, escribiendo

$$F_n(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = [n-1/n]_{L_0}(z) = [n-1/n]_{F_\omega}(z). \tag{1.78}$$

Por consiguiente, mediante (1.75), (1.76), (1.77) y (1.78), deducimos la siguiente representación del error en la fórmula Gaussiana:

Teorema 1.25 *Sea $\omega(x)$ una función peso en $[-1,1]$ siendo $F_\omega(z)$ su correspondiente Transformada de Cauchy y sea $F_n(z)$ el $[n-1/n]$ aproximante de Padé en ∞ a $F_\omega(z)$. Supongamos $f(z)$ una función analítica en un dominio $U \supset [-1,1]$ y sea Γ su frontera. Entonces*

$$R_n(f) = I_\omega(f) - I_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [F_\omega(z) - F_n(z)]\, f(z)dz \tag{1.79}$$

siendo $I_n(f)$ la n-ésima fórmula Gaussiana correspondiente a $\omega(x)$. □

Claramente, por (1.79) vemos que el error de la fórmula Gaussiana está básicamente controlado por el error del $[n-1/n]$ aproximante de Padé en ∞ a $F_\omega(z)$. Interesa pues, dar estimaciones de dicho error, $E_n(z) = F_\omega(z) - F_n(z)$, $z \notin [-1,1]$. En primer lugar se tiene:

LEMA 1.5 *Para todo $z \notin [-1,1]$,*

$$F_\omega(z) - [n-1/n]_{F_\omega}(z) = \frac{1}{Q_n(z)} \int_{-1}^{1} \frac{Q_n(x)}{z-x}\omega(x)dx, \tag{1.80}$$

con $Q_n(x)$ el polinomio ortogonal de grado n para $\omega(x)$.

Demostración: $F_n(z) = [n-1/n]_{F_\omega}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{z-x_j}$, siendo $\{x_j\}_{j=1}^n$ los ceros de $Q_n(x)$ y $\{A_j\}_{j=1}^n$ los pesos de la n-ésima fórmula Gaussiana. Por consiguiente, si $z \in \mathbb{C}$, $z \notin [-1,1]$ es un parámetro, podemos escribir:

$$F_n(z) = I_n\left(\frac{1}{z-x}\right) = I_\omega\left(H_n(z,x)\right)$$

donde $H_n(z,x)$ es el polinomio de grado $n-1$ que interpola a $\frac{1}{z-x}$ (x variable, z un parámetro) en los ceros $\{x_j\}_{j=1}^n$ de $Q_n(x)$. Ahora bien, se comprueba fácilmente que:

$$H_n(z,x) = \frac{1}{z-x}\left(1 - \frac{Q_n(x)}{Q_n(z)}\right).$$

Por consiguiente,

$$F_n(z) = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{Q_n(x)}{Q_n(z)}\right) \frac{\omega(x)}{z-x} dx \ \ , \ z \notin [-1,1]. \tag{1.81}$$

La demostración se sigue de la definición (1.73) y de (1.81). $\square$

Ahora bien, dado que $Q_n(z)$ tiene grado exacto n, $\frac{1}{Q_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^n}\right)$ y

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q_n(x)}{z-x}\omega(x)dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Por tanto,

$$F_\omega(z) - [n-1/n]_{F_\omega}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

no quedando claro de (1.81) que pueda concluirse $\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$. Esto último se deduce de la siguiente representación alternativa del error:

Teorema 1.26 *Para todo $z \notin [-1,1]$,*

$$F_\omega(z) - [n-1/n]_{F_\omega}(z) = \frac{1}{Q_n^2(z)} \int_{-1}^{1} \frac{Q_n^2(x)}{z-x} \omega(x) dx.$$

Demostración: Por ortogonalidad se verifica:

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x) p(x) \omega(x) dx = 0 \ \ , \ \forall p \in \Pi_{n-1}.$$

Por otro lado, la función $\frac{Q_n(z)-Q_n(x)}{z-x}$ es un polinomio de grado $n-1$, tanto en la variable x como en la variable z. Si tomamos $z \notin [-1,1]$ como un parámetro, resultará:

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x) \left[\frac{Q_n(z)-Q_n(x)}{z-x} \right] \omega(x) dx = 0$$

lo cual implica:

$$Q_n(z) \int_{-1}^{1} \frac{Q_n(x)}{z-x} \omega(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{Q_n^2(x)}{z-x} \omega(x) dx$$

o lo que es lo mismo,

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q_n(x)}{z-x} \omega(x) dx = \frac{1}{Q_n(z)} \int_{-1}^{1} \frac{Q_n^2(x)}{z-x} \omega(x) dx.$$

De aquí junto con (1.80) se concluye la demostración. □

En lo que sigue, utilizaremos la notación usual de la norma uniforme o del máximo. Así , si K es un compacto de $\mathbb{C}$ y f continua sobre K, $\| f \|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$. Entonces, se tiene el siguiente resultado de convergencia:

Teorema 1.27 *Sea $F_\omega(z)$ la Transformada de Cauchy de $\omega(x)$, función peso sobre $[-1,1]$ y sea $\{F_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de Aproximantes de Padé $[n-1/n]$ en ∞ a $F_\omega(z)$. Entonces, si K es un compacto en $\mathbb{C} \backslash [-1,1]$ se verifica*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| F_\omega - F_n \|_K^{1/n} \leq \| \varphi(z) \|_K^2 < 1$$

siendo $\varphi(z) = \frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{\psi(z)}$ con $\psi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ la transformación conforme que aplica $\mathbb{C} \backslash [-1,1]$ en el exterior del círculo unidad ($|z| > 1$) conservando el punto del infinito ($\psi(\infty) = \infty$).

Demostración: Sea $K \subset \mathbb{C}\backslash[-1,1]$ y sea $z \in K$. Entonces, por el Teorema 1.26, $z \notin [-1,1]$,

$$|F_\omega(z) - F_n(z)| \leq \frac{1}{|Q_n(z)|^2} \int_{-1}^{1} \frac{|Q_n(x)|^2}{|z-x|} \omega(x)dx.$$

Por otro lado, para todo $z \in K$ y $x \in [-1,1]$, $|z-x| \geq dist\,(K,[-1,1]) = \alpha > 0$. Luego,

$$|F_\omega(z) - F_n(z)| \leq \frac{\| Q_n \|_{[-1,1]}^2}{|Q_n(z)|^2} \frac{c_0}{2},$$

siendo $c_0 = \int_{-1}^{1} \omega(x)dx$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \text{lím sup}_{n\to\infty} |F_\omega(z) - F_n(z)|^{1/n} \quad &\leq \quad \text{lím sup}_{n\to\infty} \left[\frac{\|Q_n\|_{[-1,1]}^2}{|Q_n(z)|^2} \right]^{1/n} \\ &\leq \quad \frac{\left[\text{lím sup}_{n\to\infty} \|Q_n\|_{[-1,1]}^{1/n}\right]^2}{\left[\text{lím inf}_{n\to\infty} |Q_n(z)|^{1/n}\right]^2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, por el Teorema 1.9 se sigue

$$\limsup_{n\to\infty} |F_\omega(z) - F_n(z)|^{1/n} \leq \left| \frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}} \right|^2 = |\varphi(z)|^2 \leq \| \varphi \|_K^2,$$

concluyendo la demostración. $\square$

Teorema 1.28 *Sea f analítica en un entorno abierto $U \subset [-1,1]$ y sea $\{I_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de fórmulas Gaussianas para una función peso $\omega(x)$ en $[-1,1]$. Entonces:*

$$\limsup_{n\to\infty} |I_\omega(f) - I_n(f)|^{1/n} \leq \gamma^2(f) < 1$$

donde $\gamma(f) = \| \varphi \|_\Gamma$, siendo $\varphi(z) = z - \sqrt{z^2-1}$ y Γ la frontera de U.

Demostración: Utilizando la fórmula (1.79) del Teorema 1.25, deducimos:

$$|I_\omega(f) - I_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [F_\omega(z) - F_n(z)]\, |f(z)||dz|.$$

Si denotamos por $L(\Gamma)$ la longitud de la curva Γ, entonces

$$|I_\omega(f) - I_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi i} \parallel f \parallel_\Gamma L(\Gamma) \parallel F_\omega - F_n \parallel_\Gamma .$$

Así, por el Teorema (1.27) se sigue la demostración. $\square$

El parámetro $v = \frac{1}{\gamma^2(f)} > 1$ nos da una estimación de la velocidad de convergencia. Veamos cómo calcularlo. En efecto:

$$\gamma(f) = \parallel \varphi \parallel_\Gamma = sup_{z\in\Gamma} \left| z - \sqrt{z^2-1} \right|$$

siendo Γ la frontera de U. Consideremos ahora la transformación $\omega = \psi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ sí y sólo si $z = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$, de modo que $\omega \in \mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| = 1\}$ sí y sólo si $z \in [-1, 1]$. Por tanto, $|\omega| = |\psi(z)| > 1$, para todo $z \notin [-1, 1]$. Consideremos $\rho > 1$ y determinemos el lugar geométrico de los puntos del plano z tales que $|z + \sqrt{z^2-1}| = \rho$ sí y sólo si $|\omega| = \rho$. Ahora bien, $|\omega| = \rho$ implica $\omega = \rho e^{i\theta}$ y $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$, luego

$$z = x + iy = \frac{1}{2}\left[\rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}\right].$$

Por tanto,

$$x = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\theta \ , \ \ y = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\mathrm{sen}\theta \ , \ \theta \in [0, 2\pi],$$

que como es sabido, representan las ecuaciones paramétricas de una elipse centrada en el origen y semieje real $a = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ y semieje imaginario $b = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$. Además, $2a + 2b = 2\rho$ y $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{4}\left(\rho^2 + \rho^{-2} + 2\right) - \frac{1}{4}\left(\rho^2 + \rho^{-2} - 2\right) = 1$ implicando que $c = \pm 1$. Por consiguiente, dado $\rho > 1$, el conjunto $E(\rho) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z + \sqrt{z^2-1}| = \rho\}$ representa una elipse centrada en el origen con focos en ± 1 y donde la suma de los ejes real e imaginarios es 2ρ. Además, si $\rho \to 1^+$, $b \to 0$ y $a \to 1$. Esto quiere decir que tomando ρ próximo a uno, la elipse $E(\rho) \subset U$. Así pues, tomando $\Gamma = E(\rho)$, deducimos:

$$\begin{aligned}\gamma(f) \ &= \parallel \varphi \parallel_{E(\rho)} = \sup_{z\in E(\rho)} \left| z - \sqrt{z^2-1} \right| \\ &= \sup_{z\in E(\rho)} \frac{1}{\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|} = \frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, una estimación de la velocidad de convergencia será $V = \frac{1}{\gamma^2(f)} = \rho^2$. Por ejemplo, tomemos la función $f(x) = \frac{e^x}{(x-3)(x^2+1)}$, cuyas singularidades polares están localizadas en $x = 3$ y $x = \pm i$. Por tanto, podemos tomar una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a < 3$ y $b < 1$, esto es, $\rho + \frac{1}{\rho} < 6$ y $\rho - \frac{1}{\rho} < 2$. Así podemos tomar $\rho = 2$. Por consiguiente,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |I_\omega(f) - I_n(f)|^{1/n} \leq \frac{1}{4}$$

y una estimación de la velocidad de convergencia sería: $V = 4$.

Capítulo 2

Polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad

2.1. Integración aproximada de funciones periódicas

A lo largo del Capítulo 1, hemos visto el papel que juegan los polinomios ortogonales cuando queremos aproximar una integral del tipo $I_\sigma(f) = \int_a^b f(x)\sigma(x)dx$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ y siendo $\sigma(x)$ una función peso, mediante una fórmula de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$.

En lo que sigue nos vamos a seguir ocupando del cálculo aproximado de integrales pero donde el integrando ahora es una función periódica de periodo 2π, esto es, integrales de la forma:

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\omega(\theta)d\theta, \tag{2.1}$$

siendo f periódica y $\omega(\theta)$ una función peso, de modo que $f\omega$ sea integrable en $[-\pi, \pi]$. Obviamente, podríamos intentar aproximar (2.1) por una fórmula de cuadratura Gaussiana del tipo estudiado en el Capítulo 1. Nos obstante, la propia naturaleza del integrando en (2.1) por un lado y el significado de las cuadraturas Gaussianas por otro, no parece aconsejable usar estas últimas.

En efecto, téngase en cuenta que si $I_n(f)$ representa la $n-$ésima fórmula Gaussiana respecto a $\omega(\theta)$, entonces $I_n(f) = I_\omega(P_n(f;\cdot))$, siendo $P_n(f;\theta)$ el polinomio (algebraico) de grado a lo sumo $n-1$ que interpola a f en los n ceros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ del $n-$ésimo polinomio ortogonal respecto a $\omega(\theta)$. En definitiva, para aproximar (2.1) reemplazamos $f(\theta)$ por un polinomio algebraico que aproxima a f en un cierto sentido (interpolación). Tal fenómeno se puede ilustrar con algunos experimentos sencillos, tomando por ejemplo $\omega(\theta) = 1,\ \forall\theta \in [-\pi, \pi]$ y comparando los resultados que ofrecen las fórmulas de "Gauss- Legendre" en $[-\pi, \pi]$ con los que ofrece la "Regla Trapezoidal". Tomando en cuenta la propiedad fundamental que toda función continua y periódica también se puede aproximar uniformemente por polinomios trigonométricos, parece más natural utilizar tales polinomios en lugar de los polinomios algebraicos. A tal efecto, recordemos que un polinomio trigonométrico de grado m es una función de la forma

$$T_m(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos k\theta + b_k \mathrm{sen} k\theta)\,,\ a_o,\ a_k,\ b_k \in \mathbb{R}.$$

Al propio tiempo diremos que $T_m(\theta)$ tiene "grado exacto" m si $|a_m| + |b_m| > 0$.

A modo de motivación, vamos a considerar una integral del tipo (2.1) con función peso $\omega(\theta) = 1,\ \forall\theta \in [-\pi, \pi]$, es decir

$$I(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta, \tag{2.2}$$

la cual estimamos por una fórmula de cuadratura

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j),\ \theta_i \neq \theta_j,\ \forall i \neq j,\ \theta_j \in [-\pi, \pi]. \tag{2.3}$$

Ahora los "nodos" θ_j y los "pesos" λ_j se van a determinar imponiendo que $I_n(f)$ "integre exactamente" polinomios trigonométricos del mayor grado posible, esto es, $I(T) = I_n(T)$, T polinomio trigonométrico. En tal sentido, diremos que que la fórmula (2.3) tiene "grado de precisión trigonométrica" m, si es exacta para cualquier polinomio trigonométrico de grado m, pero existe un polinomio de grado $m+1$ para el que no lo es.

Es fácil verificar que no importa cómo tomemos los nodos θ_j y los pesos λ_j en (2.3), que dicha fórmula no puede tener grado de precisión trigonométrica igual a n. Para ello, basta considerar la función $T_n(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)$ y comprobar, por inducción, que se trata de un polinomio trigonométrico de grado exacto n. Para tal polinomio, se cumple

$$I(T_n) = \int_{-\pi}^{\pi} T_n(\theta)d\theta > 0, \text{ e } I_n(T_n) = 0,$$

ya que, claramente, $T_n(\theta_k) = 0, \ \forall k = 1, \ldots, n$.

Vemos pues que el máximo grado de precisión trigonométrica alcanzable es $n-1$ y enseguida nos preguntamos: ¿Se podrá elegir adecuadamente los nodos θ_j y los pesos λ_j en (2.3) para alcanzar dicho grado máximo? Fijado n, ¿será única la fórmula de cuadratura.

Vamos a responder a tales interrogantes comprobando cómo el máximo grado de precisión $n-1$ se alcanza con nodos igualmente espaciados y con los pesos todos iguales, esto es,

$$\lambda_j = \frac{2\pi}{n}, \ j = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

En efecto, consideremos cualquier conjunto de nodos igualmente espaciados sobre el eje real con amplitud $h = \frac{2\pi}{n}$. Sea α el nodo de tal conjunto más próximo a $-\pi$ por la derecha o coincidiendo con $-\pi$. Claramente, los nodos $\theta_j = \alpha + jh, \ (j = 0, \ldots, n-1)$ se encuentran en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Tomando tales puntos como nodos, definiremos

$$I_n(f) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\alpha + (j-1)\frac{2\pi}{n}\right) \tag{2.5}$$

y comprobamos que es exacta para todo polinomio trigonométrico de grado a lo sumo $n-1$. Así pues, hemos de verificar las siguientes tres condiciones

$$I_n(1) = I(1) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \tag{2.6}$$

$$I_n(\cos j\theta) = I(\cos j\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos j\theta d\theta, \ j = 1, \ldots, n-1. \tag{2.7}$$

$$I_n(\cos j\theta) = I(\cos j\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos j\theta d\theta,\ j = 1, \ldots, n-1. \tag{2.8}$$

La condición (2.6) es evidentemente cierta en virtud de cómo se han elegido los pesos. Para justificar (2.7) y (2.8), haremos uso de la fórmula de Euler $e^{ij\theta} = \cos j\theta + i\mathrm{sen} j\theta$, por lo que será suficiente probar que

$$I_n(e^{ij\theta}) = I(e^{ij\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\theta} d\theta,\ j = 1, \ldots, n-1. \tag{2.9}$$

Ahora bien, para $j = 1, \ldots, n-1$,

$$I(e^{ij\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\theta} d\theta = \frac{1}{ij}\left(e^{ij\pi} - e^{-ij\pi}\right) = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} I_n(e^{ij\theta}) &= \tfrac{2\pi}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} e^{ij\theta_k} = \tfrac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ij\left(\alpha + (k-1)\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \tfrac{2\pi}{n} e^{ij\alpha} \textstyle\sum_{k=1}^{n} e^{ij(k-1)h} = \tfrac{2\pi}{n} e^{ij\alpha} \frac{e^{ij2\pi}-1}{e^{ij\pi}-1} = 0. \end{aligned}$$

De este resultado, válido para la función peso $\omega(\theta) = 1$, se pueden deducir varias conclusiones:

1. Dado que los nodos dependen de un parámetro arbitrario α, las fórmulas con máximo grado de precisión (algebraica) no son únicas. Es más, tenemos una familia “uniparamétrica” de fórmulas. Esto parece lógico pues $I_n(f)$ depende de $2n$ parámetros y logramos la máxima “exactitud” en el espacio de los polinomios trigonométricos de grado a lo sumo $n-1$, cuya dimensión es $2n-1$.

2. Sea τ un complejo de módulo unidad, esto es, $\tau = e^{i\beta},\ \beta \in \mathbb{R}$ y consideremos la ecuación:

$$z^n - \tau = 0, \tag{2.10}$$

cuyas raíces son $z_k = e^{i\ \frac{\beta + 2(k-1)\pi}{n}}$, $k = 1, \ldots, n$. Así pues:

$$\theta_k = \alpha + (k-1)\frac{2\pi}{n},\ k = 1, \ldots, n \text{ y } \alpha = n\beta.$$

Es decir, los nodos de las fórmulas con máximo grado de percisión son los argumentos de las raíces de la ecuación (2.10), todas situadas sobre la circunferencia unidad.

3. Supongamos que $I(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta$ se aproxima por la regla Trapezoidal $T_n(f)$ con $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}$, entonces resulta:

$$\begin{aligned} T_n(f) &= \tfrac{2\pi}{n} \left(\tfrac{f(-\pi)}{2} + f(-\pi + h) + f(-\pi + 2h) + \ldots + \right. \\ &\left. + f(-\pi + (n-1)h) + \tfrac{f(\pi)}{2} \right). \end{aligned}$$

Dado que f es periódica de periodo 2π, se tiene que $f(-\pi) = f(\pi)$ y por tanto:

$$T_n(f) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\alpha + (j-1)h\right) = I_n(f), \text{ con } \alpha = -\pi.$$

Como veremos en el Capítulo 3, esta relación nos va a permitir justificar los "buenos" resultados numéricos que proporciona la Regla Trapezoidal frente a la Gaussiana en la integración de funciones periódicas..

4. Para $n = 0, 1, \ldots$ definamos $\rho_n(z) = z^n$ y el producto interior:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \overline{g\left(e^{i\theta}\right)} d\theta,$$

en la clase de las funciones definidas e integrables sobre la circunferencia unidad. Es fácil justificar que:

$$\langle \rho_n, \rho_m \rangle = k_n \delta_{n,m}, \; k_n > 0,$$

y decimos que $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ representa una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a la función peso $\omega(\theta) = 1, \; \forall \theta \in [-\pi, \pi]$.

Si introducimos los polinomios recíprocos $\rho_n^*(z) = z^n \overline{\rho_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, la ecuación (2.10), se puede escribir como:

$$B_n(z, \tau) = \rho_n(z) + \tau \rho_n^*(z), \; (|\tau| = 1).$$

Los polinomios $B_n(z,\tau)$ van a jugar un papel fundamental a lo largo de Capítulo 3.

A la vista de tales conclusiones, cabe preguntarse: ¿Se puede hacer un desarrollo análogo cuando en lugar de tener función peso $\omega(\theta) = 1,\ \forall\theta \in [-\pi,\pi]$, tenemos una función peso arbitraria? El responder a esta cuestión es básicamente el objetivo del curso. Para ello, tendremos que utilizar la teoría de los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, también llamados polinomios de Szegő, la cual desarrollaremos en este Capítulo, dedicando el Capítulo 3 a la construcción de las fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos y funciones peso arbitrarias. A tal efecto, comenzaremos considerando sucesiones de polinomios ortogonales respecto a un producto interior generado por una medida arbitraria μ con soporte en el plano complejo.

2.2. Polinomios ortogonales en el plano complejo

Sea μ una medida positiva de Borel y consideremos el espacio de Hilbert

$$L_2(\mu) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} :\ \int |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty\}.$$

Denotemos por $supp(\mu)$ al soporte de la medida, es decir

$$supp(\mu) = \{z \in \mathbb{C} :\ \mu\,(B_{z,\epsilon}) > 0,\ \forall\epsilon > 0\}, \tag{2.11}$$

donde $B_{z,\epsilon} = \{w \in \mathbb{C} :\ \ |w - z| < \epsilon\}$ y supongamos que $supp(\mu)$ es compacto y contiene infinitos puntos.

La medida μ genera el siguiente producto interior definido en $L_2(\mu)$:

$$\langle f, g\rangle = \int f(z)\overline{g(z)}d\mu(z),\ f, g \in L_2(\nu).$$

Como $supp(\mu)$ es infinito, el sistema $\{1, z, \ldots, z^n\}$ es linealmente independiente en $L_2(\mu)$ y, utilizando el proceso de ortogonlaización de Gram- Schmidt, podemos construir un sistema ortogonal de polinomios $\{\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_n\}$ verificando:

$$\langle\psi_n, \psi_m\rangle = \int \psi_n(z)\overline{\psi_m(z)}d\nu(z) = 0,\ m \neq n,$$

Si además,

$$\|\psi_n\|^2 = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = \int |\psi_n(z)|^2 d\mu(z) = 1,$$

entonces diremos que $\{\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_n\}$ es un sistema ortonormal de funciones.

Denotemos por φ_n al $n-$ésimo polinomio ortonormal con respecto a μ, el cual quedarán unívocamente determinado, salvo factor multiplicativo de módulo unidad. Estas funciones ortonormales se pueden expresar en términos de la matriz de Gram:

$$G_n = \begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle z, 1 \rangle & \ldots & \langle z^n, 1 \rangle \\ \langle 1, z \rangle & \langle z, z \rangle & \ldots & \langle z^n, z \rangle \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle 1, z^n \rangle & \langle z, z^n \rangle & \ldots & \langle z^n, z^n \rangle \end{pmatrix}$$

Por ello, conviene observar que, al tratarse de un producto hermitiano, $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$. Por consiguiente, la matriz G_n es siempre Hermitiana y definida positiva. Como consecuencia se tiene que

$$\Delta_n = det(G_n) = \begin{vmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle z, 1 \rangle & \ldots & \langle z^n, 1 \rangle \\ \langle 1, z \rangle & \langle z, z \rangle & \ldots & \langle z^n, z \rangle \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle 1, z^n \rangle & \langle z, z^n \rangle & \ldots & \langle z^n, z^n \rangle \end{vmatrix} > 0. \tag{2.12}$$

Teorema 2.1 *Las funciones φ_n ortonormales se pueden expresar en la forma:*

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle z, 1 \rangle & \ldots & \langle z^n, 1 \rangle \\ \langle 1, z \rangle & \langle z, z \rangle & \ldots & \langle z^n, z \rangle \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle 1, z^{n-1} \rangle & \langle z, z^{n-1} \rangle & \ldots & \langle z^n, z^{n-1} \rangle \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

Demostración: Bastaría probar las condiciones de ortogonalidad:

$$\langle \varphi_n, z^k \rangle = 0, \; k = 0, \ldots, n-1.$$

Por fórmula (2.13), se tiene:

$$\langle \varphi_n(z), z^k \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle z, 1 \rangle & \ldots & \langle z^n, 1 \rangle \\ \langle 1, z \rangle & \langle z, z \rangle & \ldots & \langle z^n, z \rangle \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle 1, z^{n-1} \rangle & \langle z, z^{n-1} \rangle & \ldots & \langle z^n, z^{n-1} \rangle \\ \langle 1, z^k \rangle & \langle z, z^k \rangle & \ldots & \langle z^n, z^k \rangle \end{vmatrix},$$

y cuando $k = 0, \ldots, n-1$, el determinante es cero.

Sólo resta probar la ortonormalidad, es decir: $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 1$. Observar que

$$\langle \varphi_n(z), z^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \Delta_n = \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}.$$

De (2.13) vemos que la función φ_n se puede expresar como combinación lineal de $\{1, z, \ldots, z^n\}$ en la forma:

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}} z^n + \gamma_{n-1}, \; \gamma_{n-1} \in \Pi_{n-1},$$

y por consiguiente:

$$\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}} \langle \varphi_n(z), z^n \rangle = 1.$$

□

Por tanto, el sistema ortonormal de polinomios $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ es único si imponemos que el coeficiente director κ_n de φ_n sea positivo, es decir,

$$\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \ldots + \varphi_n(0), \; \kappa_n > 0.$$

El lo que sigue, el enésimo polinomio ortogonal mónico será denotado por $\rho_n(z)$, esto es, $\rho_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\kappa_n}$.

Con el objetivo de dar un resultado sobre la localización de los ceros de φ_n, probaremos primero la siguiente propiedad minimal de estos polinomios:

Proposición 2.2.1 *El mínimo de* $\|q_n\|_{L_2(\mu)} = \left(|q_n(z)|^2 d\mu(z)\right)^{1/2}$ *para todo* $q_n \in \Pi_n$ *mónico se alcanza cuando* $q_n(z) = \rho_n(z)$ *y el mínimo es igual a* $\frac{1}{k_n}$.

Demostración: Sea $q_n(z) \in \Pi_n$ mónico, entonces podemos escribir

$$q_n(z) = \rho_n(z) + r_{n-1}(z),$$

con $r_{n-1} \in \Pi_{n-1}$ y, por ortogonalidad, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int |q_n(z)|^2 d\mu(z) \quad &= \int |\rho_n(z)|^2 d\mu(z) + \int |r_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) + \\
&+ 2\Re\left(\int \rho_n(z)\overline{r_{n-1}(z)} d\mu(z)\right) \\
&= \int |\rho_n(z)|^2 d\mu(z) + \int |r_{n-1}(z)|^2 d\mu(z).
\end{aligned}$$

Notar que la expresión

$$\int |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \int |\rho_n(z)|^2 d\mu(z) + \int |r_{n-1}(z)|^2 d\mu(z),$$

es mínima cuando $\int |r_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) = 0$, es decir, $r_{n-1}(z) = 0, \ \forall z$, ya que, por hipótesis, la medida μ tiene infinitos puntos en su soporte y r_{n-1} tiene $n-1$ ceros. Por tanto, el mínimo se alcanza para $q_n(z) = \rho_n(z)$ y además, por ser φ_n ortonormal, se tiene que $\|q_n\| = \frac{1}{k_n}$. $\square$

Definición 2.1 *Sea* $A \subset \mathbb{C}$, *la envolvente convexa* $\mathcal{C}_0(A)$ *de* A *se define como:*

$$\mathcal{C}_0(A) = \bigcap_{\substack{A \subset G \subset \mathbb{C} \\ G \text{ convexo}}} G$$

Ahora ya estamos en posición de demostrar el siguiente

Teorema 2.2 *Sea* $\rho_n(z)$ *el* $n-$*ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a* μ. *Entonces, todos los ceros de* ρ_n *están en* $\mathcal{C}_0(supp(\mu))$.

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que $\exists z_0 \notin \mathcal{C}_0(supp(\mu)) : \ \rho_n(z_0) = 0$. Entonces ρ_n se puede expresar en la forma: $\rho_n(z) = (z - z_0)q(z)$, donde $q \in \Pi_{n-1}$. Como $z_0 \notin \mathcal{C}_0(supp(\mu))$, existe una recta L que separa z_0 de $supp(\mu)$. Sea $\hat{z}_0$ la proyección ortogonal de z_0 sobre la recta L. Entonces, $|z-\hat{z}_0| < |z-z_0|$, $\forall z \in supp(\mu)$. Si denotamos por $\mathcal{Z}_q$ al conjunto de ceros de q, se tiene que:

$$|(z-\hat{z}_0)q(z)| < |(z-z_0)q(z)| = |\rho_n|,\ \forall z \in supp(\mu) \setminus \mathcal{Z}_q.$$

Como $supp(\mu)$ es infinito,

$$\int |(z-\hat{z}_0)q(z)|^2 d\mu(z) < \int |\rho_n|^2 d\mu(z),$$

lo cual contradice el Teorema 2.2.1. $\square$

TEOREMA 2.3 *Si $\mathcal{C}_0(supp(\mu))$ no es un segmento, entonces los ceros de ρ_n están en el interior de $\mathcal{C}_0(supp(\mu))$.*

Demostración: Denotemos por Γ a la frontera de $\mathcal{C}_0(supp(\mu))$ y supongamos que $\exists z_0 \in \Gamma :\ \rho_n(z_0) = 0$. Sin pérdida de generalidad, por rotación y traslación, podemos suponer que $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ y que $\mathcal{C}_0(supp(\mu))$ está a la izquierda de la recta L vertical que pasa por x_0. Escribamos $\rho_n(z) = (z-x_0)q(z)$, con $q \in \Pi_{n-1}$. Entonces si

$$f(x) = \int |(z-x)q(z)|^2 d\mu(z) = \int \left(|z|^2 + x^2 - 2x\Re z\right) |q(z)|^2 d\mu(z),\ x \in \mathbb{R}.$$

por Teorema 2.2.1, sabemos que en $x = x_0$ se alcanza el mínimo de la función f y por tanto $f^{'}(x_0) = 0$, es decir,

$$\int (2x_0 - 2\Re z)\,|q(z)|^2 d\mu(z) = 0.$$

Como $\mathcal{C}_0(supp(\mu))$ está a la izquierda de la recta L vertical que pasa por x_0, se tiene que $2x - 2\Re z \geq 0,\ \forall\ z \in \mathcal{C}_0(supp(\mu))$ y, por tanto,

$$(2x - 2\Re z)\,|q(z)|^2 = 0,\ \text{casi por todo}.$$

Esto implica que sólo un número finito de puntos de $supp(\mu)$ están a la izquierda de la recta L y que además deben ser ceros de q. Como por hipótesis $\mathcal{C}_0(supp(\mu))$ no es un intervalo, podemos encontrar un punto $\xi_0 \in \mathcal{C}_0(supp(\mu)) \bigcap \Gamma$ tal que $\xi \notin L$ y $q(\xi) = 0$ y, utilizando el mismo argumento anterior, es decir, reemplazando z_0 por ξ_0, se tiene que la recta L tiene sólo un número finito de puntos de $supp(\mu)$ y por tanto $supp(\mu)$ es finito, lo cual es una contradicción. $\square$

Por otro lado, conviene señalar que las funciones ortogonales se utilizan en la resolución del llamado " problema de mínimos cuadrados". A saber: "Dada $f \in L_2(\mu)$, y $n \in \mathbb{N}$, encontrar $P_n \in \Pi_n$ tal que $\int |f(z) - P_n(z)|^2 d\mu(z)$ sea mínimo".

Este problema tiene solución, es única y se puede escribir en términos del sistema ortonormal $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de la forma (ver [13]): $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z)$, donde $a_k = \langle f, \varphi_k \rangle,\ k = 0, \ldots, n$ son los llamados *coeficientes de Fourier* y a $P_n(z)$ se le denomina *suma de Fourier*. Así,

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\int f(\xi) \overline{\varphi_k(\xi)} d\mu(\xi) \right) \varphi_k(z) \\ &= \textstyle\int K_n(z,\xi) f(\xi) d\mu(\xi), \end{aligned}$$

donde $K_n(z,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)}$.

Observar que si $q_n \in \Pi_n$, entonces, su correspondiente suma de Fourier coincide con el propio polinomio y se tiene que:

$$q_n(z) = \int K_n(z,\xi) q_n(\xi) d\mu(\xi).$$

Por esta razón, al núcleo $K_n(z,\xi)$ se le denomina *núcleo reproductor* y verifica la siguiente

PROPOSICIÓN 2.2.2 *El mínimo de* $\|q_n\|_{L_2(\nu)} = \int \left(|q_n(z)|^2 d\nu(z) \right)^{1/2}$ *para todo* $q_n \in \Pi_n$ *con* $q_n(\xi) = 1$, *se alcanza cuando* $q_n(z) = \frac{K_n(z,\xi)}{K_n(\xi,\xi)}$ *y el mínimo es igual a* $\frac{1}{K_n(\xi,\xi)}$.

Demostración: Expresando el polinomio q_n en términos de su suma de Fourier en la base ortonormal $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, obtenemos

$$q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z)$$

y, por ortogonalidad, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|q_n\|_{L_2(\nu)} &= \textstyle\int |q_n(z)|^2 d\nu(z) = \int q_n(z) \overline{q_n(z)} d\nu(z) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k \overline{a}_j \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, la condición de que $q_n(\xi) = 1$ se traduce en $\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(\xi) = 1$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$1 = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(\xi)\right|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(\xi)|^2\right),$$

de forma que se tiene la siguiente desigualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \geq \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(\xi)|^2}.$$

Observar que la igualdad se alcanza cuando $a_k = C\varphi_k(\xi)$, donde $C = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(\xi)|^2}$. □

Hasta ahora hemos partido de una medida arbitraria μ con soporte en el plano complejo. En el resto del capítulo nos vamos a restringir a medidas soportadas sobre la circunferencia unidad, y dando lugar a los llamados polinomios de Szegő o polinomios ortogonales sobre la misma. Por otro lado, cuando el soporte de μ es un intervalo del eje real y la medida es absolutamente continua, esto es, $d\mu(x) = \omega(x)dx$, (ω función peso), la teoría sobre polinomios ortogonales desarrollada en el Capítulo 1 queda englobada dentro de este marco más general.

2.3. Polinomios de Szegő. Propiedades generales

Supongamos ahora que μ es una medida positiva sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z : \ |z| = 1\}$ y supongamos que $d\mu(\theta) = \omega(\theta)d\theta$ es la derivada de Radon- Nikodyn de μ con respecto a la medida de Lebesgue. En este caso las entradas de la matriz de Gram vienen dadas por:

$$\langle z^n, z^m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m-n)\theta}\omega(\theta)d\theta = \mu_{m-n},$$

donde, para todo $k \in \mathbb{Z}$, μ_k son los llamados *momentos trigonométricos* con respecto a ω, es decir,

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

En este caso, la matriz de Gram , a la que se le suele denotar por T_n, se puede expresar como

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix}.$$

A esta matriz Hermitiana con valor constante en cada diagonal, se le denomina matriz de *Toeplitz*.

Si φ_n denota el $n-$ésimo polinomio ortonormal con respecto a ω, entonces, por Teorema 2.1, se tiene que

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix} = \kappa_n z^n + \ldots, \quad (2.15)$$

donde $\kappa_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$.

A φ_n también se le denomina: $n-$ésimo polinomio ortonormal de Szegő.

Definición 2.2 *Sea $\rho_n(z)$ el $n-$ésimo polinomio mónico de Szegő, es decir, $\rho_n(z) = \frac{1}{\kappa_n}\varphi_n(z)$. Entonces, el correspondiente polinomio recíproco viene dado por:*

$$\rho_n^*(z) = z^n \overline{\rho_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}. \quad (2.16)$$

Es fácil ver que estos polinomios satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad respecto a ω :

$$\langle \rho_n^*(z), z^k \rangle_\omega = 0, \ k = 1, \ldots, n.$$

De igual forma que se hizo en el Capítulo 2 para el caso real, nos centraremos ahora en dar propiedades de los polinomios de Szegő, relativos a la localización de ceros, fórmulas de recurrencia y fórmula de Christoffel-Darboux.

En cuanto a la localización de ceros, bastaría aplicar directamente el Teorema 2.3, para concluir que,

Teorema 2.4 *Para cada n los ceros de $\varphi_n(z)$ están en $\mathbb{D}$.*

A continuación daremos algunos resultados relativos al núcleo reproductor $K_n(z,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(z)}$.

Proposición 2.3.1 *Sea $\{\varphi_n(z)\}_n$ la sucesión de polinomios ortonormales de Szegő respecto a ω. Si $K_n(z,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(z)}$ es el correspondiente núcleo reproductor, entonces:*

$$K_n(z,0) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(0)} = \kappa_n \varphi_n^*(z), \tag{2.17}$$

y

$$K_n(0,0) = \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(0)|^2 = \kappa_n^2. \tag{2.18}$$

Demostración: Si $q_n \in \Pi_n$ mónico, entonces $q_n^*(z)$ es un polinomio de grado a lo sumo n con $q_n^*(0) = 1$ y

$$\min_{\substack{q_n \in \Pi_n \\ q_n \text{ mónico}}} \int_{-\pi}^{\pi} |q_n(z)|^2 \omega(\theta) d\theta = \min_{\substack{q_n^* \in \Pi_n \\ q_n * (0) = 1}} \int_{-\pi}^{\pi} |q_n^*(z)|^2 \omega(\theta) d\theta,$$

donde $z = e^{i\theta}$. Por tanto, haciendo uso de las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2, se tiene que: $\kappa_n^2 = K_n(0,0)$ y $\rho_n^*(z) = \frac{K_n(z,0)}{K_n(0,0)}$. □

Como consecuencia de (2.18) se tiene otra forma alternativa de demostrar el Teorema 2.4. En efecto, por el Teorema 2.2 sabemos que los ceros $\{z_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ de $\rho_n(z)$ están en el disco unidad cerrado, por tanto $|\rho_n(0)| = \prod_{j=1}^{n} |z_{j,n}| \leq 1$. Bastaría entonces probar que $|\rho_n(0)| < 1$. En efecto, por (2.18) se tiene que:

$$\kappa_n^2 - \kappa_{n-1}^2 = |\varphi_n(0)|^2 = \kappa_n^2 |\rho_n(0)|^2, \tag{2.19}$$

dividiendo toda la ecuación por $\kappa_n^2 > 0$, obtenemos:

$$\left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\right)^2 = 1 - |\rho_n(0)|^2 > 0. \tag{2.20}$$

$\square$

Por otro lado, y como consecuencia de (2.17) se puede probar la siguiente fórmula de recurrencia para los polinomios de Szegő:

TEOREMA 2.5 *Si $\varphi_n(z)$ es el $n-$ésimo polinomio ortonormal de Szegő, entonces*

$$\begin{aligned} \kappa_{n-1} z\varphi_{n-1}(z) &= \kappa_n \varphi_n(z) - \varphi_n(0)\varphi_n^*(z) \\ \kappa_{n-1} z\varphi_n(z) &= \kappa_n z\varphi_{n-1}(z) - \varphi_n(0)\varphi_{n-1}^*(z) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Demostración: De (2.17) podemos deducir que

$$\kappa_n \varphi_n^*(z) - \kappa_{n-1}\varphi_{n-1}^*(z) = \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(0)}.$$

Entonces,

$$\kappa_n \varphi_n(z) - \kappa_{n-1}\varphi_{n-1}(z) = \varphi_n^*(z)\varphi_n(0).$$

Por otro lado, eliminando $\varphi_n^*(z)$ de las dos últimas ecuaciones, se tiene que:

$$\kappa_n^2\varphi_n(z) - \kappa_n\kappa_{n-1} z\varphi_{n-1}(z) - \kappa_{n-1}\varphi_n(0)\varphi_{n-1}^*(z) = \varphi_n(z)|\varphi_n(0)|^2.$$

Teniendo en cuenta (2.19), se concluye la demostración. $\square$

Observar que para los polinomios de Szegő mónicos $\rho_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\kappa_n}$, las relaciones de recurrencia tienen la forma:

$$\begin{aligned} &\rho_0(z) = \rho_0^*(z) = 1, \text{ (condición inicial)} \\ &\rho_n(z) = z\rho_{n-1}(z) + \rho_n(0)\rho_{n-1}^*(z) \quad n = 1, 2, 3, ... \\ &\rho_n^*(z) = \overline{\rho_n(0)} z\rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z) \quad n = 1, 2, 3, ... \end{aligned} \tag{2.22}$$

A los números $\rho_n(0)$ $n = 1, 2, 3..$ se les denomina *coeficientes de reflexión* o también *parámetros de Shur*.

Recíprocamente, se puede probar que si $\{\rho_n\}_n$ es una sucesión de polinomios que satisface las relaciones de recurrencia dadas por (2.22), entonces existe una única medida positiva μ con respecto a la cual dicha sucesión de polinomios es ortogonal. Este resultado se conoce con el nombre de *Teorema de Favard* ([18]).

Por otro lado, como consecuencia de esta fórmula de recurrencia, se puede obtener, en el caso de la circunferencia unidad, una expresión similar a la fórmula de Christoffel- Darboux para el caso real. En efecto, se puede probar el siguiente

TEOREMA 2.6 *Si $\varphi_n(z)$ es el $n-$ésimo polinomio ortonormal de Szegő, entonces:*

$$K_{n-1}(z,\xi) = \frac{\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\xi)} - \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)}}{1 - z\bar{\xi}}. \tag{2.23}$$

Demostración: Eliminando $\varphi_n(z)$ de las dos ecuaciones en (2.21), se tiene que:

$$\kappa_{n-1}\varphi_n^*(z) = z\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_n(0)} + \kappa_n\varphi_{n-1}^*(z). \tag{2.24}$$

Por un lado, de la segunda ecuación en (2.21), se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)} &= \kappa_{n-1}^{-2}(\kappa_n z\varphi_{n-1}(z) + \varphi_n(0)\varphi_{n-1}^*(z))\times \\
&\times(\kappa_n\bar{\xi}\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} + \overline{\varphi_n(0)\varphi_{n-1}^*(\xi)}) \\
&= \tfrac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}^2} z\bar{\xi}\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} + \\
&+ \tfrac{|\varphi_n(0)|^2}{\kappa_{n-1}^2} z\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)} + \\
&+ \tfrac{\kappa_n\overline{\varphi_n(0)}}{\kappa_{n-1}^2} z\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} + \\
&+ \tfrac{\kappa_n\varphi_n(0)}{\kappa_{n-1}^2}\bar{\xi}\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)}
\end{aligned}$$

De manera similar, usando (2.24)

$$\begin{aligned}
\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\xi)} &= \kappa_{n-1}^{-2}(\overline{\varphi_n(0)}z\varphi_{n-1}(z)+\kappa_n\varphi_{n-1}^*(z))\times\\
&\times(\varphi_n(0)\bar{\xi}\overline{\varphi_{n-1}(\xi)}+\kappa_n\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)})\\
&= \tfrac{|\varphi_n(0)|^2}{\kappa_{n-1}^2}z\bar{\xi}\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)}+\\
&+\tfrac{\kappa_n^2}{\kappa_{n-1}^2}\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)}+\\
&+\tfrac{\kappa_n\overline{\varphi_n(0)}}{\kappa_{n-1}^2}\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)}+\\
&+\tfrac{\kappa_n\varphi_n(0)}{\kappa_{n-1}^2}\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)}.
\end{aligned}$$

Restando estas dos últimas ecuaciones y aplicando (2.19), se tiene que

$$\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\xi)}-\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)}=\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)}-z\bar{\xi}\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)},$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
(1-z\bar{\xi})\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} &= \left(\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\xi)}-\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)}\right)-\\
&-\left(\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)}-\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)}\right).
\end{aligned}$$

Tomando sumatorios a ambos lados de la ecuación y teniendo en cuenta que en el segundo miembro aparece una suma telescópica, se tiene la demostración. □

Esta fórmula de Christoffel-Darboux para $\xi=z$, se reduce a

$$K_{n-1}(z,z)=\frac{|\varphi_n^*(z)|^2-|\varphi_n(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

Ejercicio: Probar de nuevo, utilizando ahora la fórmula anterior, que los ceros de φ_n están en $\mathbb{D}$.

Finalizamos esta sección con una propiedad asintótica de los polinomios de Szegő que se utilizarán en el siguiente Capítulo (véase [23]):

Lema 2.1 *Sea $\{\varphi_n(z)\}_n$ la sucesión de polinomios ortonormales de Szegő para $\omega(\theta)$ función peso en $[-1,1]$. Entonces, se verifica:*

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)}=z$, *uniformemente en compactos de* $\mathbb{T}\bigcup\mathbb{E}=\overline{\mathbb{E}}$.

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n(z)} = 0$, *uniformemente en compactos de* $\mathbb{E}$.

3. $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \rho_n(0) = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1$, *siendo* k_n *tal que* $\varphi_n(z) = k_n z^n + \ldots$.

2.4. Algoritmo de Levinson

En general, cabe decir que se conocen pocas medidas que den lugar a fórmulas explícitas para los correspondientes polinomios de Szegő. Así por ejemplo, para la medida de Lebesgue es fácil ver, como se hizo en la Sección 2.1, que el $n-$ésimo polinomio de Szegő mónico viene dado por $\rho_n(z) = z^n$. Si ahora consideramos modificaciones racionales de la medida de Lebesgue, es decir, $\omega(\theta)d\theta = \frac{d\theta}{2\pi|h(e^{i\theta})|^2}$ donde h es un polinomio de grado k tal que $h(z) = \prod_{j=1}^{k}(z-\alpha_j)$, $|\alpha_j| \neq 1$ y $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$, el correspondiente polinomio ortogonal vendrá dado por $\rho_n(z) = z^{n-k}h(z)$, $n \geq k$, ([17]). También se ha estudiado el caso de modificaciones racionales de una medida dada sobre la circunferencia unidad, ([16].) Por otro lado, para la familia de funciones peso $\omega(\theta)$ de tipo Jacobi, que viene dada por:

$$\begin{aligned} \omega(\theta) &= (1-\cos\theta)^{\alpha}(1+\cos\theta)^{\beta}|\mathrm{sen}\theta| \\ &= (1-\cos\theta)^{\alpha+1/2}(1+\cos\theta)^{\beta+1/2}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

con $\alpha, \beta > -1$, también se conocen explícitamente los polinomios de Szegő (ver [15],[24]). En el Capítulo 4 veremos cómo se calculan explícitamente los polinomios de Szegő para algunos de los casos particulares que acabamos de mencionar. En general, dada una medida arbitraria μ, tal y como hemos visto en la sección anterior, los polinomios de Szegő se pueden calcular mediante la fórmula (2.15) en términos de los determinantes de Toeplitz. Sin embargo, en la práctica, esta fórmula no se suele utilizar para el cómputo de los polinomios, sobre todo cuando n es grande. Por lo regular, los polinomios de Szegő se calculan haciendo uso del llamado *algoritmo de Levinson* ([4]) que está basado en las relaciones de recurrencia (2.21) que verifican estos polinomios. Recordemos que para los polinomios de Szegő mónicos, tales fórmulas de recurrencia vienen dadas por:

$$
\begin{array}{l}
\rho_0(z) = \rho_0^*(z) = 1 \\
\rho_n(z) = z\rho_{n-1}(z) + \delta_n \rho_{n-1}^*(z) \;\; n = 1, 2, 3, ... \\
\rho_n^*(z) = \overline{\delta}_n z\rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z) \;\; n = 1, 2, 3, ...
\end{array}
\tag{2.26}
$$

donde $\delta_n = \rho_n(0) \quad n = 1, 2, 3..$ son los coeficientes de reflexión. Estos coeficientes se pueden escribir en la forma:

$$
\begin{aligned}
\rho_n(0) \quad &= -\frac{(z\rho_{n-1}(z),1)_\omega}{(\rho_{n-1}^*(z),1)_\omega} = -\frac{\sum_{j=0}^{n-1} r_j^{(n-1)}(z^{j+1},1)_\omega}{\sum_{j=0}^{n-1} \bar{r}_j^{(n-1)}(z^{n-j-1},1)_\omega} \\
&= -\frac{\sum_{j=0}^{n-1} r_j^{(n-1)}\mu_{-j-1}}{\sum_{j=0}^{n-1} \bar{r}_j^{(n-1)}\mu_{j+1-n}},
\end{aligned}
$$

donde $\rho_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j^{(n-1)} z^j$ y $\mu_j = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ij\theta}\omega(\theta)d\theta;\; j \geq 0$. Como $\rho_0(z) = \rho_0^*(z) = 1$, podemos calcular $\rho_1(0)$, $\rho_1(z)$ y $\rho_1^*(z)$ ($r_0^{(0)} = r_1^{(1)} = 1$). Alternando estas fórmulas sucesivamente finalmente podremos calcular $\{\rho_n(0)\}$, $\{\rho_n(z)\}$ y $\{\rho_n^*(z)\}$.

Este algoritmo apareció en un contexto diferente dentro del campo del procesamiento de señale digitales, más concretamente, en el "problema del modelado autorregresivo" para una señal finita. En efecto, supongamos que tenemos una muestra finita de longitud N de una señal compleja $s(t) : s(0), s(1), \ldots, s(N-1)$, con $s(0) \neq 0$. Tomaremos por convenio $s(t) = 0$ para $t \leq -1$ y para $t \geq N$.

El problema del modelado autorregresivo consiste en encontrar un "filtro autorregresivo" junto con un "impulso de entrada". Un impulso de entrada es una señal de la forma $u(0)\delta_{t,0}$, donde $u(0) \in \mathbb{C}$ y $\delta_{t,0}$ es la delta de Kronecker. Un filtro autorregresivo de grado n se define como un esquema computacional recursivo que transforma una sucesión de números complejos de entrada $u(0), u(1), \ldots$, en una sucsión de números complejos de salida $v(0), v(1), \ldots$, de acuerdo con la ley

$$
v(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} v(t-i) = u(t), \; t = 0, 1, \ldots.
$$

El caso más sencillo sería suponer que $u(t) = 0$ para $t \geq 1$, por lo que el problema se reduce a determinar $u(0)$ (pulso de entrada) y los coeficientes $\{a_{n,i}\}_{i=1}^{n}$ del filtro, de forma que se minimice la norma Euclídea: $E_n = \sum_{t=0}^{N+n-1} |e_n(t)|^2$ donde

$$e_n(t) = s(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} s(t-i) - u(0)\delta_{t,0}.$$

Mediante cálculos elementales, se puede ver que las ecuaciones normales de este problema de mínimos cuadrados vienen dadas por:

$$u(0) = s(0), \tag{2.27}$$

$$T_n \begin{pmatrix} 1 \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

siendo T_n la matriz de Toeplitz

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix},$$

cuyos elementos vienen dados por

$$\mu_k = \sum_{t=k}^{N-1} s(t)\bar{s}(t-k). \tag{2.29}$$

El número σ_n es positivo y está unívocamente determinado por los datos. Del sistema (2.28), se deduce que el filtro autorregresivo $[1, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}]^\top$ es proporcional a la primera columna de la inversa de T_n. Además, se cumple que el mínimo de la norma Euclídea viene dado por

$$E_n = \sigma_n - s^2(0). \tag{2.30}$$

El algoritmo de Levinson es un procedimiento numérico que permite el cálculo de la solución de sistemas lineales de ecuaciones de la forma

(2.27)-(2.28), computando el vector solución de tal sistema de manera recursiva considerando subsistemas de Toeplitz de dimensión creciente formados con la sucesión anidada de submatrices (T_k : $k = 0, \ldots, n$) de la matriz T_n. En detalle, el mecanismo es el siguiente: Supongamos que conocemos $\sigma_{k-1}, a_{k-1,1}, \ldots, a_{k-1,n}$ para T_{k-1}. Entonces, podemos escribir:

$$T_k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{k,1} & a_{k-1,1} & \bar{a}_{k-1,k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,k-1} & a_{k-1,k-1} & \bar{a}_{k-1,1} \\ a_{k,k} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_k & \sigma_{k-1} & -\bar{\delta}_k \sigma_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_k \sigma_{k-1} & \sigma_{k-1} \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

donde δ_k es un número complejo definido por

$$\delta_k \sigma_{k-1} = -\sum_{i=0}^{k-1} \mu_{k-i} a_{k-1,i}, \tag{2.32}$$

con $a_{k-1,0} = 1$. De (2.31) y (2.32) se tiene que la solución relativa a T_k viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$a_{k,i} = a_{k-1,i} + \delta_k a_{k-1,k-i},\ i = 1, 2, \ldots, k, \tag{2.33}$$

$$\sigma_k = \sigma_{k-1}(1 - |\delta_k|^2). \tag{2.34}$$

El algoritmo de Levinson resulta entonces de aplicar las tres últimas ecuaciones: (2.32), (2.33) y (2.34), recursivamente con valores iniciales $a_{0,0} = 1$ y $\sigma_0 = \mu_0$.

La relación de este algoritmo con los polinomios de Szegő se establece mediante la ecuación (2.33). En efecto, sea $a_k(z)$ el polinomio construido a partir de las cantidades obtenidas mediante las ecuaciones (2.32), (2.33) y (2.34), es decir: $a_k(z) = \sum_{i=0}^{k} a_{k,i} z^i$, y consideremos su polinomio recíproco $b_k(z) = a_k^*(z)$. Se puede demostrar (hágase como ejercicio), que la igualdad (2.33) es equivalente a la relación de recurrencia

$$b_k(z) = z b_{k-1}(z) + \bar{\delta}_k b_{k-1}^*(z).$$

Aplicando ahora el Teorema de Favard, se concluye la existencia de una medida positiva μ respecto a la cual los polinomios mónicos $b_k(z)$ son ortogonales sobre $\mathbb{T}$.

En la literatura de la teoría de señales, al polinomio $a_k(z)$ se le denomina "polinomio predictor progresivo" y al polinomio $b_k(z)$ se le denomina "polinomio predictor regresivo".

Por otro lado, para el caso particular en el que la medida μ venga generada por una función peso simétrica, es decir, $d\mu(\theta) = \omega(\theta)d\theta$ tal que verifique $\omega(-\theta) = \omega(\theta)$, conviene observar que los momentos trigonométricos μ_k, $\forall k$, son reales y vienen dados por:

$$\mu_k = 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta\omega(\theta)d\theta.$$

Funciones peso ω simétricas aparecerán en el Capítulo 4, donde abordaremos una sección dedicada a la Teoría de señales digitales y su conexión con los polinomios de Szegő y con las fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad.

Por otro lado, se pueden contruír funciones peso ω simétricas en $[-\pi, \pi]$, a partir de una función peso dada $\sigma(\theta)$ en $[-1, 1]$, definiendo ω como sigue:

$$\omega(\theta) = \sigma(\cos\theta)|\text{sen}\theta|.$$

En el Capítulo 3, veremos el papel que juega la función peso ω así construida, a la hora de establecer conexiones entre el intervalo $[-1, 1]$ y la circunferencia unidad $\mathbb{T}$. Esta conexión se establecerá en términos, tanto de polinomios ortogonales como de fórmulas de cuadratura, en el intervalo $[-1, 1]$ y la circunferencia unidad, respectivamente.

Por tanto, cuando ω es simétrica, tal y como acabamos de ver, la sucesión de momentos $\{\mu_k\}_k$ es real y por tanto las matrices de Toeplitz son reales. En este caso, a la hora de computar los correspondientes polinomios de Szegő, conviene, en vez del algoritmo de Levinson, utilizar el llamado algoritmo de *Levinson-Split*, pues con él se reduce notablemente el número de operaciones: El número de multiplicaciones por escalares se reduce a la mitad (aunque el número de adiciones es aproximadamente el mismo).

Sin entrar en detalles, en esencia, el algoritmo de Levinson-Split no computa directamente los polinomios de Szegő $\{\rho_n(z)\}_n$ sino ciertas combinaciones de $\rho_n(z)$ y $\rho_n^*(z)$, a saber:

1. O bien: $\rho_n(z) + \rho_n^*(z)$,

2. O bien: $\rho_n(z) - \rho_n^*(z)$,

dando lugar a las versiones *simétrica* o *antisimétrica*, respectivamente, de dicho algoritmo.

Estas dos combinaciones son casos particulares de los llamados polinomios *para-ortogonales* que, como hemos dicho anteriormente, veremos en el siguiente Capítulo.

2.5. Polinomios de Szegő asociados de segunda especie

Los *polinomios de Szegő asociados de segunda especie*, a los que denotaremos por $\Omega_n(z)$, se definen en términos de los polinomios de Szegő $\rho_n(z)$ en la forma

$$\Omega_n(z) := \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z+e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}} \left(\rho_n(e^{i\theta}) - \rho_n(z)\right) d\mu(\theta) & \text{si} \quad n = 1, 2, 3, ... \\ -\mu_0 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Estos polinomios satisfacen las mismas relaciones de recurrencia que los polinomios ortogonales $\rho_n(z)$ pero con distinto dato inicial:

$$\begin{array}{l} \Omega_0(z) := -\mu_0, \quad \text{(dato inicial)} \\ z\Omega_{n-1}(z) - \delta_n \Omega_{n-1}^*(z) = \Omega_n(z), \; n = 1, 2, \ldots \\ \overline{\delta}_n z\Omega_{n-1}(z) - \Omega_{n-1}^*(z) = -\Omega_n^*(z), \; n = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{2.36}$$

donde $\delta_n = \rho_n(0)$ son los coeficientes de reflexión y $\Omega_n^*(z) = z^n \overline{\Omega_n(1/\bar{z})}$. En base a estas fórmulas de recurrencia dadas por (2.36), y por el Teorema de Favard ([18]), se puede deducir que la sucesión $\{\Omega_n\}$ de polinomios de Szegő asociados son también ortogonales con respecto a una medida positiva $d\widetilde{\mu}$ a la que se le denomina *medida de segunda especie asociada a μ.*

La medida de segunda especie se puede calcular haciendo uso de la llamada *transformada de Herglotz- Riesz* que, como veremos en el siguiente Capıtulo, aparece como solución al problema de interpolación de Caratheodory-Fejér el cual se enuncia como sigue: Dada una sucesión

$\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ de números complejos, consiste en encontrar una función $F(z)$ definida en $\mathbb{D}$ con $\Re(F(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y tal que

$$F(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \ldots, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Este problema está íntimamente relacionado con el problema trigonométrico de los momentos, que consiste en lo siguiente: Dada una sucesión $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ de números complejos, encontrar una medida positiva μ en $[-\pi, \pi]$ tal que

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\mu(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se sabe, ([18]), que este problema tiene solución sí y sólo si los determinantes de Toeplitz

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}$$

verifican $\Delta_n > 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\mu_k = \overline{\mu}_{-k}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$. Además dicha solución es única. A la sucesión $\{\mu_k\}_{-\infty}^{\infty}$ donde para cada $k \in \mathbb{Z}$, los μ_k viene dado por la fórmula (2.14), como ya se indicó en la sección anterior, es la llamada sucesión de momentos trigonométricos.

Es fácil ver, ([2, p. 91]), que la solución $F(z)$ al problema de interpolación de Carathéodory-Fejér, siendo $\mu(\theta)$ la solución al problema trigonométrico de los momentos, se puede escribir de la forma

$$F(z) = F_\mu(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) + i\Im(F_\omega(0)), \qquad (2.37)$$

siendo $\Im(z)$, en general, la parte imaginaria del complejo z. Esta fórmula es la *transformada de Herglotz- Riesz* para $\mu(\theta)$. Observar que $F_\mu(z)$ es una función analítica en $\overline{\mathbb{C}} \backslash \mathbb{T}$ que satisface la siguiente propiedad:

$$\overline{F_\mu(\frac{1}{\overline{z}})} = -F_\mu(z). \qquad (2.38)$$

Como hemos dicho anteriormente, la transformada de Herglotz- Riesz nos va a permitir calcular la medida de segunda especie respecto a la cual los polinomios de Szegő asociados $\{\Omega_n(z)\}$ son ortogonales. A tal fin enunciaremos el siguiente

Teorema 2.7 *([26]) Sea F analítica en $\mathbb{D}$ y supongamos que F tiene polos simples en $\{z_k\}_{k=1}^n$ con $|z_k| = 1$ de forma que*

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k)F(z) = \gamma_k \tag{2.39}$$

y $\bar{z}_k \gamma_k \in \mathbb{R}$. Supongamos que los límites no tangenciales

$$\lim_{z \to e^{i\theta}} \Re \left\{ F(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right\}$$

existen casi por todo en $[-\pi, \pi]$ y son L_p−integrables en $[-\pi, \pi]$ con $p \in (1, +\infty)$. (Aquí $\Re(z)$ es, en general, la parte real del complejo z). Entonces

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) + i\Im(F(0))$$

con

$$d\mu(\theta) = \left(\Re\left(F(e^{i\theta})\right)\right) d\theta - \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi\gamma_k}{z_k} \delta(e^{i\theta} - z_k) \tag{2.40}$$

donde $\Re(F(e^{i\theta})) = \lim_{z \to e^{i\theta}} \Re(f(z))$ es el límite no tangencial y donde

$$\delta(e^{i\theta} - z_k) = \begin{cases} 1 & si \quad e^{i\theta} = z_k \\ 0 & si \quad e^{i\theta} \neq z_k \end{cases}$$

Por otro lado, se puede probar, ver [27], que:

Teorema 2.8 *Si F es la función de Carathéodory con respecto a μ y $\widetilde{\mu}$ es la medida de segunda especie asociada μ, entonces, $G = \frac{1}{F}$ es la función de Carathéodory asociada a $\widetilde{\mu}$.*

En el Capítulo 3, se darán más detalles acerca de las propiedades de transformada de Herglotz- Riesz y se pondrá de manifiesto el papel que juega en relación con el error en las fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad. De hecho, la Transformada de Herglotz-Riesz representa el papel análogo, sobre la circunferencia unidad, a la Transformada de Cauchy en el caso real que vimos en el capítulo anterior.

Para finalizar esta sección, veamos un ejemplo ilustrativo en el que se calcula explícitamente la medida de segunda especie:

Ejemplo: Tomemos la función peso de Chebyshev, esto es: $d\mu(\theta) = \omega(\theta)d\theta = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}d\theta$. Calcularemos, en primer lugar, la transformada de Herglotz-Riesz:

$$\begin{array}{ll} F_\omega(z) & = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\frac{\text{sen}^2(\theta)}{2\pi}d\theta \\ & = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{-(w+z)(w^2-1)^2}{4w^3(w-z)}dw \\ & = \left\{ \begin{array}{ll} Res(h,0) + Res(h,z) & \text{si} \quad |z| < 1 \\ Res(h,0) & \text{si} \quad |z| > 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Aquí, $Res(h,z),\ z \in \mathbb{C}$, denota el residuo de la función $h(w)$ en el polo z, dada por: $h(w) = \frac{-(w+z)(w^2-1)^2}{4w^3(w-z)}$. Como

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z^{j+1}}\right)w^j$$

y

$$\frac{-(w+z)(w^2-1)^2}{4w^3(w-z)} = \frac{-w^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{4w^2} + \frac{-zw}{4} + \frac{z}{2w} + \frac{-z}{4w^3}$$

entonces

$$Res(h,0) = \frac{1}{4z^2} + \frac{-z}{2z} + \frac{z}{4z^3} = \frac{1-z^2}{2z^2} \quad \text{y} \quad Res(h,z) = \frac{-2z(z^2-1)^2}{4z^3} = \frac{-(z^2-1)^2}{2z^2}.$$

Por tanto

$$F_\omega(z) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1-z^2}{2} & \text{si} \quad |z| < 1 \\ \frac{1-z^2}{2z^2} & \text{si} \quad |z| > 1. \end{array} \right. \tag{2.41}$$

Téngase en cuenta que como los únicos momentos no nulos son μ_0 y μ_2, entonces

$$F_\omega(z) = \mu_0 + 2\mu_2 z^2 = \frac{1-z^2}{2}, \ \ \text{si}\ |z| < 1.$$

De aquí podemos establecer inmediatamente la siguiente

Proposición 2.5.1 *$d\widetilde{\mu}(\theta) = d\theta + \pi\left(d\delta(e^{i\theta}-z_1) + \delta(e^{i\theta}-z_2)\right)$ es la medida de segunda especie asociada a $d\mu(\theta) = \omega(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}d\theta$ donde $z_1 = 1$ y $z_2 = -1$.*

Demostración: Por (2.41), si $|z| < 1$ entonces $F(z) = \frac{1-z^2}{2}$ es la función de Carathéodory correspondiente a la función peso $d\widetilde{\mu}(\theta) = \omega(\theta)d\theta = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}d\theta$. Haciendo uso del Teorema 2.8, se tiene que $G(z) = \frac{2}{1-z^2}$ es la función de Carathéodory correspondiente a $d\widetilde{\mu}$ dada en el Teorema 2.7. Por la fórmula (2.39),

$$z_1 = 1,\ \gamma_1 = -1$$

$$z_2 = -1,\ \gamma_2 = 1$$

y

$$\begin{aligned} G(e^{i\theta}) &= 2\frac{1}{1-\cos 2\theta - i\text{sen}2\theta} = 2\frac{1-\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta}{2-2\cos 2\theta} \\ &= 1 + \frac{\text{sen}2\theta}{1-\cos 2\theta}i. \end{aligned}$$

Por tanto, $\Re(G(e^{i\theta})) = 1$ y, por fórmula (2.40),

$$d\widetilde{\mu}(\theta) = d\theta + \pi\left(\delta(e^{i\theta} - z_1) + \delta(e^{i\theta} - z_2)\right)$$

y la sucesión $\{\Omega_n\}$ es ortogonal con respecto a $d\widetilde{\mu}$. □

Ejercicio:

1. Consideremos las funciones peso:

$$\omega_1(\theta) = 1 + \cos\theta, \quad \text{y} \quad \omega_2(\theta) = 1 - \cos\theta.$$

Comprobar que la transformada de Herglotz-Riesz para ω_1 y ω_2 viene dada, respectivamente, por:

$$F_{\omega_1}(z) = \begin{cases} 1+z & \text{si} \quad |z| < 1 \\ -\frac{1+z}{z} & \text{si} \quad |z| > 1, \end{cases} \qquad F_{\omega_2}(z) = \begin{cases} 1-z & \text{si} \quad |z| < 1 \\ \frac{1-z}{z} & \text{si} \quad |z| > 1, \end{cases}$$

2. Calcular las medidas de segunda especie asociadas a

$$\omega_1(\theta) = 1 + \cos\theta, \quad \text{y} \quad \omega_2(\theta) = 1 - \cos\theta.$$

Capítulo 3

Cuadraturas sobre la circunferencia unidad

3.1. Polinomios algebraicos, trigonométricos y de Laurent

El objeto central de este Capítulo será la construcción de fórmulas de cuadratura para estimar integrales con integrandos periódicos de la forma

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\omega(\theta)d\theta,$$

siendo $\omega(\theta)$ una función peso también periódica, de forma que $f\omega$ es integrable en $[-\pi, \pi]$ o más generalmente, integrales sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z : \ |z| = 1\}$ del tipo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(z)\tilde{\omega}(z)dz = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta,$$

siendo $\omega(\theta) = \tilde{\omega}\left(e^{i\theta}\right)$ y $f\left(e^{i\theta}\right) = ie^{i\theta}\tilde{f}\left(e^{i\theta}\right)$.

En lo que sigue, cuando nos refiramos a una integral sobre la circunferencia unidad, escribiremos

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta,$$

siendo f una función compleja y $\omega(\theta)$ una función real (función peso) de forma que se tiene

$$I_\omega(f) = I_\omega(f_1) + iI_\omega(f_2),$$

donde $f_1(\theta) = \Re\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right)$ y $f_2(\theta) = \Im\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right)$, ambas periódicas.

Así pues, comenzaremos con integrandos periódicos, quedando clara su equivalencia con integrandos sobre la circunferencia unidad. Como ya se anunció al comienzo del Capítulo 2 (Sección 2.1), $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\omega(\theta)d\theta$ será aproximada por la expresión $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j)$ (fórmula de cuadratura), donde los pesos y nodos se eligen imponiendo que $I_n(f)$ integre polinomios trigonométricos del mayor grado posible. La finalidad de esta sección será revisar algunas propiedades generales de los polinomios trigonométricos y su vinculación tanto con los "polinomios algebraicos" como con los llamados "polinomios de Laurent" que posteriormente definiremos.

Recordemos que un polinomio trigonométrico real de grado n es una función de la forma:

$$T_m(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos k\theta + b_k \mathrm{sen} k\theta\right),\ a_o,\ a_k,\ b_k \in \mathbb{R}.$$

Además, se dice que $T_m(\theta)$ tiene "grado exacto" m si $|a_m| + |b_m| > 0$.

Por otro lado, denotaremos por $\mathcal{T}_n$ el espacio de los polinomios trigonométricos de grado a lo sumo n y por $\mathcal{T}$ el espacio de todos los polinomios trigonométricos, es decir, $\mathcal{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n$. Obsérvese que

$$\mathcal{T}_n = \langle 1, \cos\theta, \mathrm{sen}\theta, \ldots, \cos n\theta, \mathrm{sen} n\theta\rangle,$$

y por consiguiente, $dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$. Utilizando la transformación $z = e^{i\theta},\ \theta \in [-\pi, \pi]$y la fórmula de Euler, se puede escribir: $T_n(\theta) = L_n\left(e^{i\theta}\right)$, siendo

$$\begin{aligned} &L_n(z) = \textstyle\sum_{k=-n}^{n} c_k z^k, \qquad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \\ &c_{-k} = \overline{c_k},\ k = 0, 1, \ldots, n, \quad (c_0 = a_0 \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Las funciones $L_n(z)$ se denominan "polinomios de Laurent" o más generalmente, dados p y q enteros, siendo $p \leq q$, un polinomio de Laurent es una función de la forma

$$L_n(z) = \sum_{k=p}^{q} \alpha_k z^k,\ \alpha_k \in \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

También, denotaremos por $\Delta_{p,q}$ el espacio de los polinomios de Laurent dados por (3.2). Obsérvese que $\Delta_{p,q} = \langle z^p, z^{p-1}, \ldots, z^q \rangle$, por lo que $\Delta_{p,q}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $q - p + 1$. Así, $L_n(z)$ en (3.1) pertenece a $\Delta_{-n,n}$. Denotaremos por Δ el espacio de polinomios de Laurent ($\Delta_{0,n} = \Pi_n$).

Por otro lado, teniendo en cuenta que una sucesión de números complejos doblemente infinita $\{\mu_k\}_{-\infty}^{\infty}$, cumpliendo $\mu_{-k} = \overline{\mu_k},\ k = 0, 1, 2, \ldots$ recibe el nombre de "hermitiana" (o "hermítica"), un polinomio de Laurent $L \in \Delta_{-n,n}$ se dirá "hermitiano" cuando la sucesión de sus coeficientes es "hermitiana", es decir, si $L_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$, entonces $c_{-k} = \overline{c_k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$, verificando la siguiente:

Proposición 3.1.1 *Sea $T_n(\theta)$ un polinomio trigonométrico real de grado n entonces:*

$$T_n(\theta) = L_n\left(e^{i\theta}\right) \in \Delta_{-n,n} \;\Leftrightarrow\; L_n \text{ es hermitiano.}$$

Observación 4 *Si definimos $\Delta_n^H = \{L \in \Delta_{-n,n},\ L_n \text{ es hermitiano}\}$, entonces Δ_n^H es un espacio vectorial real de dimensión $2n+1$ y se puede escribir*

$$\mathcal{T}_n = \{L_n\left(e^{i\theta}\right) :\ L \in \Delta_n^H\},$$

pudiéndose identificar los polinomios trigonométricos con los polinomios de Laurent hermitianos.

Veamos ahora la conexión existente entre polinomios trigonométricos y ciertos polinomios algebraicos. A tal efecto, recordemos que dado un polinomio $P(z)$ de grado n su recíproco $P^*(z)$ se define como:

$$P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = z^n \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Así, si $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, entonces $P^*(z) = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_{n-j}} z^j$ y tenemos la siguiente:

Definición 3.1 *Un polinomio $P(z)$ se dice "invariante" (o más concretamente, "$k-$invariante", $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) sí y sólo si:*

$$P^*(z) = kP(z),\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 3.1 *Sea $P(z)$ un polinomio de grado n con todos sus ceros sobre $\mathbb{T}$, es decir,*

$$P(z) = c\prod_{j=1}^{n}(z - z_j),\ c \neq 0,\ |z_j| = 1,\ j = 1, \ldots, n.$$

Entonces

$$P^*(z) = z^n\overline{c}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_j}\right) = \frac{\overline{c}}{c}\frac{(-1)^n}{z_1 \ldots z_n}P_n(z).$$

Luego, $P(z)$ es "$k-$invariante" con $k = \frac{\overline{c}}{c}\frac{(-1)^n}{z_1 \ldots z_n}$, $(|k| = 1)$. Obviamente el recíproco no es cierto. (Compruébese).

Algunas consecuencias inmediatas de la definición 3.1 son:

1. Si $P(z)$ es $k-$invariante, entonces $P(0) \neq 0$.

2. Si α es un cero de $P(z)$, invariante, entonces, $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ también lo es. (Obsérvese que $\alpha \neq 0$).

3. Sea $P(z)$ un polinomio invariante de grado n impar. Entonces, el número de ceros de $P(z)$ sobre $\mathbb{T}$ (contando multiplicidades) es también impar, lo cual implica que $P(z)$ tiene al menos un cero sobre $\mathbb{T}$ cuya multiplicidad es también impar.

4. Sea $P(z)$ invariante de grado exacto n, de forma que:

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j = c_n\prod_{j=1}^{n}(z - z_j),\ c_n \neq 0.$$

Así, $|P(0)| = |c_0| = |c_n|\prod_{j=1}^{n}|z_j| = |c_n|$ y en consecuencia, ya que $c_n = k\overline{c}_0$, se sigue que $|k| = 1$.

Escribamos pues $k = e^{iw},\ w \in \mathbb{R}$ y definamos $Q(z) = \lambda P(z),\ (\lambda \neq 0)$. Entonces

$$Q^*(z) = \overline{\lambda}P^*(z) = \overline{\lambda}kP(z) = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda}kQ(z),$$

es decir, $Q(z)$ es $\left(\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}k\right)$ $-$invariante.

Si suponemos que $\lambda = Re^{i\gamma},\ R > 0,\ \gamma \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}k = e^{i(w-2\gamma)}$. Nótese que eligiendo $\gamma \in \mathbb{R}$ de forma que $w - 2\gamma = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, claramente $\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}k = 1$ y $Q(z) = \lambda P(z)$ es $1-$invariante.

OBSERVACIÓN 5 *El término "invariante" fue introducido por Jones et. al. en [18]. Mientras que Szegő en [32] habla de un polinomio $P(z)$ "autorecíproco" si $P^*(z) = P(z)$ ($1-$invariante). Vemos pues que los polinomios "invariantes" son esencialmente los "autorecíprocos".*

Sea ahora $P_{2n}(z)$ un polinomio algebraico de grado exacto $2n$ y a su vez $k-$invariante. Entonces, sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $Q_{2n}(z) = \lambda P_{2n}(z)$ es $1-$invariante (autorecíproco). Por consiguiente, podemos escribir

$$L_n(z) = \frac{Q_{2n}(z)}{z^n} = \sum_{j=-n}^{n} c_j z^j,\ c_{-j} = \overline{c_j},\ j = 0, 1, \ldots, n,$$

es decir, $L_n \in \Delta_n^H$ y concretamente $L_n\left(e^{i\theta}\right) = T_n(\theta) \in \mathcal{T}_n$. Por tanto, hemos probado la siguiente

PROPOSICIÓN 3.1.2 *Sea $P_{2n}(z)$ un polinomio invariante de grado exacto $2n$, entonces*

$$e^{-in\theta} P_{2n}\left(e^{i\theta}\right) = \lambda_n T_n(\theta),\ \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

y $T_n(\theta)$ un polinomio trigonométrico (real) de grado exacto n.

A continuación veremos cómo la conexión entre polinomios trigonométricos y polinomios algebraicos invariantes nos permite recuperar algunas propiedades clásicas de los polinomios trigonométricos relativas a sus ceros y a un resultado de factorización. Así, sean α y β constantes arbitrarias, entonces $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)$ representa, claramente, un polinomio trigonométrico de grado uno. Se puede probar por inducción que la función

$$T(\theta) = c\prod_{j=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_{2j-1}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_{2j}}{2}\right),\ c \neq 0, \tag{3.3}$$

siendo $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ constantes dadas, representa un polinomio trigonométrico de grado exacto n. ¿Será cierto el recíproco? Esto es, dado $T_n(\theta)$ polinomio trigonométrico de grado exacto n, ¿ se podrá factorizar como en (3.3)? Veamos que se puede responder afirmativamente. En efecto, sea $T_n \in \mathcal{T}_n$, entonces $T_n(\theta) = L_n\left(e^{i\theta}\right)$ con $L_n \in \Delta_n^H$, de forma que $L_n(z) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}$, $P_{2n} \in \Pi_{2n}$ y "autorecíproco". En virtud del "Teorema Fundamental del Álgebra" podemos escribir, contando multiplicidades

$$P_{2n}(z) = c_n \prod_{j=1}^{2n}(z - z_j),\ c_n \neq 0,$$

donde $z_j \neq 0$ y si $z_j \notin \mathbb{T}$, entonces $\frac{1}{\bar{z}_j}$ también es raíz de $P_{2n}(z)$. Además, el número de raíces de P_{2n} sobre $\mathbb{T}$ es par, el cual denotamos por $2m$ $(0 \leq m \leq n)$. Así,

$$P_{2n}(z) = c_n \prod_{j=1}^{2m}(z - z_j) \prod_{j=1}^{n-m}(z - \tilde{z}_j)\left(z - \frac{1}{\bar{\tilde{z}}_j}\right),\ c_n \neq 0, \tag{3.4}$$

siendo $z_j = e^{i\theta_j},\ \theta_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, 2m$. Por un lado, $\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$, podemos escribir:

$$z = re^{i\varphi} = e^{i\omega} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}e^{ix},\ r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R},$$

resultando: $r = e^{-y}$, $x = \varphi + 2k\pi,\ \varphi \in [-\pi, \pi],\quad k \in \mathbb{Z}$, ó equivalentemente

$$y = -\ln r,\quad x = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Por consiguiente: $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r}e^{i\varphi} = e^{i(a+bi)} = e^{-b}e^{ia}$, lo cual implica:

$$b = \ln r = -y,\quad a = x = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

es decir, $\frac{1}{\bar{z}} = e^{i\overline{\omega}}$.

Por otro lado, $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$ y $\omega \in \mathbb{C}$, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} - e^{i\omega} &= (\cos\theta - \cos\omega) + i(\mathrm{sen}\theta - \mathrm{sen}\omega) \\
&= -2\mathrm{sen}\left(\tfrac{\theta+\omega}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\theta\omega}{2}\right) + 2i\mathrm{sen}\left(\tfrac{\theta-\omega}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\theta+\omega}{2}\right) \\
&= -2\mathrm{sen}\left(\tfrac{\theta-\omega}{2}\right)\left(\mathrm{sen}\left(\tfrac{\theta+\omega}{2}\right) - i\cos\left(\tfrac{\theta+\omega}{2}\right)\right) \\
&= 2i\mathrm{sen}\left(\tfrac{\theta-\omega}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\omega}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Haciendo ahora, $\widetilde{z}_j = e^{i\omega_j}$, $\omega_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n-m$, tenemos, de (3.4):

$$P_{2n}\left(e^{i\theta}\right) = c_n \prod_{j=1}^{2m}(e^{i\theta} - e^{i\theta_j}) \prod_{j=1}^{n-m}(e^{i\theta} - e^{i\omega_j})\left(e^{i\theta} - e^{i\overline{\omega}}\right), \qquad (3.5)$$

siendo $\theta_j \in \mathbb{R}$ y $\omega_j \in \mathbb{C}$, $\Re(\omega_j) = \varphi_j + 2k\pi$, $\varphi_j \in [-\pi, \pi]$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} P_{2n}\left(e^{i\theta}\right) &= c_n(-1)^n 2^{2n} \textstyle\prod_{j=1}^{2m} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) e^{i\ \frac{\theta+\theta_j}{2}} \times \\ &\times \textstyle\prod_{j=1}^{n-m} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega_j}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\overline{\omega}_j}{2}\right) e^{i\ \theta+\frac{\omega+\overline{\omega}_j}{2}}\ , \end{aligned}$$

lo cual da:

$$P_{2n}\left(e^{i\theta}\right) = \lambda_n e^{in\theta} \prod_{j=1}^{2m}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) \prod_{j=1}^{n-m} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega_j}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\overline{\omega}_j}{2}\right),\ \lambda_n \neq 0.$$

Recordando ahora que $T_n \in \mathcal{T}_n : T_n(\theta) = L_n\left(e^{i\theta}\right) = \frac{P_{2n}\left(e^{i\theta}\right)}{e^{in\theta}}$, llegamos a la representación:

$$T_n(\theta) = \lambda_n \prod_{j=1}^{2m} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_{2j-1}}{2}\right) \prod_{j=1}^{n-m} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-w_j}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\overline{w}_j}{2}\right). \qquad (3.6)$$

con $\lambda_n \neq 0$.

Así pues, tenemos el siguiente

Corolario 3.1 *Un polinomio trigonométrico $T_n(\theta)$ de grado exacto n, tiene $2n$ raíces reales o complejas (contando multiplicidades) y siempre que nos restrinjamos a la banda $-\pi < \Re(\theta) \leq \pi$. Además, los ceros complejos aparecen en pares conjugados.*

Observación 6 *La representación (3.6) no es única.*

Por otro lado, como consecuencia inmediata de la representación (3.6), tenemos también el siguiente

Corolario 3.2 *(Teorema de L-Fejèr y F. Riesz) Cualquier polinomio trigonométrico $T(\theta)$ que sea no negativo $\forall\theta \in \mathbb{R}$, se puede expresar en la forma*

$$T(\theta) = |g(z)|^2,\ z = e^{i\theta},$$

siendo $g(z)$ un polinomio algebraico del mismo grado que $T(\theta)$.

Demostración: Supongamos que $T(\theta)$ es un polinomio trigonométrico de grado n. Entonces tenemos

$$T(\theta)=\lambda_n \frac{P_{2n}\left(e^{i\theta}\right)}{e^{in\theta}},\ \lambda_n\neq 0,$$

siendo $P_{2n}(z)$ "autorecíproco". dado que $T(\theta)\geq 0,\ \forall\theta\in\mathbb{R}$, los posibles ceros reales de $T(\theta)$ deben tener multiplicidad par. Así pues, por (3.6), podemos escribir $P_{2n}(z)=p_m^2(z)q_{n-m}(z)q_{n-m}^*(z)$, donde $p_m\in\Pi_m,\ (0\leq m\leq n)$ con todos sus ceros sobre $\mathbb{T}$ y $q_{n-m}\in\Pi_{n-m}$. Además, dado que $T(\theta)\geq 0,\ \forall\theta\in\mathbb{R}:$

$$T(\theta)=|T(\theta)|=\left|\lambda_n\frac{P_{2n}\left(e^{i\theta}\right)}{e^{in\theta}}\right|=|\lambda_n|\left|p_m^2\left(e^{i\theta}\right)\right|\left|q_{n-m}\left(e^{i\theta}\right)\right|\times$$

$$\times\left|\overline{q_{n-m}\left(e^{i\theta}\right)}\right|=|\lambda_n|\left|p_m^2\left(e^{i\theta}\right)\right|\left|q_{n-m}\left(e^{i\theta}\right)\right|^2=|g(z)|^2,\ z=e^{i\theta},$$

donde $g(z)=\sqrt{|\lambda_n|}p_m(z)q_{n-m}(z)\in\Pi_n$. □

Observación 7 *Recíprocamente, si $g(z)$ es un polinomio algebraico de grado n, la expesión $|g(z)|^2,\ z=e^{i\theta}$, representa un polinomio trigonométrico de grado n. En efecto, $\forall z=e^{i\theta}:$*

$$|g(z)|^2=g(z)\overline{g(z)}=g(z)\overline{g(1/\overline{z})}=\frac{g(z)g^*(z)}{z^n}=\frac{P_{2n}(z)}{z^n},$$

siendo $P_{2n}(z)$ autorecíproco. Por consiguiente, $T_n(\theta)=\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\in\mathcal{T}_n$ y además, claramente, $T_n(\theta)\geq 0,\ \forall\theta\in\mathbb{R}$.

3.2. Interpolación trigonométrica

En esta sección recopilaremos algunos resultados básicos sobre interpolación trigonométrica, los cuales habrán de usarse en la construcción de las correspondientes fórmulas de cuadratura.

En primer lugar, dados $2n+1$ nodos distintos en $[-\pi,\pi]$ se sabe que existe un único polinomio trigonométrico $T_n\in\mathcal{T}_n$ tal que

$$T_n(\theta_j)=y_j,\ j=1,\ldots,2n+1, \tag{3.7}$$

siendo $\{y_j\}_{j=1}^{2n+1}$ un conjunto de números reales dados. Esto significa que $\{1, \cos\theta, \text{sen}\theta, \ldots, \cos n\theta, \text{sen}n\theta\}$ representa un sistema de Chebyshev. Tal propiedad se puede probar mostrando que el correspondiente problema homogéneo, es decir, $y_j = 0,\ j = 1, \ldots, 2n+1$ sólo admite la solución trivial $T_n(\theta) \equiv 0$. En efecto, hallar $T_n \in \mathcal{T}_n$ cumpliendo (3.7) con $y_j = 0,\ j = 1, \ldots, 2n+1$ significa que si escribimos

$$T_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \text{sen}k\theta)\,,\ a_o,\ a_k,\ b_k \in \mathbb{R},$$

y se verifica que $T_n(\theta_j) = 0,\ j = 1, \ldots, 2n+1$, entonces $a_0 = 0$ y $a_k = b_k = 0,\ k = 1, \ldots, n$. Ahora bien, $T_n(\theta_j) = 0,\ j = 1, \ldots, 2n+1$, se puede reescribir como

$$L_n(z_j) = 0,\ j = 1, \ldots, 2n+1, \tag{3.8}$$

donde $L_n \in \Delta_{-n,n}$, $L_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k,\ c_k = a_k - ib_k,\ c_{-k} = \overline{c_k}$ y $z_j = e^{i\theta_j},\ j = 1, \ldots, 2n+1$.

Dado que $\theta_j \neq \theta_k,\ \forall j \neq k$, entonces $z_j \neq z_k,\ \forall j \neq k$, por lo que (3.8) representa un sistema lineal homogéneo que sólo admite la solución trivial $c_k = 0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ (compruébese como ejercicio). Por tanto, $a_0 = c_0 = 0$, $a_k = \Re(c_k) = 0$ y $b_k = \Im(c_k) = 0\ \forall k = 1, \ldots, n$.

Fórmula tipo- Lagrange: Supongamos $T_n \in \mathcal{T}_n$ cumpliendo las condiciones de interpolación (3.7). Entonces, en virtud de la unicidad, podemos escribir

$$T_n(\theta) = \sum_{j=1}^{2n+1} l_j(\theta) y_j, \tag{3.9}$$

donde $l_j \in \mathcal{T}_n$ tal que

$$l_j(\theta_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad j = k, \\ 0, & \text{si} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Para todo $j = 1, \ldots, 2n+1$, dado que $l_j(\theta_k) = 0,\ k = 1, \ldots, 2n+1,\ k \neq j$, por la representación (3.6), tenemos

$$l_j(\theta) = \lambda_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{2n+1} \text{sen}\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right),$$

siendo λ_j una constante de normalización elegida de forma que $l_j(\theta_j) = 1$, más concretamente, si ponemos $W_n(\theta) = \prod_{k=1}^{2n+1} \text{sen}\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)$, se sigue que

$$l_j(\theta) = \lambda_j \frac{W_n(\theta)}{\text{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)}, \ j = 1, \dots, 2n+1.$$

Así, $1 = l_j(\theta_j) = \lambda_j \lim_{\theta \to \theta_j} \frac{W_n(\theta)}{\text{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)} = \lambda_j \lim_{\theta \to \theta_j} \frac{W_n(\theta)}{\frac{\theta-\theta_j}{2}} = 2\lambda_j W_n^{'}(\theta_j)$. Por consiguiente,

$$l_j(\theta) = \frac{W_n(\theta)}{2W_n'(\theta_j)\text{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)}, \ j = 1, \dots, 2n+1. \tag{3.10}$$

Por analogía con el caso polinómico, la expresión (3.9) con $l_j(\theta)$ dado por (3.10), recibe el nombre de "Fórmula tipo- Lagrange" para el polinomio trigonomt́rico de interpolación.

Interpolación de Hermite: Al considerar la construcción de fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión trigonométrico, se necesitará resolver el siguiente problema de interpolación de Hermite. A saber, "dados n nodos distintos $\theta_1, \dots, \theta_n$ en $[-\pi, \pi]$, hallar $H_n \in \mathcal{T}_{n-1}$ tal que

$$\begin{aligned} H_n(\theta_j) &= y_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ H_n^{'}(\theta_j) &= y_j^{'}, \quad j = 1, \dots, n, \ j \neq k, \end{aligned} \tag{3.11}$$

siendo $k \in \{1, \dots, n\}$ previamente fijado con $\{y_j\}$ y $\{y_j^{'}\}$ $2n-1$ números reales dados". Al respecto, la existencia y unicidad de H_n se puede garantizar pasando a la circunferencia unidad y mostrando que el problema de interpolación (3.11) es equivalente a encontrar un único $L_n \in \Delta_{-(n-1),n-1}$ tal que

$$\begin{aligned} L_n(z_j) &= y_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ L_n^{'}(z_j) &= y_j^{'}, \quad j = 1, \dots, n, \ j \neq k, \end{aligned} \tag{3.12}$$

con $z_j = e^{i\theta_j}, \ j = 1, \dots, n$.

Si hacemos $L_n(z) = \frac{P_{2n-1}(z)}{z^{n-1}}$, $P_{2n-1} \in \Pi_{2n-1}$, nuestro problema se reduce a hallar $P_{2n-1} \in \Pi_{2n-1}$, tal que

$$\begin{aligned} P_{2n-1}(z_j) &= z_j^{n-1} y_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ P'_{2n-1}(z_j) &= z_j^{n-1} y'_j, \quad j = 1, \ldots, n, \ j \neq k. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Puesto que $z_l \neq z_m$, $\forall l \neq m$, se sabe que (3.13) tiene una única solución y por consiguiente también el problema (3.11).

En consecuencia, en virtud de la unicidad, podemos escribir, para todo $k = 1, \ldots, n$:

$$H_n(\theta) = H_n^{(k)}(\theta) = \sum_{j=1}^{n} t_j^{(k)}(\theta) y_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} s_j^{(k)}(\theta) y'_j, \tag{3.14}$$

siendo $t_j^{(k)}$ y $s_j^{(k)}$ polinomios trigonométricos de grado a lo sumo $n-1$, cumpliendo:

$$\begin{aligned} t_j^{(k)}(\theta_r) &= \delta_{j,r}, & & 1 \leq j, r \leq n, \\ (t_j^{(k)})'(\theta_r) &= 0, & & 1 \leq j, r \leq n, \ r \neq k, \\ s_j^{(k)}(\theta_r) &= 0, & & 1 \leq r \leq n, \ j \neq k, \\ (s_j^{(k)})'(\theta_r) &= \delta_{j,r}, & & 1 \leq r \leq n, \ j \neq k. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 8 *De modo análogo al caso polinómico y siguiendo por ejemplo el libro clásico de Stoer- Bulirsch, [30], se pueden dar expresiones explícitas para* $t_j^{(k)}$ *y* $s_j^{(k)}$.

El resto de la seccón la vamos a dedicar a resolver el problema de interpolación con un número par de nodos, digamos $2n$ en un subespacio de $\mathcal{T}_n$ (cuya dimensión es $2n+1$) de dimensión $2n$. Por ejemplo,

$$\mathcal{T}_n \setminus \langle \cos n\theta \rangle = \langle 1, \cos\theta, \text{sen}\theta, \ldots, \cos(n-1)\theta, \text{sen}(n-1)\theta, \text{sen}n\theta \rangle,$$

ó

$$\mathcal{T}_n \setminus \langle \text{sen}n\theta \rangle = \langle 1, \cos\theta, \text{sen}\theta, \ldots, \cos(n-1)\theta, \text{sen}(n-1)\theta, \cos n\theta \rangle.$$

En tal sentido debiéramos recordar que un conjunto $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ de $n+1$ funciones continuas en $[a,b]$ forman un sistema de Haar sobre $[a,b]$, sí y sólo si, para cualquier $k \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto $\{f_0, f_1, \ldots, f_k\}$ es un sistema de Chebyshev sobre dicho intervalo.

Claramente, $\langle 1, \cos\theta, \mathrm{sen}\theta, \ldots, \cos n\theta, \mathrm{sen} n\theta\rangle$ no puede ser un sistema de Haar sobre $[-\pi, \pi]$ (basta comprobar simplemente que $\langle 1, \cos\theta\rangle$ no puede ser un sistema de Chebyshev en $[-\pi, \pi]$.). Por consiguiente, al menos inicialmente, no podemos garantizar en general que dados $2n$ nodos distintos $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ en $[-\pi, \pi]$, exista T_n en $\mathcal{T}_n \setminus \langle \cos n\theta\rangle$ ó en $\mathcal{T}_n \setminus \langle \mathrm{sen} n\theta\rangle$ tal que $T_n(\theta_j) = y_j, \ j = 1, \ldots, 2n$. No obstante, podemos probar el siguiente

Teorema 3.1 *Sean $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ $2n$ nodos distintos en $[-\pi, \pi]$. Entonces, dados $2n$ números reales $\{y_j\}_{j=1}^{2n}$ existe un único polinomio trigonométrico T_n bien en $\mathcal{T}_n \setminus \langle \cos n\theta\rangle$ ó en $\mathcal{T}_n \setminus \langle \mathrm{sen} n\theta\rangle$ tal que*

$$T_n(\theta_j) = y_j, \ j = 1, \ldots, 2n. \tag{3.15}$$

Demostración: Supongamos en primer lugar que tratamos de hallar $T_n \in \mathcal{T}_n \setminus \langle \mathrm{sen} n\theta\rangle$ cumpliendo (3.15). Así, podemos escribir

$$T_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos k\theta + b_k \mathrm{sen} k\theta) + a_n \cos n\theta = L_n\left(e^{i\theta}\right),$$

con $L_n \in \Delta_{-n,n}$, $L_n(z) = \sum_{j=-n}^{n} c_j z^j$, siendo $c_j = \frac{1}{2}(a_j - ib_j), \ c_{-j} = \overline{c_j}, \ j = 0, 1, \ldots, n-1$ y $c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2}$. Haciendo $z_j = e^{i\theta_j}, \ j = 1, \ldots, 2n$, la fórmula (3.15) se expresa como el sistema lineal siguiente:

$$\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} c_j z^j + c_n(z_j^n + z_j^{-n}) = y_j, \ j = 1, \ldots, 2n. \tag{3.16}$$

Supongamos en primer lugar que (3.16) admite una única solución y sea ésta el polinomio de Laurent: $L_n(z) = \sum_{j=-n}^{n} c_j z^j$, con $c_j \in \mathbb{C}, \ j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n-1$ y $c_n = c_{-n}$. Definimos $L_{n^*}(z) = \overline{L_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \in \Delta_{-n,n}$. Así pues,

$$L_{n^*}(z_j) = \overline{L_n\left(z_j\right)} = \overline{y}_j = y_j, \ j = 1, \ldots, 2n.$$

Por consiguiente, L_{n^*} también es solución y en virtud de la unicidad se tiene que $L_n \equiv L_{n^*}$, lo cual implica: $c_{-j} = \overline{c}_j, \ j = 0, \ldots, n$. Puesto que $c_n = c_{-n}$, entonces c_0 y c_n deben ser reales y se debe cumplir: $c_{-j} = \bar{c}_j,\ j = 1, \ldots, n-1$. Por tanto, $T_n(\theta) = L_n\left(e^{i\theta}\right) \in \mathcal{T}_n \setminus \langle \text{sen} n\theta \rangle$ cumplirá las condiciones de interpolación (3.15).

Por otro lado, el sistema (3.16) admitirá solución única, sí y sólo si,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} z_1^{-(n-1)} & z_1^{-(n-2)} & \ldots & 1 & z_1^n + z_1^{-n} \\ z_2^{-(n-1)} & z_2^{-(n-2)} & \ldots & 1 & z_2^n + z_2^{-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_{2n}^{-(n-1)} & z_{2n}^{-(n-2)} & \ldots & 1 & z_{2n}^n + z_{2n}^{-n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Introduciendo el determinante de Vandermonde

$$\gamma_n = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \ldots & z_1^{2n-1} \\ 1 & z_2 & \ldots & z_2^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_{2n} & \ldots & z_{2n}^{2n-1} \end{vmatrix},$$

el cual es no nulo ya que $z_i \neq z_j,\ \forall i \neq j$. Se puede comprobar fácilmente lo siguiente

$$\Delta_n = (z_1 \ldots z_{2n})^{n-1}(1 - z_1 \ldots z_{2n})\gamma_n. \tag{3.17}$$

Por otra parte, si consideramos el problema de interpolación en $\mathcal{T}_n \setminus \langle \cos n\theta \rangle$ se prueba que el correspondiente determinante $\widetilde{\Delta}_n$ cumple:

$$\widetilde{\Delta}_n = (z_1 \ldots z_{2n})^{n-1}(1 + z_1 \ldots z_{2n})\gamma_n. \tag{3.18}$$

Teniendo en cuenta que $z_1 \ldots z_{2n} = e^{i(\theta_1 + \ldots \theta_{2n})} = e^{i\lambda_n}$, con $\lambda_n = \sum_{j=1}^{2n} \theta_j$, si $\lambda_n \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, entonces, tanto (3.17) como (3.18) son distintos de cero y nuestro problema de interpolación admite solución única tanto en $\mathcal{T}_n \setminus \langle \text{sen} n\theta \rangle$ como en $\mathcal{T}_n \setminus \langle \cos n\theta \rangle$.

Por el contrario, si $\lambda_n \neq k\pi$ para cierto entero k, si k es par: $e^{i\lambda_n} = 1$, por lo que (3.18) no se anula, mientras que si k es impar entonces $e^{i\lambda_n} = -1$ y será entonces (3.17) distinto de cero. De esta forma concluimos la demostración. □

3.3. Sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos

Como se ha visto en el Capítulo 1, la determinación de una base ortogonal para el espacio Π de los polinomios resultó fundamental a la hora de construir las fórmulas con el máximo grado de precisión algebraica o fórmulas Gaussianas. Algo similar va a suceder cuando queramos construir fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión trigonométrica. En efecto, mostraremos cómo las bases ortogonales para el espacio $\mathcal{T}$ de polinomios trigonométricos constituyen el elemento crucial en tal desarrollo.

Así pues, el objetivo de esta Sección será presentar algunos resultados de Szegő ([31]) relativos a la construcción de una base ortogonal para $\mathcal{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n$, (recordar que hemos denotado por $\mathcal{T}_n$ al espacio de los polinomios trigonométricos de grado a lo sumo n). Al hablar de ortogonalidad, lo haremos con respecto al producto interior inducido por la función peso $\omega(\theta)$, esto es,

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\omega(\theta)d\theta. \tag{3.19}$$

(Dado que estamos considerando polinomios trigonométricos con coeficientes reales, podemos suprimir la conjugación en la integral de (3.19)).

Observación 9 *En lugar de una función peso, podríamos partir de una situación más general que involucrara una distribución (medida) arbitraria $d\alpha(\theta)$ con soporte en $\mathbb{T}$. No obstante, por motivos de comodidad nos restringiremos al caso anterior, es decir, cuando $\omega(\theta)$ es absolutamente continua: $d\alpha(\theta) = \omega(\theta)d\theta$.*

Consideremos pues, la base ya conocida de $\mathcal{T}_n$:

$$\langle 1, \cos\theta, \text{sen}\theta, \ldots, \cos n\theta, \text{sen}n\theta \rangle,$$

la cual es claramente ortogonal con respecto a la función peso $\omega(\theta) = 1,\ \forall \theta \in [-\pi, \pi]$. Por consiguiente, cuando manejamos una función arbitraria $\omega(\theta)$, ¿Cómo podríamos proceder? La respuesta nos la da el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a dicha base

$$\{1, \cos\theta, \text{sen}\theta, \ldots, \cos n\theta, \text{sen}n\theta\},$$

siguiendo un cierto orden. De esta manera generamos los polinomios trigonométricos $\{f_0, f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n\}$ tales que $f_0 = cte$,

$$
\begin{array}{ll}
f_1 \in \langle 1, \cos\theta \rangle, & g_1 \in \langle 1, \cos\theta, \mathrm{sen}\theta \rangle, \\
f_2 \in \langle 1, \cos\theta, \mathrm{sen}\theta, \cos 2\theta \rangle, & g_2 \in \langle 1, \cos\theta, \mathrm{sen}\theta, \cos 2\theta, \mathrm{sen}2\theta \rangle, \\
\vdots & \vdots \\
f_n \in \mathcal{T}_n \setminus \langle \mathrm{sen}n\theta \rangle, & g_n \in \mathcal{T}_n.
\end{array}
$$

En definitiva, $\forall k \geq 1$, f_k y g_k son polinomios trigonométricos de grado exacto k (con $f_0(\theta) = f_0 = cte$) satisfaciendo

$$
\begin{aligned}
&\text{(i) } \langle f_j, f_k \rangle_\omega = k_j \delta_{j,k},\ k_j > 0, \\
&\text{(ii) } \langle g_j, g_k \rangle_\omega = k_j^{'} \delta_{j,k},\ k_j^{'} > 0, \\
&\text{(iii) } \langle f_j, g_k \rangle_\omega = 0,\ j, k = 0, 1, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Cuando el proceso se repite para $n = 1, 2, \ldots$, entonces, la familia de polinomios trigonométricos $f_0 \bigcup \{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ representará una base ortogonal de $\mathcal{T}$ con respecto a la función peso $\omega(\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Supongamos que, para todo $j = 1, \ldots, n$,

$$
\begin{aligned}
&f_0 = a_{0,0} \neq 0 \\
&f_j(\theta) = a_{j,0} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(a_{j,k} \cos k\theta + b_{j,k} \mathrm{sen} k\theta \right) \\
&g_j(\theta) = a_{j,0}^{'} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(a_{j,k}^{'} \cos k\theta + b_{j,k}^{'} \mathrm{sen} k\theta \right)
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Puesto que $f_0 \bigcup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{n}$ es una base de $\mathcal{T}_n$, por la independencia lineal

$$
\alpha_0 f_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j f_j(\theta) + \beta_j g_j(\theta) \right) = 0,
\tag{3.22}
$$

implica que $\alpha_j = \beta_j = 0$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

Así pues, de (3.21) y (3.22) deducimos que

$$
\begin{vmatrix} a_{n,n} & b_{n,n} \\ a_{n,n}^{'} & b_{n,n}^{'} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Recíprocamente, se verifica la siguiente:

PROPOSICIÓN 3.3.1 *Consideremos la familia de polinomios trigonométricos* $f_0 \bigcup \{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tales que* $f_0(\theta) = cte \neq 0$,

$$f_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \mathrm{sen} k\theta)$$

y

$$g_n(\theta) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos k\theta + d_k \mathrm{sen} k\theta)$$

y supongamos que $\forall n \geq 1$,

$$\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.23}$$

Entonces, $f_0 \bigcup \{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *representa una base de* $\mathcal{T}$.

Demostración: En primer lugar, por (3.23) se sigue que ambos polinomios f_n y g_n tienen grado exacto n. Sea ahora $T \in \mathcal{T}_n$, entonces vamos a probar que T se puede escribir en la forma

$$T(\theta) = \lambda_0 f_0(\theta) + \lambda_1 f_1(\theta) + \mu_1 g_1(\theta) + \ldots + \lambda_n f_n(\theta) + \mu_n g_n(\theta),$$

donde las constantes $\{\lambda_j\}_{j=0}^{n}$ y $\{\mu_j\}_{j=1}^{n}$, quedan determinadas de forma única. Esto concluirá la demostración. En efecto, se pueden hallar λ_n y μ_n únicas tales que

$$T(\theta) - (\lambda_n f_n(\theta) + \mu_n g_n(\theta)) \in \mathcal{T}_{n-1}. \tag{3.24}$$

Para ello, hagamos $T(\theta) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \cos j\theta + \beta_j \mathrm{sen} j\theta)$. Por consiguiente, la fórmula (3.24) se verificará, sí y sólo si, el sistema lineal

$$a_n \lambda_n + b_n \mu_n = \alpha_n$$

$$c_n \lambda_n + d_n \mu_n = \beta_n,$$

admite una única solución, y esto se deduce de la condición (3.23).

Así pues, siguiendo a Szegő [31], consideraremos las siguientes definiciones:

Definición 3.2 *Sean f y g polinomios trigonométricos de grado n tales que*

$$f(\theta) = a\cos n\theta + b\mathrm{sen} n\theta + \ldots$$

$$g(\theta) = c\cos n\theta + d\mathrm{sen} n\theta + \ldots.$$

Entonces, f y g se dirán linealmente independientes si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

Definición 3.3 *Dada la función peso $\omega(\theta)$ en $[-\pi,\pi]$, el sistema de polinomios trigonométricos $f_0 \bigcup \{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $f_0 = cte$ y $f_n,\ g_n \in \mathcal{T}_n,\ n = 1,2,\ldots,$ se dirá que representa un "sistema bi-ortogonal" para $\omega(\theta)$ si*

1. *$\forall n \geq 1,\ f_n$ y g_n son linealmente independientes.*
2. *Son ortogonales con respecto al producto interior inducido por $\omega(\theta)$, es decir, se cumple (3.20).*

Observación 10 *Cuando en (3.20), $k_j = k_j^{'} = 1,\ j = 1,2,\ldots,$ el sistema se dice "bi-ortogonormal.*

Veamos ahora cómo determinar de modo constructivo un sistema bi-ortogonal de polinomios trigonométricos. Para ello haremos uso de la sucesión de polinomios mónicos de Szegő: $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ donde $\rho_n(z) = z^n + \ldots + \delta_n,\ n = 0,1,\ldots,$ tal que $\langle \rho_n(z), z^k \rangle_{\omega} = 0,\ k = 0,\ldots,n-1,\ n = 1,2,\ldots,$ $(z = e^{i\theta})$ Aquí $\delta_n = \rho_n(0)$, $(\delta_0 = 1)$ representa el coeficiente de reflexión o parámetro de Schur de orden n y sabemos que se cumple $|\delta_n| < 1,\ n = 1,2,\ldots.$ Sea ahora $\tau_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y consideremos $\frac{\tau_n \rho_{2n+1}(z)}{z^n} \in \Delta_{-n,n}$. Por consiguiente, podemos escribir

$$\tau_n e^{-i\theta} \rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right) = f_{n+1}(\theta) + i g_{n+1}(\theta), \tag{3.25}$$

donde es fácil comprobar que f_{n+1} y g_{n+1} son polinomios trigonométricos de grado $n+1,\ n = 0,1,\ldots$ y además se cumple el siguiente

Teorema 3.2 *Sea $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos no nulos tales que $\tau_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta$ es un número real. Entonces $f_0 \bigcup \{f_{n+1}, g_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ dados por (3.25) y siendo $f_0 = cte \neq 0$, forman un sistema bi-ortogonal para $\omega(\theta)$.*

Demostración: De (3.25) se puede escribir

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\theta) &= \tfrac{1}{2}\left(\tau_n e^{-i\theta}\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right) + \overline{\tau}_n e^{i\theta}\overline{\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tau_n e^{-i\theta}\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right) + \overline{\tau}_n e^{i\theta}\rho_{2n+1^*}\left(e^{i\theta}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tau_n \tfrac{\rho_{2n+1}(z)}{z^n} + \overline{\tau}_n \tfrac{\rho^*_{2n+1}(z)}{z^{n+1}}\right),\ (z = e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$g_{n+1}(\theta) = \frac{1}{2i}\left(\tau_n \frac{\rho_{2n+1}(z)}{z^n} - \overline{\tau}_n \frac{\rho^*_{2n+1}(z)}{z^{n+1}}\right),\ (z = e^{i\theta}).$$

En primer lugar, se puede probar fácilmente que para $n = 0, 1, \ldots,$ f_{n+1} y g_{n+1} son linealmente independientes. Veamos pues que satisfacen las condiciones de ortogonalidad.

Sea $k \in \mathbb{Z}$, $-n \leq k \leq n$, tenemos

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f_{n+1}(\theta)e^{ik\theta}\omega(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \tau_n e^{i(k-n)\theta}\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta + \\ &\textstyle+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\tau}_n e^{i(k-n-1)\theta}\rho^*_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tau_n\langle\rho_{2n+1}(z), z^{n-k}\rangle_\omega + \overline{\tau}_n\langle\rho^*_{2n+1}(z), z^{n+1-k}\rangle_\omega\right) \end{aligned}$$

Ambos términos son nulos debido a las propiedades de ortogonalidad tanto de $\rho_{2n+1}(z)$ como de $\rho^*_{2n+1}(z)$. Por consiguiente,

$$\forall h \in \mathcal{T}_n : \int_{-\pi}^{\pi} f_{n+1}(\theta)h(\theta)\omega(\theta)d\theta = 0.$$

En particular:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{n+1}(\theta)f_m(\theta)\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f_{n+1}(\theta)g_m(\theta)\omega(\theta)d\theta = 0,\ 0 \leq m \leq n.$$

Análogamente, se deduce que

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_{n+1}(\theta)g_m(\theta)\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} g_{n+1}(\theta)f_m(\theta)\omega(\theta)d\theta = 0,\ 0 \leq m \leq n.$$

Por consiguiente, resta probar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{n+1}(\theta)g_{n+1}(\theta)\omega(\theta)d\theta = 0,\ n = 0, 1, \ldots.$$

De la relación (3.24), podemos probar

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\tau_n e^{-in\theta}\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)\right)^2 \omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f_{n+1}(\theta) + ig_{n+1}(\theta)\right)^2 \omega(\theta)d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f_{n+1}(\theta)\right)^2 \omega(\theta)d\theta - \left(g_{n+1}(\theta)\right)^2 \omega(\theta)d\theta +$$

$$+2i \int_{-\pi}^{\pi} \left(f_{n+1}(\theta)g_{n+1}(\theta)\right)^2 \omega(\theta)d\theta.$$

(Nótese que las tres integrales son reales)

Por otro lado, dado que $\rho_{2n+1}(z) = z^{2n+1} + \ldots + \delta_{2n+1}$, y por las condiciones de ortogonalidad de ρ_{2n+1}, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\tau_n e^{-in\theta}\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)\right)^2 \omega(\theta)d\theta = \tau_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2in\theta}\rho_{2n+1}^2\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta =$$

$$= \tau_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)\left(\delta_{2n+1}e^{-2in\theta} + \ldots + e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta =$$

$$= \delta_{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}\langle\rho_{2n+1}(z), z^j\rangle_\omega + \tau_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta =$$

$$= \tau_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta.$$

Así pues, comparando las dos expresiones de

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\tau_n e^{-in\theta}\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)\right)^2 \omega(\theta)d\theta,$$

se sigue que $\int_{-\pi}^{\pi} \left(f_{n+1}(\theta)g_{n+1}(\theta)\right)^2 \omega(\theta)d\theta = 0.$ □

Ejemplo 3.2 *Tomemos* $\omega(\theta) = 1,\ \forall\theta \in [-\pi, \pi]$. *Sabemos que* $\rho_n(z) = z^n,\ n = 0, 1, \ldots$. *Por tanto,* $\forall\tau_n \in \mathbb{C}\setminus\{0\}:$

$$\tau_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta = \tau_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+2)\theta}d\theta = 0,$$

y la condición del Teorema 3.2 se cumple $\forall\tau_n \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Tomemos $\tau_n = \alpha_n + i\beta_n,\ |\alpha_n| + |\beta_n| > 0$. *Entonces*

$$\frac{\tau_n\rho_{2n+1}\left(e^{i\theta}\right)}{e^{in\theta}} = (\alpha_n + i\beta_n)\left(\cos(n+1)\theta + i\mathrm{sen}(n+1)\theta\right),\ n = 0, 1, \ldots.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\theta) &= \alpha_n\cos(n+1)\theta - \beta_n\mathrm{sen}(n+1)\theta \\ g_{n+1}(\theta) &= \beta_n\cos(n+1)\theta + \alpha_n\mathrm{sen}(n+1)\theta. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por otro lado, si hacemos $\tau_n = 1$, *obtenemos*

$$\widetilde{f}_n(\theta) = \cos n\theta,\ \widetilde{g}_n(\theta) = \mathrm{sen} n\theta,$$

de modo que las bien conocidas propiedades de ortogonalidad para las funciones trigonométricas: $1, \cos\theta, \mathrm{sen}\theta, \ldots, \cos n\theta, \mathrm{sen} n\theta, \ldots,$ *se recuperan de forma inmediata. La relación que existe entre los dos sistemas bi-ortogonales es la siguiente:*

$$\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & -\beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{f}_n \\ \widetilde{g}_n \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

OBSERVACIÓN 11 *Conviene resaltar que la relación del tipo (3.27) para la función peso* $\omega(\theta) = 1$ *se cumple para cualquier función peso* ω. *En efecto, sean* $f_0 \bigcup \{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\widetilde{f}_0 \bigcup \{\widetilde{f}_n, \widetilde{g}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dos sistemas bi-ortogonales para* ω. *Entonces,* $\forall n \geq 1$, $\widetilde{f}_n \in \mathcal{T}_n$ *y* $\widetilde{f}_n \perp \mathcal{T}_{n-1}$, *es decir,* $\langle \widetilde{f}_n, T\rangle_\omega = 0$, $\forall T \in \mathcal{T}_{n-1}$, *por lo que si ponemos*

$$\widetilde{f}_n(\theta) = \alpha_0 f_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(\theta) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j(\theta),$$

concluimos que $\alpha_j = 0,\ j = 0, 1, \ldots, n-1$ *y* $\beta_j = 0,\ j = 1, \ldots, n-1$, *resultando:*

$$\widetilde{f}_n(\theta) = \alpha_n f_n + \beta_n g_n(\theta).$$

Análogamente,

$$\widetilde{g}_n(\theta) = \gamma_n f_n + \sigma_n g_n(\theta).$$

Ambas relaciones se pueden expresar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{f}_n \\ \widetilde{g}_n \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}, \text{ siendo } A_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & -\beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix},$$

con

$$\alpha_n = \tfrac{\langle \widetilde{f}_n, f_n\rangle_\omega}{\|f_n\|_\omega^2}, \quad \beta_n = \tfrac{\langle \widetilde{f}_n, g_n\rangle_\omega}{\|g_n\|_\omega^2}$$
$$\gamma_n = \tfrac{\langle \widetilde{g}_n, f_n\rangle_\omega}{\|f_n\|_\omega^2}, \quad \sigma_n = \tfrac{\langle \widetilde{g}_n, g_n\rangle_\omega}{\|g_n\|_\omega^2}.$$

(Aquí, $\|f_n\|_\omega^2 = \langle f_n, f_n\rangle_\omega$*).Puesto que podemos intercambiar los papeles de ambos sistemas, se sigue*

$$\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} = \widetilde{A}_n \begin{pmatrix} \widetilde{f}_n \\ \widetilde{g}_n \end{pmatrix}, \text{ donde } \widetilde{A}_n = A_n^{-1}.$$

Además, cuando consideramos sistemas bi-ortonormales, entonces $\|f_n\|_\omega = \|g_n\|_\omega = 1$, comprobándose ahora que $\widetilde{A}_n = A_n^t = A_n^{-1}$, es decir, que A_n es una matriz ortogonal.

3.4. Fórmulas de cuadratura con máximo grado de precisión trigonométrica

En esta sección comenzaremos propiamente el problema de estimar la integral

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\omega(\theta)d\theta, \tag{3.28}$$

donde, como siempre, ω es una función peso en $[-\pi, \pi]$ y f periódica (de periodo 2π) de modo que $f\omega \in L_1([-\pi, \pi])$. Al igual que se hizo en el Capítulo 1, la integral (3.28) la vamos a aproximar por una expresión (fórmula de cuadratura):

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j), \quad \theta_i \neq \theta_j,\ \forall i \neq j,\ \theta_j \in [-\pi, \pi],\ \forall j = 1, \ldots, n. \tag{3.29}$$

Ahora los nodos y pesos de $I_n(f)$ se van a determinar imponiendo que $I_n(f)$ sea exacta en subespacios de $\mathcal{T}$ (polinomios trigonométricos) de dimensión lo más grande posible, es decir, que se cumpla que $I_n(T) = I_\omega(T)$, $\forall T \in \mathcal{T}_{m(n)}$, con $m(n)$ lo más grande posible. Previamente, se han de tener en cuenta los siguientes resultados:

Proposición 3.4.1 *No existen fórmulas de cuadratura del tipo (3.29) que sean exactas en $\mathcal{T}_n$, esto es, $m(n) < n$.*

Demostración: Supongamos que existe $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j)$ exacta en $\mathcal{T}_n$, y definamos $T_n(\theta) = \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)$. Así, $T_n^2 \in \mathcal{T}_n$ y se tiene que, por un lado

$$I_\omega(T_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(\theta)\omega(\theta)d\theta > 0,$$

y por otro lado, dado que $T_n^2(\theta_j) = 0,\ j = 1, \ldots, n,$

$$I_n(T_n^2) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T_n^2(\theta_j) = 0.$$

$\square$

Por esta razón damos la siguiente:

Definición 3.4 *Una fórmula de cuadratura* $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j)$, *si existe, tal que* $I_n(T) = I_\omega(T),\ \forall T \in \mathcal{T}_{n-1}$, *se dirá de "la máxima precisión trigonométrica".*

Proposición 3.4.2 *Una fórmula de cuadratura* $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j)$ *con la máxima precisión trigonométrica, tiene todos los pesos positivos.*

Demostración: Sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j) = I_\omega(f),\ \forall f \in \mathcal{T}_{n-1}$ y definamos $\forall j = 1, \ldots, n : t_j(\theta) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right)$. Vemos que $t_j \in \mathcal{T}_{n-1},\ t_j(\theta) \geq 0,\ \forall j = 1, \ldots, n$ y $t_j(\theta_j) > 0,\ \forall j = 1, \ldots, n$. Por consiguiente, para todo $j = 1, \ldots, n :$

$$0 < I_\omega(t_j) = I_n(t_j) = \lambda_j t_j(\theta_j) \ \Rightarrow\ \lambda_j > 0.$$

$\square$

Nuestro problema ahora será caracterizar la existencia de tales fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión algebraica. Previamente podemos dar la siguiente

Proposición 3.4.3 *Dados* n *nodos distintos en* $[-\pi, \pi]$, *existe un cierto subespacio* $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ *de* $\mathcal{T}_{n-1}$ *de dimensión* n, *de modo que podemos determinar de forma única* n *pesos* $A_1, \ldots, A_n$ *para los cuales se tiene:*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(\theta_j) = I_\omega(f),\ \forall f \in \widetilde{\mathcal{T}}_n.$$

Demostración: Supongamos primero n impar, esto es, $n = 2m + 1$ y tomemos $\widetilde{\mathcal{T}}_n = \widetilde{\mathcal{T}}_{2m+1} = \mathcal{T}_m$. Obviamente, $\dim(\mathcal{T}_m) = 2m + 1 = n$.

Ahora bien, dados $\theta_1, \ldots, \theta_n, \quad \theta_i \neq \theta_j, \ \forall i \neq j, \ \theta_j \in [-\pi, \pi], \ \forall j = 1, \ldots, n$, sabemos que existe $L_n \in \mathcal{T}_m$ que interpola a f en tales nodos. Así pues, utilizando la fórmula de Lagrange:

$$L_n(\theta) = \sum_{j=1}^{n} t_j(\theta) f(\theta_j), \ t_j \in \mathcal{T}_m, \ (t_j(\theta_k) = \delta_{j,k}),$$

podemos escribir

$$I_\omega(L_n) = \sum_{j=1}^{n} I_\omega(t_j) f(\theta_j) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(\theta_j),$$

con $A_j = I_\omega(t_j), \ j = 1, \ldots, n$ y cumpliendo, por propia construcción, que $I_n(f)$ es exacta en $\mathcal{T}_m$.

Falta comprobar la unicidad. Supongamos que $\exists \ \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_n$ tales que

$$\widetilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{A}_j f(\theta_j) = I_\omega(f), \ \forall f \in \mathcal{T}_m.$$

Utilizando los polinomios trigonométricos $t_j \in \mathcal{T}_m$, definidos anteriormente, se tiene:

$$\widetilde{I}_n(t_j) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{A}_j t(\theta_j) = \widetilde{A}_j = I_\omega(t_j) = A_j, \ \forall j = 1, \ldots, n.$$

Supongamos ahora que n es par, es decir, $n = 2m$. Ahora tomaremos $\widetilde{\mathcal{T}}_n = \mathcal{T}_m \setminus \langle \cos m\theta \rangle$ ó $\widetilde{\mathcal{T}}_n = \mathcal{T}_m \setminus \langle \mathrm{sen} m\theta \rangle$ y procedemos como en el caso anterior, haciendo uso del Teorema 3.1 de este Capítulo. □

Después de estos resultados preliminares, podemos ya enunciar nuestro problema. A saber: “ Dada la integral $I_\omega(f)$ y $n \in \mathbb{N}$, encontrar nodos $\theta_1, \ldots, \theta_n$ en $[-\pi, \pi]$ distintos entre sí y números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j) = I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \omega(\theta) d\theta, \ \forall f \in \mathcal{T}_{n-1}. \tag{3.30}$$

Dado que $\mathcal{T}_{n-1} = \langle 1, \cos\theta, \mathrm{sen}\theta, \ldots, \cos(n-1)\theta, \mathrm{sen}(n-1)\theta \rangle$, la fórmula

(3.30) conduce al siguiente sistema

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta)d\theta \\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos\theta_j = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\omega(\theta)d\theta \\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{sen}\theta_j = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\theta\omega(\theta)d\theta \\
&\dots \\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos(n-1)\theta_j = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-1)\theta\omega(\theta)d\theta \\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{sen}(n-1)\theta_j = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(n-1)\theta\omega(\theta)d\theta,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

el cual es no lineal con $2n-1$ ecuaciones y $2n$ incógnitas: $\{\theta_j\}_{j=1}^{n}$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$. En lo que sigue supondremos que n es par: $n = 2m$ y procederemos como en el caso de las fórmulas Gaussiana ([14]). Así, en lugar de "tratar" directamente el sistema (3.31), intentaremos analizar las propiedades del polinomio trigonométrico cuyos ceros son precisamente los nodos $\{\theta_j\}_{j=1}^{n}$ que estamos buscando. Sea pues, $T_m(\theta) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)$. Así, siempre que dicho polinomio trigonométrico pueda ser caracterizado y que sus ceros satisfagan $\theta_i \neq \theta_j$, $\forall i \neq j$, $\{\theta_j\}_{j=1}^{n} \subset [-\pi, \pi]$, entonces los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ se pueden deducir de las $2m$ primeras ecuaciones, las cuales constituyen un sistema lineal en las incógnitas $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$. Por la Proposición 3.4.3, tal sistema admite solución única.

Ahora bien, utilizando convenientemente las $2m - 1$ ecuaciones, se puede mostrar que $T_m(\theta)$ cumple lo siguiente

$$\langle T_m, t\rangle_\omega = \int_{-\pi}^{\pi} T_m(\theta)t(\theta)\omega(\theta)d\theta = 0,\ \forall t \in \mathcal{T}_{m-1}. \tag{3.32}$$

Supongamos ahora dado un sistema bi-ortogonal $f_0 \bigcup \{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ para la función peso ω. Como $T_m \in \mathcal{T}_m$ y $f_0 \bigcup \{f_k, g_k\}_{k=0}^{m}$ es una base de $\mathcal{T}_m$, podemos escribir

$$T_m(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k f_k(\theta) + \beta_k g_k(\theta)\right),$$

y por (3.32) se sigue que $\alpha_k = 0,\ k = 0, \ldots, m-1;\ \beta_k = 0,\ k = 1, \ldots, m-1$. Por consiguiente:

$$T_m(\theta) = \alpha_m f_m(\theta) + \beta_m g_m(\theta),\ |a_m| + |b_m| > 0, \tag{3.33}$$

y hemos probado el siguiente:

Teorema 3.3 *Sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j)$ una fórmula de cuadratura con máximo grado de precisión trigonométrica para $I_\omega(f)$ y sea $f_0 \bigcup \{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ un sistema bi-ortogonal para la función peso ω. Definamos:*

$$T_m(\theta) = \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right),$$

donde estamos suponiendo que $n = 2m$. Entonces, existen a y b reales, ambos no nulos, tales que:

$$T_m(\theta) = a f_m(\theta) + b g_m(\theta). \tag{3.34}$$

La pregunta ahora es, ¿existen realmente las fórmulas $I_n(f) = I_{2m}(f)$ con el máximo grado de precisión trigonométrica? Tal interrogante lleva directamente a indagar acerca de la localización de los ceros del polinomio trigonométrico T_m dado por (3.34). La respuesta la tenemos en el siguiente:

Teorema 3.4 *Sea $f_0 \bigcup \{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ un sistema bi-ortogonal para la función peso ω y sean a y b números reales no nulos. Entonces, el polinomio trigonométrico $T_m(\theta) = a f_m(\theta) + b g_m(\theta)$ tiene exactamente $2m$ ceros reales y distintos contenidos en cualquier intervalo de longitud 2π.*

Demostración: Sea p el número de ceros de $T_m(\theta)$ en $[-\pi, \pi]$ con multiplicidad impar, siendo estos: $\theta_1, \ldots, \theta_p$ y modo que $0 \leq p \leq 2m$. También sabemos que p debe ser par, digamos $p = 2k$. Así pues, si su'ponemos que $k < m$ hemos de llegar a una contradicción. A tal efecto, definamos

$$U_k(\theta) = \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \theta_{2j}}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \theta_{2j-1}}{2}\right) \in \mathcal{T}_k.$$

(Obviamente, si $k = 0$, entonces $U_k(\theta) = 1$). Por consiguiente:

$$T_m(\theta) = a f_m(\theta) + b g_m(\theta) = U_k(\theta) V_{m-k}(\theta),$$

donde $V_{m-k} \in \mathcal{T}_{m-k}$ y signo constante en $[-\pi, \pi]$. En virtud de la ortogonalidad, se sigue, por un lado, que:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} T_m(\theta) U_k(\theta) \omega(\theta) d\theta = 0,$$

mientras que por otro:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} U_k^2(\theta) V_{m-k}(\theta) \omega(\theta) d\theta \neq 0,$$

pues $\omega(\theta)$ es una función peso en $[-\pi, \pi]$ y $V_{m-k}(\theta)$ no cambia de signo en este intervalo. Se sigue que k debe coincidir con m y se concluye la demostración. □

Además, también es válida la siguiente propiedad de entrelazamiento de ceros:

Teorema 3.5 *En las mismas condiciones que el Teorema 3.4, los ceros de $af_m(\theta) + bg_m(\theta)$ y $-af_m(\theta) + bg_m(\theta)$ se entrelazan.*

Demostración: dado que estamos tratando propiedades de los ceros, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el sistema

$$\left\{ f_0 \bigcup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty} \right\}$$

es bi-ortonormal, e introduzcamos la función:

$$K_n(\alpha, \theta) = f_0(\alpha) f_0(\theta) + \sum_{k=1}^{n} \left(f_k(\alpha) f_k(\theta) + g_k(\alpha) g_k(\theta) \right),$$

lo cual, es fácil verificar que satisfacen la propiedad de núcleo reproductor:

$$T(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\alpha, \theta) T(\theta) \omega(\theta) d\theta, \ \forall T \in \mathcal{T}_n.$$

Por otro lado, del artículo de Szegő [31], se puede deducir la siguiente identidad de Christoffel- Darboux:

$$\begin{aligned} K_{n-1}(\alpha, \theta) &= \tfrac{1}{2} \tfrac{\kappa_{2n-1}}{\kappa_{2n}} \cot\left(\tfrac{\theta-\alpha}{2}\right) \left(f_n(\alpha) g_n(\theta) - f_n(\theta) g_n(\alpha) \right) - \\ &- \left(r_n f_n(\alpha) f_n(\theta) + s_n g_n(\alpha) g_n(\theta) \right), \end{aligned}$$

siendo $\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \ldots + l_n$ el polinomio ortonormal de Szegő de grado n ($\kappa_n > 0$) y

$$2r_n = 1 - \tfrac{|l_{2n}|}{\kappa_{2n}}, \quad 2s_n = 1 + \tfrac{|l_{2n}|}{\kappa_{2n}} > 0.$$

dado que $4r_n s_n = 1 - \frac{|l_{2n}|^2}{\kappa_{2n}^2} = 1 - s_n^2 > 0$, se sigue que $r_n > 0$, obteniendo la siguiente fórmula confluente:

$$\begin{aligned} K_{n-1}(\alpha,\alpha) &= \lim_{\theta\to\alpha} K_{n-1}(\alpha,\theta) = \tfrac{\kappa_{2n-1}}{\kappa_{2n}} \left(f_n(\alpha) g_n^{'}(\alpha) - f_n^{'}(\alpha) g_n(\alpha) \right) - \\ &- \left(r_n f_n^2(\alpha) + s_n g_n^2(\alpha) \right). \end{aligned}$$

Haciendo $M_n(\alpha) = r_n f_n^2(\alpha) + s_n g_n^2(\alpha) > 0$ y teniendo en cuenta que $K_{n-1}(\alpha,\alpha) > 0$, llegamos a la siguiente relación:

$$\forall\alpha \in \mathbb{R} : \; f_n(\alpha) g_n^{'}(\alpha) - f_n^{'}(\alpha) g_n(\alpha) = \left(M_n(\alpha) + K_{n-1}(\alpha,\alpha) \right) \frac{\kappa_{2n-1}}{\kappa_{2n}} > 0,$$

siendo fácil ahora ver que los ceros de $f_n(\theta)$ y $g_n(\theta)$ se entrelazan.

Consideremos ahora:

$$\begin{aligned} C_n(\theta) &= a f_n(\theta) + b g_n(\theta) \\ D_n(\theta) &= -b f_n(\theta) + a g_n(\theta). \end{aligned}$$

Entonces:

$$C_n(\alpha) D_n^{'}(\alpha) - C_n^{'}(\alpha) D_n(\alpha) = (a^2 + b^2) f_n(\alpha) g_n^{'}(\alpha) - f_n^{'}(\alpha) g_n(\alpha) > 0,$$

y la demostración se concluye sin dificultad. □

Así pues, tenemos de inmediato,

Corolario 3.3 *Sea* $f_0 \bigcup \{f_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *un sistema bi-ortogonal para* ω. *Entonces,* $\forall m \geq 1$

(i) Tanto f_m *como* g_m *tienen* $2m$ *ceros distintos y contenidos en* $[-\pi, \pi]$.

(ii) Los ceros de f_m *se entrelazan con los de* g_m *en* $[-\pi, \pi]$.

Observación 12 *Los dos teoremas anteriores fueron probados por Szegő [31], utilizando la propiedad de los ceros de los polinomios de Szegő. Aquí hemos dado una prueba alternativa utilizando el significado de la bi-ortogonalidad. Sería interesante investigar si la propiedad de los ceros de los polinomios de Szegő se pudiera deducir a partir de la propia bi-ortogonalidad.*

El Teorema 3.4 nos permite establecer el recíproco al Teorema 3.3.

TEOREMA 3.6 *Sea* $f_0 \bigcup \{f_k, g_k\}_{k=0}^{\infty}$ *un sistema bi-ortogonal para la función peso* ω. *Sean* a *y* b *reales, ambos no nulos y* $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ *los ceros de* $T_n(\theta) = af_n(\theta)+bg_n(\theta)$. *Entonces, existen números positivos* $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ *tales que*

$$I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\theta_j) = I_\omega(f), \ \forall f \in \mathcal{T}_{2n-1}.$$

Demostración: A lo largo de la demostración $\widetilde{\mathcal{T}_n}$ coincidirá bien con $\mathcal{T}_n \setminus \langle \cos n\theta \rangle$ ó con $\mathcal{T}_n \setminus \langle \mathrm{sen} n\theta \rangle$. Así pues, $dim\left(\widetilde{\mathcal{T}_n}\right) = 2n$ y dados los $2n$ ceros $\theta_1, \dots, \theta_{2n}$, de $T_n(\theta) = af_n(\theta) + bg_n(\theta)$, $(|a| + |b| > 0)$, sabemos que existen $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ unívocamente determinados tales que

$$I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\theta_j) = I_\omega(f), \ \forall f \in \widetilde{\mathcal{T}_n}.$$

Veamos que $I_{2n}(f)$ es del máximo grado de precisión trigonométrica, es decir, $I_{2n}(f) = I_\omega(f), \ \forall f \in \mathcal{T}_{2n-1}$.

Tomemos $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$, y sea $L_n \in \widetilde{\mathcal{T}_n}$ tal que

$$T(\theta_j) = L_n(\theta_j), \ j = 1, \dots, 2n.$$

Entonces, $T - L_n \in \mathcal{T}_{2n-1}$ y $(T - L_n)(\theta_j), \ j = 1, \dots, 2n$. Por consiguiente, podemos escribir

$$T(\theta) - L_n(\theta) = U_n(\theta)V(\theta), \ V \in \mathcal{T}_{n-1},$$

es decir, $T(\theta) = L_n(\theta) + U_n(\theta)V(\theta)$. Por tanto,

$$I_\omega(T) = \int_{-\pi}^{\pi} L_n(\theta)\omega(\theta)d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} U_n(\theta)V(\theta)\omega(\theta)d\theta.$$

Ahora bien, por ortogonalidad,

$$\int_{-\pi}^{\pi} U_n(\theta)V(\theta)\omega(\theta)d\theta = \alpha \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\theta)V(\theta)\omega(\theta)d\theta + \beta \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\theta)V(\theta)\omega(\theta)d\theta.$$

Por tanto,

$$I_\omega(T) = \int_{-\pi}^{\pi} L_n(\theta)\omega(\theta)d\theta = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j L_n(\theta_j) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j T(\theta_j) = I_{2n}(T).$$

Por otro lado, el carácter positivo de los pesos sigue de la Proposición 3.4.2 . Sin embargo, también podemos dar una representación integral de los mismos. Así, para $j = 1, \ldots, 2n$, definimos,

$$l_j(\theta) = c_j \frac{T_n(\theta)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)},$$

siendo c_j una constante de normalización de modo que $l_j(\theta_j) = 1$. Es decir:

$$l_j(\theta_j) = c_j \lim_{\theta \to \theta_j} \frac{T_n(\theta)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)} = 2c_j T_n^{'}(\theta_j).$$

Así, $c_j = \frac{1}{2T_n'(\theta_j)}$.

Por otro lado, $l_j^2 \in \mathcal{T}_{2n-1},\ j = 1, \ldots, 2n$ y $l_j(\theta_k) = \delta_{j,k}$, lo cual implica

$$I_\omega(l_j^2) = I_{2n}(l_j^2) = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k l_j(\theta_k) = \lambda_j,\ j = 1, \ldots, 2n.$$

En definitiva, hemos obtenido la siguiente expresión para los pesos:

$$\lambda_j = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{T_n(\theta)}{2T_n'(\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)} \right)^2 \omega(\theta) d\theta,\ j = 1, \ldots, 2n. \tag{3.35}$$

□

El siguiente resultado podría ser de interés a la hora de estimar el error en la fórmula $I_{2n}(f)$. En efecto, se tiene

TEOREMA 3.7 *Sean a y b reales no nulos y $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ los ceros de $af_n(\theta)+bg_n(\theta)$, siendo $f_0 \bigcup \{f_k, g_k\}_1^\infty$ un sistema bi-ortonormal. Sea $H_{2n} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ tal que*

$$H_{2n}(\theta_j) = f(\theta_j), \quad 1 \le j \le 2n$$

$$H_{2n}^{'}(\theta_j) = f^{'}(\theta_j), \quad 1 \le j \le 2n,\ j \ne k \in \{1, \ldots, 2n\}.$$

Entonces, $I_\omega(H_{2n})$ coincide con $I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j)$, la correspondiente fórmula de cuadratura con el máximo grado de precisión trigonométrica.

Demostración: Hágase como ejercicio.

Ahora cabrá preguntarse si para la fórmula $I_{2n}(f)$ con el máximo grado de precisión trigonométrica, dada en el teorema anterior, los pesos admiten una representación explícita en términos de un sistema bi-ortonormal similar a la fórmula de los pesos para las cuadraturas Gaussianas. A tal efecto, recordar que si denotamos por $A_1, \ldots, A_n$ los pesos de la $n-$ésima fórmula Gaussiana para la función peso $\sigma(x)$ en $[a,b]$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$, entonces se cumple:

$$A_j = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x_j)|^2}, \ j = 1, \ldots, n,$$

siendo $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ la correspondiente sucesión de polinomios ortonormales con respecto a $\sigma(x)$ en $[a,b]$, y $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ los ceros de φ_n, $\forall n$. Al respecto, vale el siguiente resultado que enunciaremos sin demostración:

TEOREMA 3.8 *Sea* $f_0 \bigcup \{f_k, g_k\}_1^{\infty}$ *un sistema bi-ortonormal para* $\omega(\theta)$ *y sea* $I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\theta_j)$ *la correspondiente fórmula de cuadratura con el máximo grado de precisión trigonométrica. Entonces*

$$\lambda_j = \frac{1}{f_0^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(f_k^2(\theta_j) + g_k^2(\theta_j)\right) + \left(\frac{1-|\delta_{2n}|}{2}\right) f_n^2(\theta_j) + \left(\frac{1+|\delta_{2n}|}{2}\right) g_n^2(\theta_j)}, \tag{3.36}$$

siendo $\delta_{2n} = \rho_{2n}(0)$*, donde* $\rho_{2n}(z)$ *es el polinomio mónico de Szegő de grado* $2n$ *y* $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ *los ceros de* $af_n(\theta) + bg_n(\theta)$, $(|a| + |b| > 0)$.

EJEMPLO 3.3 *Ahora vamos a caracterizar, de acuerdo con los resultados obtenidos, las fórmulas de máximo grado de precisión trigonométrica para* $\omega(\theta) = 1, \ \forall\theta \in [-\pi, \pi]$*. Como hemos visto, un sistema ortogonal es* $\{1, (\cos n\theta, \mathrm{sen} n\theta)\}_{n=1}^{\infty}$*. Por consiguiente, un sistema bi-ortonormal, viene dado por*

$$f_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_n(\theta) = \tfrac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}}, \quad g_n(\theta) = \tfrac{\mathrm{sen} n\theta}{\sqrt{\pi}}, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Los nodos serán los ceros de $af_n(\theta) + bg_n(\theta)$*. Así, tomando* $a = 0$ *y* $b = 1$*, se tiene que* $g_n(\theta) = 0$*, es decir,* $\mathrm{sen} n\theta = 0$*, y por tanto* $\theta = \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tomando $k \in \{-n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n-1\}$, *tenemos* $2n$ *ceros en* $[-\pi, \pi]$, *es decir,* $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$, $-n \leq k \leq n-1$. *Si hacemos* $k = j - n$:

$$\theta_j = \frac{j - n\pi}{n} = -\pi + \frac{j\pi}{n} = -\pi + \frac{2\pi j}{2n},\ j = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Es decir, los $2n$ *ceros* θ_j *están igualmente espaciados en* $[-\pi, \pi]$ *con paso* $h = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$.

Por otro lado, $\rho_n(z) = z^n$ *y* $\delta_{2n} = \rho_{2n}(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. *Así pues, si utilizamos la expresión (3.36) para los pesos, resultará:*

$$\lambda_j = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\cos^2(k\theta_j)}{\pi} + \frac{\operatorname{sen}^2(k\theta_j)}{\pi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2(n\theta_j)}{\pi} + \frac{\operatorname{sen}^2(n\theta_j)}{\pi} \right)},$$

es decir, $\lambda_j = \frac{\pi}{n}$, $j = 1, \dots, 2n$.

Tales expresiones para los nodos y para los pesos coinciden con los dados en la introducción del Capítulo 2 (Sección 2.10), si bien con nuestro análisis sólo hemos deducido el caso de fórmulas de cuadratura con un número par de nodos, tanto para el caso de $\omega(\theta) = 1$ como para el caso general. Ahora bien, al menos para $\omega(\theta) = 1$ hemos visto que se pueden construir fórmulas con el máximo grado de precisión trigonométrica y un número impar de nodos. Así pues, ¿Qué sucede en el caso general? ¿Cómo proceder? Parece claro que no podemos ya utilizar los ceros de polinomios trigonométricos como nodos, pues éstos son siempre un número par. Tales interrogantes no aparecen en el trabajo de Szegő, posiblemente debido a que ni se lo planteó, (estaba más interesado en otras cuestiones de tipo analítico), o si se lo llegó a plantear, es muy posible que pensara que sólo habría de introducirse ligeras modificaciones técnicas. Tales modificaciones, en modo alguno triviales, forman parte de un trabajo de investigación de los autores, el cual se haya en fase de preparación. Sin embargo, aquí no seguiremos dicha pauta. Como alternativa, pasaremos a la circunferencia unidad y nos plantearemos el construir fórmulas de cuadratura con nodos sobre $\mathbb{T}$ y que sean exactas en ciertos subespacios de polinomios de Laurent, siendo éste precisamente el objetivo de la siguiente sección.

3.5. Cuadraturas sobre la circunferencia unidad. Fórmulas de Szegő

En esta sección nos planteamos estimar integrales de la forma

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu(z),$$

siendo μ una medida positiva en $\mathbb{T}$, por medio de una expresión

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j), \; z_j \neq z_k, \; z_j \in \mathbb{T}. \tag{3.37}$$

Aquí volvemos a suponer, por simple comodidad, que la medida μ es absolutamente continua, es decir, $d\mu(z) = \omega(z)dz, \; z \in \mathbb{T}$ y escribiremos la integral anterior como:

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta = I_\omega(f).$$

Lógicamente, ahora f puede tomar valores complejos, de modo que si $f\left(e^{i\theta}\right) = f_1(\theta) + i f_2(\theta)$, (las funciones $f_j(\theta), \; j = 1, 2$ son periódicas de periodo 2π) entonces $I_\omega(f) = I_\omega(f_1) + i I_\omega(f_2)$ y podríamos utilizar la teoría desarrollada en la sección anterior para construir las fórmulas (3.37). Sin embargo, procederemos dentro del propio marco de funciones definidas sobre $\mathbb{T}$ y, teniendo en cuenta el hecho básico de que toda función continua sobre $\mathbb{T}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios de Laurent, de forma que los nodos $\{z_j\}_{j=1}^{n}$ sobre $\mathbb{T}$ y los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ se van a determinar imponiendo que la fórmula $I_n(f)$ sea exacta en subespacios de Δ de la forma $\Delta_{-p,p}$ con p dependiendo de n lo más grande posible. (Claramente, lo anterior significa que $I_\omega(L) = I_n(L), \; \forall L \in \Delta_{-p,p}, \; p = p(n)$.)

Al igual que en el caso trigonométrico, debemos tener en cuenta los siguientes hechos:

1. No puede existir una fórmula de cuadratura con n nodos que sea exacta en $\Delta_{-n,n}$. Para ello, basta tomar $Q_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ de modo que $\left|Q_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 = L_n\left(e^{i\theta}\right)$, con $L_n \in \Delta_{-n,n}$. Así,

$$I_\omega(L_n) > 0, \quad \text{y} \quad I_n(L_n) = 0.$$

2. Cualquier fórmula de cuadratura con n nodos que sea exacta en $\Delta_{-(n-1),n-1}$ tiene coeficientes λ_j positivos. Tómese $l_j(z) = \frac{Q_n(z)}{(z-z_j)}$, $j = 1, \ldots, n$ y considérese $\left| l_j\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 \in \Delta_{-(n-1),n-1}$.

3. Si existe una fórmula de cuadratura con n nodos distintos y situados sobre $\mathbb{T}$ que sea exacta en $\Delta_{-(n-1),n-1}$, diremos que $\Delta_{-(n-1),n-1}$ representa el "máximo dominio de validez" para dicha fórmula, siendo nuestro objetivo el construir fórmulas de cuadratura con el máximo dominio de validez.

4. Sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j),\ \theta_j \neq \theta_k,\ \theta_j \in [-\pi, \pi]$ exacta en $\mathcal{T}_{n-1}$, entonces $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j)$ con $z_j = e^{i\theta_j},\ j = 1, \ldots, n$ es exacta en $\Delta_{-(n-1),n-1}$. Así pues, de la sección anterior, deducimos que el problema de construir fórmulas de cuadratura con nodos sobre $\mathbb{T}$ y con "máximo dominio de validez" estaría resuelto para el caso de un número par de nodos.

5. Recíprocamente, sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j)$ con nodos distintos sobre $\mathbb{T}$ y exacta en $\Delta_{-(n-1),n-1}$. Entonces, $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\theta_j)$, $(z_j = e^{i\theta_j})$ es también exacta en $\mathcal{T}_{n-1}$.

De ésto último, vemos que si para $n = 1, 2, \ldots$ se puede contruir una fórmula $I_n(f)$ con nodos distintos sobre $\mathbb{T}$ y exacta en $\Delta_{-(n-1),n-1}$, tendríamos resuelto el problema planteado al final de la última sección. Así pues, procederemos con la contrucción de tales fórmulas, dando en primer lugar el siguiente:

Teorema 3.9 *Sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j)$ con nodos distintos sobre $\mathbb{T}$ y exacta en $\Delta_{-(n-1),n-1}$ y definamos $B_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$. Entonces*

1. *El polinomio $B_n(z)$ es invariante.*

2. *El polinomio $B_n(z)$ cumple las siguientes condiciones de ortogonalidad:*

$$\langle B_n, z^k \rangle_\omega = 0,\ 1 \leq k \leq n-1 \quad \langle B_n, 1 \rangle_\omega \neq 0 \quad \langle B_n, z^n \rangle_\omega \neq 0. \tag{3.38}$$

Demostración:

1.

$$\begin{aligned} B_n^*(z) &= z^n\overline{B_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = z^n\prod_{j=1}^n\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_j}\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{z_1\ldots z_n}\prod_{j=1}^n(z-z_j) = k_nB_n(z). \end{aligned}$$

Luego, el polinomio $B_n(z)$ es invariante.

2. La fórmula de cuadratura $I_n(f)$ es exacta en $\Delta_{-(n-1),n-1}$. Por tanto,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_j^k = \mu_k,\ -(n-1)\leq k\leq n-1, \tag{3.39}$$

siendo $\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta$, los momentos trigonométricos de $\omega(\theta)$, constituye un sistema no lineal de $2n-1$ ecuaciones con $2n$ incógnitas. Ahora, procediendo como en el caso polinómico ([14]) concluimos que $B_n(z)$ satisface:

$$\langle B_n, z^k\rangle_\omega = 0,\ 1\leq k\leq n-1. \tag{3.40}$$

Por otro lado, el requisito de que los nodos deben hallarse sobre $\mathbb{T}$, va a implicar que:

$$\langle B_n, 1\rangle_\omega \neq 0 \quad \text{y} \quad \langle B_n, z^n\rangle_\omega \neq 0. \tag{3.41}$$

En efecto, supongamos que $\langle B_n, 1\rangle_\omega = 0$. Si $B_n(z)$ satisface (3.40), se tiene que

$$\langle B_n, z^k\rangle_\omega = 0,\ 0\leq k\leq n-1,$$

implicando que $B_n(z) = c_n\rho_n(z),\ (c_n\neq 0)$, siendo ρ_n el $n-$ésimo polinomio de Szegő mónico. Dado que sus ceros se hallan en $\mathbb{D}$, conlleva una contradicción.

De la misma manera, si suponemos ahora que $\langle B_n, z^n\rangle_\omega = 0$, junto con la fórmula (3.40), tendríamos que

$$\langle B_n, z^k\rangle_\omega = 0,\ 1\leq k\leq n.$$

Por consiguiente, $B_n(z) = d_n\rho_n^*(z),\ (d_n\neq 0)$, surgiendo de nuevo otra contradicción ya que los ceros de ρ_n^* están en $\mathbb{E}$. $\square$

Observación 13 *Cabe resaltar que de la propia demostración del teorema anterior se deduce que no pueden existir fórmulas con n nodos sobre* $\mathbb{T}$ *que sean exactas ni en* $\Delta_{-n,n-1}$ *ni en* $\Delta_{-(n-1),n}$.

Los polinomios $B_n(z)$ que satisfacen las condiciones de ortogonalidad (3.38) fueron introducidos por Jones, Njåstad y Thron en [18], motivando la siguiente

Definición 3.5 *Un polinomio* $B_n(z)$ *de grado n se dice "para-ortogonal" con respecto a la función peso* $\omega(\theta)$ *si satisface (3.38), es decir,*

$$\langle B_n, z^k\rangle_\omega = 0,\ 1 \le k \le n-1 \quad \langle B_n, 1\rangle_\omega \neq 0 \quad \langle B_n, z^n\rangle_\omega \neq 0.$$

Inmediatamente, se plantean las siguientes cuestiones: Dado $n \in \mathbb{N}$, ¿existe un polinomio de grado n que satisfaga (3.38)? Caso de respuesta afirmativa, ¿ Cómo se puede caracterizar? ¿Qué se puede decir sobre sus ceros? Tales cuestiones fueron respondidas en el trabajo de Jones et al en el año 1989. En primer lugar, teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Szegő $\{\rho_n(z)\}_n$ y de sus recíprocos $\{\rho_n^*(z)\}_n$, (recordar que $\langle \rho_n, z^k\rangle_\omega = 0,\ 0 \le k \le n-1$ y $\langle \rho_n^*, z^k\rangle_\omega = 0,\ 1 \le k \le n$), se ve fácilmente que cualquier polinomio de la forma $\rho_n(z) + \tau\rho_n^*(z)$ con $\tau \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $1+\tau\overline{\delta}_n \neq 0$, tiene grado exactamente n y verifica (3.38). Por otro lado, si $\tau \in \mathbb{T}$, entonces $1+\tau\overline{\delta}_n \neq 0$, $(|\delta_n| < 1)$, $\rho_n(z) + \tau\rho_n^*(z)$ es invariante y lógicamente para-ortogonal. Además se cumple el siguiente

Teorema 3.10 *Sea* $B_n(z)$ *un polinomio de grado* n, *entonces* $B_n(z)$ *es para-ortogonal e invariante sí y sólo si*

$$B_n(z) = c_n\left(\rho_n(z) + \tau\rho_n^*(z)\right),\ c_n \neq 0,\ \tau \in \mathbb{T}. \tag{3.42}$$

Demostración: Veamos que si $B_n(z)$ es un polinomio de grado n, para-ortogonal e invariante entonces se puede expresar en la forma (3.42). Para ello consideremos el polinomio $T_n(z) = B_n(z) - c_n\rho_n(z) - d_n\rho_n^*(z)$ donde c_n y d_n se determinan imponiendo que $\langle T_n, \rho_n\rangle_\omega = 0$ y $\langle T_n, \rho_0\rangle_\omega = \langle T_n, 1\rangle_\omega = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} c_n &= \tfrac{\langle B_n,\rho_n\rangle_\omega}{\langle \rho_n,\rho_n\rangle_\omega} - \tfrac{\langle \rho_n^*,\rho_n\rangle_\omega}{\langle \rho_n,\rho_n\rangle_\omega}\tfrac{\langle B_n,1\rangle_\omega}{\langle \rho_n^*,1\rangle_\omega} \\ d_n &= \tfrac{\langle B_n,1\rangle_\omega}{\langle \rho_n^*,1\rangle_\omega} \neq 0. \end{aligned}$$

Dado que $T_n \in \Pi_n$ y $\{\rho_k\}_{k=0}^n$ es una base (ortogonal) de Π_n, podemos escribir

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k(z),\ a_k \in \mathbb{C}.$$

Por tanto $\langle T_n, \rho_0\rangle_\omega = a_0\langle \rho_0, \rho_0\rangle_\omega = 0$ y $a_0 = 0$. Análogamente, $\langle T_n, \rho_n\rangle_\omega = a_n\langle \rho_n, \rho_n\rangle_\omega = 0$ y $a_n = 0$.

Así, $T_n(z) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k\rho_k(z)$. Por otro lado, $\langle T_n, z\rangle_\omega = a_1\langle \rho_0, z\rangle_\omega$. Como T_n es para-ortogonal se tiene que $\langle T_n, z\rangle_\omega = 0$ y por tanto $a_1 = 0$. Continuando de esta manera, vemos que $a_2 = a_3 = \ldots a_{n-1} = 0$. Por consiguiente, $T_n(z) = 0$ y podemos escribir:

$$B_n(z) = c_n\rho_n(z) + d_n\rho_n^*(z).$$

Faltaría por comprobar que $c_n \neq 0$ y que $|c_n| = |d_n|$. Ahora bien, $c_n \neq 0$ ya que en caso contrario $B_n(z) = d_n\rho_n^*(z)$ y esto llevaría a una contradicción. Por otro lado, B_n es invariante, luego existe $k \in \mathbb{T}$ tal que $B_n^*(z) = kB_n(z)$. Dado que $B_n^*(z) - kB_n(z) = 0$ pero $B_n^*(z) = \overline{c}_n\rho_n^*(z) + \overline{d}_n\rho_n(z)$. Resultará:

$$\overline{c}_n\rho_n^*(z) + \overline{d}_n\rho_n(z) - kc_n\rho_n(z) - kd_n\rho_n^*(z) = 0,$$

lo cual implica:

$$(\overline{d}_n - kc_n)\rho_n(z) + (\overline{c}_n - kd_n)\rho_n^*(z) = 0.$$

Como ρ_n y ρ_n^* son linealmente independientes (compruébese), se sigue $|c_n| = |d_n|$. $\square$

En definitiva, por el teorema anterior, vemos que un polinomio para-ortogonal de grado n viene esencialmente dado en términos del polinomio de Szegő del mismo grado. Ahora bien, recuérdese que las sucesiones ρ_n y ρ_n^* satisfacen las leyes de recurrencia (2.22) Por consiguiente, un polinomio para-ortogonal e invariante se expresa en la forma

$$\begin{aligned} B_n(z) &= c_n\left(\rho_n(z) + \tau\rho_n^*(z)\right) \\ &= \left(1 + \tau\overline{\delta}_n\right) c_n \left(z\rho_{n-1}(z) + \tfrac{\tau+\delta_n}{1+\tau\overline{\delta}_n}\rho_{n-1}^*(z)\right). \end{aligned}$$

Obsérvese que $(1 + \tau\overline{\delta}_n) \neq 0$ pues $|\tau| = 1$.

Así,

$$B_n(z) = \widetilde{c}_n \left(z\rho_{n-1}(z) + \lambda\rho^*_{n-1}(z) \right), \; \widetilde{c}_n \neq 0, \; |\lambda| = 1, \tag{3.43}$$

pues $\lambda = \frac{\tau+\delta_n}{1+\tau\bar{\delta}_n}$ tiene efectivamente módulo uno.

Recíprocamente, cualquier polinomio de la forma (3.43) es para-ortogonal e invariante ya que lo podemos escribir como,

$$B_n(z) = c_n \left(\rho_n(z) + \tau\rho^*_n(z) \right), \text{ con } \tau = \frac{\delta_n - \lambda}{\bar{\delta}_n\lambda - 1},$$

siendo fácil comprobar que $|\tau| = 1$.

En suma, hemos probado la siguiente caracterización alternativa de un polinomio para-ortogonal e invariante

Teorema 3.11 *Un polinomio $B_n(z)$ es para-ortogonal e invariante sí y sólo si*

$$B_n(z) = c_n \left(z\rho_{n-1}(z) + \lambda\rho^*_{n-1}(z) \right), \; |\lambda| = 1, \; c_n \neq 0.$$

Observación 14 *Como consecuencia del teorema anterior, dado $\lambda \in \mathbb{T}$, cuando se desee computar un polinomio para-ortogonal e invariante, sólo se necesita conocer el polinomio de Szegő de grado $n-1$: $\rho_{n-1}(z)$.*

Continuando con el análisis de la fórmula de cuadratura sobre $\mathbb{T}$ con "máximo dominio de validez", por el Teorema 3.9, se torna crucial el conocer la localización de los ceros de los polinomios $B_n(z), \; n = 1, 2, \ldots$ dados por (3.43) o equivalentemente por (3.42). Al respecto, tenemos el siguiente

Teorema 3.12 *Sea $B_n(z)$ polinomio de grado n, para-ortogonal e invariante, entonces $B_n(z)$ tiene exactamente n ceros distintos situados sobre $\mathbb{T}$.*

Demostración: Consideraremos primero el caso par, de forma que $B_{2n}(z)$ es ahora un polinomio de grado $2n$, para-ortogonal e invariante. Además, sin pérdida de generalidad podemos suponer que es "1-invariante" o "autorecíproco". Por consiguiente:

$$e^{-in\theta} B_n\left(e^{i\theta}\right) = T_n(\theta), \; T_n \in \mathcal{T}_n, \text{ de grado exacto } n.$$

Comprobemos que T_n es ortogonal a $\mathcal{T}_{n-1}$, esto es, $\langle T_n, T\rangle = 0,\ \forall T \in \mathcal{T}_{n-1}$, o equivalentemente, $\langle T_n, z^j\rangle = 0,\ -(n-1) \leq j \leq n-1$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\langle T_n, z^j\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} B_{2n}\left(e^{i\theta}\right) e^{-ij\theta}\omega(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} B_{2n}\left(e^{i\theta}\right) e^{-i(n+1)\theta}\omega(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Dado que $-(n-1) \leq j \leq n-1$, entonces $1 \leq n+j \leq 2n-1$, por lo que cuando $n+j=k$:

$$\langle T_n, z^j\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} B_{2n}\left(e^{i\theta}\right) e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta = \langle B_{2n}, z^k\rangle = 0,$$

debido a la para-ortogonalidad. Sea ahora $(f_0, \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty})$ un sistema bi-ortogonal, entonces existen a y b reales no nulos tales que $T_n(\theta) = af_n(\theta) + bg_n(\theta)$. Por consiguiente, aplicando el Teorema 3.4 vemos que $T_n(\theta)$ tiene exáctamente $2n$ ceros distintos en $[-\pi, \pi]$, lo cual implica que $B_{2n}(z)$ tiene $2n$ ceros distintos sobre $\mathbb{T}$.

Supongamos ahora $B_{2n+1}(z)$ (caso impar) para-ortogonal e invariante. Tal y como vimos en la Sección 1.1, se sabe que $B_{2n+1}(z)$ tiene al menos un cero sobre $\mathbb{T}$ de multiplicidad impar, por lo que podemos escribir:

$$B_{2n+1}(z) = (z-\alpha)\widetilde{B}_{2n}(z),\ |\alpha| = 1,$$

siendo $\widetilde{B}_{2n}(z)$ de grado $2n$, comprobándose que $\widetilde{B}_{2n}(z)$ es invariante y para-ortogonal con respecto a la función peso $\widetilde{\omega}(\theta) = |e^{i\theta} - \alpha|^2\omega(\theta)$ (hágase como ejercicio).

Por consiguiente, $\widetilde{B}_{2n}(z)$ tiene exactamente $2n$ ceros distintos localizados sobre $\mathbb{T}$. Además, cualquier cero de $\widetilde{B}_{2n}(z)$ debe ser distinto de α, pues de lo contrario, la multiplicidad de éste sería par. □

Observación 15 *En el artículo [18], Jones et al. dan una demostración más larga. Aquí, hemos aprovechado la propiedad de los ceros de los sistemas bi-ortogonales para una demostración más directa y sencilla.*

Supongamos ahora que $\{B_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$representa una sucesión de polinomios para-ortogonales e invariantes (autorecíprocos), de modo que, para $n = 1, 2, \ldots$ podemos definir:

$$f_n(\theta) = \frac{B_{2n}\left(e^{i\theta}\right)}{e^{in\theta}} \in \mathcal{T}_n,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{3.44}$$

Por tanto, si añadimos $f_0 \equiv \text{cte} \neq 0$, la sucesión $\{f_n\}_0^\infty$ representará un sistema ortogonal no trivial de polinomios trigonométricos, en el sentido que para cada n, $f_n(\theta)$ tiene grado exacto n y $\langle f_n, f_m \rangle = k_n \delta_{n,m}$, $k_n > 0,\ n, m = 1, 2, \ldots$. En consecuencia, parece natural el preguntarse si es posible determinar otro sistema ortogonal de polinomios trigonométricos $\{g_n\}_0^\infty$ de forma que $(f_0, \{f_k, g_k\}_{k=1}^\infty)$ forme un sistema bi-ortogonal para $\omega(\theta)$. Así pues, supongamos que $\forall n \geq 1$:

$$B_{2n}(z) = B_{2n}(z, \tau_n) = c_n \left(\rho_{2n}(z) + \tau_n \rho_{2n}^*(z) \right),\ c_n \neq 0,\ |\tau_1| = 1.$$

Ciertamente, se puede escribir: $\tau_n = \frac{\overline{\gamma}_n}{\gamma_n}$ con $\gamma_n \neq 0$.

Por otro lado, para $z = e^{i\theta}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{B_{2n}(z)}{z^n} &= c_n \left(\frac{\rho_{2n}(z) + \tau \rho_{2n}^*(z)}{z^n} \right) = \frac{c_n}{\gamma_n} \left(\frac{\gamma_n \rho_{2n}(z) + \overline{\gamma}_n \rho_{2n}^*(z)}{z^n} \right) \\ &= \frac{c_n}{\gamma_n} \left(\frac{\gamma_n \rho_{2n}(z) + \overline{\gamma}_n z^{2n} \overline{\rho_{2n}(z)}}{z^n} \right) \\ &= \frac{c_n}{\gamma_n} \left(\gamma_n z^{-n} \rho_{2n}(z) + \overline{\gamma_n z^{-n} \rho_{2n}(z)} \right) \\ &= 2 \frac{c_n}{\gamma_n} \Re \left(\gamma_n z^{-n} \rho_{2n}(z) \right). \end{aligned}$$

Por tanto, de (3.44), se deduce:

$$f_n(\theta) = \widetilde{c}_n \Re \left(\gamma_n z^{-n} \rho_{2n}(z) \right),\ \widetilde{c}_n \in \mathbb{R},\ \widetilde{c}_n \neq 0,\ z = e^{i\theta}. \tag{3.45}$$

Consideremos ahora:

$$\widetilde{B}_{2n}(z) = \widetilde{B}_{2n}(z, -\tau_n) = d_n \left(\rho_{2n}(z) - \tau_n \rho_{2n}^*(z) \right),$$

con $d_n \neq 0$, de forma que sea "autorecíproco" y definimos: $g_n(\theta) = \frac{\widetilde{B}_{2n}\left(e^{i\theta}, -\tau_n\right)}{e^{i\theta}}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Entonces, $\{g_n\}_0^\infty$ representa un sistema ortogonal de polinomios trigonométricos verificando

$$\langle g_n, g_m \rangle_\omega = \widetilde{k}_n \delta_{n,m},\ \widetilde{k}_n > 0 \quad \langle g_n, f_m \rangle_\omega = 0,\ n = 1, 2, \ldots,\ m = 0, 1, 2, \ldots,$$

siempre que $n \neq m$. Por tanto, cara a conseguir un sistema biortogonal, hemos de comprobar además de lo anterior, que también se cumple

$$\langle g_n, f_n \rangle_\omega = 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Como se hizo con $f_n(\theta)$ es fácil comprobar que

$$g_n(\theta) = \widetilde{d}_n \Im\left(\gamma_n z^{-n} \rho_{2n}(z)\right), \ \widetilde{d}_n \in \mathbb{R}, \ \widetilde{d}_n \neq 0, \ z = e^{i\theta}.$$

Así pues,

$$\langle f_n, g_n \rangle_\omega = 0 \Leftrightarrow \langle \Re\left(\gamma_n z^{-n} \rho_{2n}(z)\right), \Im\left(\gamma_n z^{-n} \rho_{2n}(z)\right) \rangle_\omega = \langle \widetilde{f}_n, \widetilde{g}_n \rangle_\omega = 0.$$

(Recuérdese que $\gamma_n \in \mathbb{C}, \ \gamma_n \neq 0$ de modo que $\tau_n = \frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma}$).

En estas condiciones, para $z = e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left(\gamma_n z^{-n} \rho_{2n}(z)\right)^2 \omega(\theta) d\theta \ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\widetilde{f}_n + i\widetilde{g}_n\right)^2 \omega(\theta) d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}_n^2 \omega(\theta) d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{g}_n^2 \omega(\theta) d\theta + \\
&+ 2i \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}_n \widetilde{g}_n \omega(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si suponemos que $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\gamma_n z^{-n} \rho_{2n}(z)\right)^2 \omega(\theta) d\theta$ es real, concluimos que $\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}_n \widetilde{g}_n \omega(\theta) d\theta = 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\gamma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} z^{-2n} \rho_{2n}^2(z) \omega(\theta) d\theta \ &= \gamma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{2n}(z) \left(\frac{z^{2n} + \ldots + \delta_{2n}}{z^{2n}}\right) \omega(\theta) d\theta \\
&= \gamma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{2n}(z) \frac{\delta_{2n}}{z^{2n}} \omega(\theta) d\theta \\
&= \gamma_n^2 \delta_{2n} \langle \rho_{2n}, z^{2n} \rangle = \gamma_n^2 \delta_{2n} \|\rho_{2n}\|_\omega^2.
\end{aligned}$$

El número $\gamma_n^2 \delta_{2n} \|\rho_{2n}\|_\omega^2$ es real sí y sólo si $\gamma_n^2 \delta_{2n} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\gamma}_n^2 \overline{\delta}_{2n} \in \mathbb{R}$, o equivalentemente en términos de $\tau_n = \frac{\overline{\gamma}}{\gamma}$: $\tau_n \overline{\delta}_{2n} \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, hemos probado el siguiente:

Teorema 3.13 *Sea $\{\tau_n\}_1^\infty$ una sucesión de números complejos sobre $\mathbb{T}$ tal que $\tau_n \overline{\delta}_{2n} \in \mathbb{R}, \ n = 1, 2, \ldots$ y consideremos los polinomios para-ortogonales e invariantes (autorrecíprocos):*

$$\begin{aligned}
B_{2n}(z, \tau_n) &= c_n \left(\rho_{2n}(z) + \tau_n \rho_{2n}^*(z)\right), \qquad c_n \neq 0, \\
\widetilde{B}_{2n}(z, -\tau_n) &= d_n \left(\rho_{2n}(z) - \tau_n \rho_{2n}^*(z)\right), \quad d_n \neq 0.
\end{aligned}$$

Entonces:

1. $f_n(\theta) = \frac{B_{2n}\left(e^{i\theta}, \tau_n\right)}{e^{in\theta}}$ *y* $g_n(\theta) = \frac{\widetilde{B}_{2n}\left(e^{i\theta}, -\tau_n\right)}{e^{in\theta}}$ *son polinomios trigonométricos de grado exacto n, para $n = 1, 2, \ldots$.*

2. Si tomamos $f_0 =$ cte. $\neq 0$, *entonces* $(f_0, \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty})$ *representa un sistema bi-ortogonal para* $\omega(\theta)$.

Ahora, del Teorema 3.5 (o Corolario 3.35), se deduce inmediatamente:

COROLARIO 3.4 *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 3.13, los ceros de* $B_{2n}(z, \tau_n)$ *y* $B_{2n}(z, -\tau_n)$ *se entrelazan.*

También, como recíproco al Teorema 3.13, tenemos

PROPOSICIÓN 3.5.1 *Sea* $(f_0, \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty})$ *un sistema bi-ortogonal para* $\omega(\theta)$ *y sean* a *y* b *números reales tales que* $|a| + |b| > 0$, *entonces*

$$T_n(\theta) = af_n(\theta) + bg_n(\theta) = e^{-in\theta} B_{2n}\left(e^{i\theta}\right),$$

donde $B_{2n}(z)$ *es un polinomio de grado* $2n$, *para-ortogonal y* $1-$*invariante.*

Demostración: Hágase como ejercicio.

Una vez analizadas las propiedades de los ceros de los polinomios para-ortogonales, podemos enunciar un recíproco al Teorema 3.9, asegurándonos la existencia de fórmulas de cuadratura con nodos sobre $\mathbb{T}$ y exactas en $\Delta_{-(n-1),n-1}$ (máximo dominio de validez).

TEOREMA 3.14 *Sean* $z_1, \ldots, z_n$ *los ceros de*

$$B_n(z) = B_n(z, \tau) = c_n \left(\rho_n(z) + \tau \rho_n^*(z)\right),$$

con $c_n \neq 0$ *y* $|\tau| = 1$. *Entonces, existen números positivos* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tales que*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j) = I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta, \ \forall f \in \Delta_{-(n-1),n-1}.$$

Demostración: Como hemos probado ya, los ceros $z_1, \ldots, z_n$ de $B_n(z)$ son distintos y están situados sobre $\mathbb{T}$. Tomemos p y q enteros no negativos tales que $p + q = n - 1$ y consideremos $\Delta_{-p,q} = \langle z^j : -p \leq j \leq q \rangle$. Al tratarse de un espacio de Chebyshev de dimensión n sobre $\mathbb{T}$, el problema de interpolación sobre los nodos $z_1, \ldots, z_n$ tiene solución única. Esto nos permite deducir $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j) = I_\omega(f) \ \forall f \in \Delta_{-p,q}. \tag{3.46}$$

(Obsérvese que $\Delta_{-p,q} \subset \Delta_{-(n-1),n-1}$).

Veamos que la fórmula (3.46) también es exacta en $\Delta_{-(n-1),n-1}$. Sea pues $f \in \Delta_{-(n-1),n-1}$ y sea $L \in \Delta_{-p,q}$ tal que $f(z_j) = L(z_j),\ j = 1,\ldots,n$. Entonces $f - L \in \Delta_{-(n-1),n-1}$ y $(f-L)(z_j) = 0,\ j = 1,\ldots,n$. Por tanto,

$$(f-L)(z) = \frac{P_{2n-2}(z)}{z^{n-1}},\ P_{2n-2} \in \Pi_{2n-2},\ \text{y } P_{2n-2}(z_j) = 0,\ j = 1,\ldots,n.$$

Por tanto, dado que $B_n(z_j) = 0,\ j = 1,\ldots,n$:

$$(f-L)(z) = \frac{B_n(z)P_{n-2}(z)}{z^{n-1}},\ P_{n-2} \in \Pi_{n-2}.$$

Esto implica, debido a la para-ortogonalidad, que:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-L)\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{B_n\left(e^{i\theta}\right)P_{n-2}\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i(n-1)\theta}}\omega(\theta)d\theta = 0.$$

Por consiguiente, al ser $I_n(f)$ exacta en $\Delta_{-p,q}$ y $L \in \Delta_{-p,q}$:

$$\begin{aligned} I_\omega(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} L\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta \\ &= I_n(L) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j L(z_j) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(z_j) = I_n(f). \end{aligned}$$

El que los pesos sean positivos sigue de la "exactitud" en $\Delta_{-(n-1),n-1}$. Además, dado que también se verifica:

$$\lambda_j = \int_{-\pi}^{\pi}\left|l_j\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\omega(\theta)d\theta,\ j = 1,\ldots,n,$$

siendo $l_j(z) = \frac{B_n(z)}{(z-z_j)B_n'(z)},\ j = 1,\ldots,n$, la fórmula resultante $I_n(f)$ será independiente de los parámetros p y q que hemos tomado en la demostración. □

Si refundimos los Teoremas 3.9 y 3.14, podemos enunciar el siguiente

TEOREMA 3.15 *(Caracterización) Una fórmula de cuadratura* $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(z_j)$ *tal que* $z_i \neq z_j,\ \forall i \neq j$, *y* $z_j \in \mathbb{T}$, *es exacta en* $\Delta_{-(n-1),n-1}$ *para una función peso* $\omega(\theta)$, *sí y sólo si:*

1. $I_n(f)$ *es exacta en* $\Delta_{-p,q}$, *siendo* p *y* q *enteros arbitrarios no negativos tales que* $p+q = n-1$.

2. *El polinomio nodal* $B_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ *es para-ortogonal e invariante.*

OBSERVACIÓN 16 *La fórmulas* $I_n(f)$, $n = 1, 2, \ldots$ *del Teorema 3.15 fueron introducidas por Jones et al. en 1989 [18] y reciben el nombre de "fórmulas de cuadratura de Szegő", representando el análogo sobre la circunferencia unidad de las fórmulas Gaussianas sobre intervalos del eje real.*

OBSERVACIÓN 17 *Del Teorema 3.15, se ve claramente cómo construir fórmulas de cuadratura con* n *nodos (par e impar) que sean exactas en* $\mathcal{T}_{n-1}$.

A continuación nos ocuparemos de dar diferentes expresiones para los pesos en una fórmula de Szegő con n nodos. Así pues, en lo que sigue, supondremos que los nodos $z_1, \ldots, z_n$ son los ceros de

$$B_n(z) = \rho_n(z) + \tau\rho_n^*(z),\ |\tau| = 1. \tag{3.47}$$

Recordemos que los polinomios de segunda especie asociados con $\rho_n(z)$ vienen dados por:

$$\Omega_n(z) = I_\omega\left\{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)(\rho_n(z) - \rho_n(t))\right\},\ t = e^{i\theta}. \tag{3.48}$$

TEOREMA 3.16 *Sea* $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(z_j)$ *la fórmula de Szegő con nodos, los ceros del polinomio dado en (3.47), entonces*

$$\lambda_j = -\frac{1}{2z_j}\frac{Q_n(z_j)}{B_n'(z_j)},\ j = 1, \ldots, n, \tag{3.49}$$

siendo $Q_n(z) = \Omega_n(z) - \tau\Omega_n^*(z)$ *con* $\Omega_n(z)$ *dado por (3.48).*

Demostración: Por el Teorema 3.15, dado que $I_n(f)$ es exacta en $\Delta_{-p,q}$, $0 \leq p, q \leq n-1$ y $p + q = n - 1$, si tomamos $p = 0$ $(q = n-1)$, resultará: $(t = e^{i\theta})$:

$$\lambda_j = I_\omega\left(\frac{B_n(z)}{(z - z_j)B_n'(z_j)}\right),\ j = 1, \ldots, n. \tag{3.50}$$

Por otro lado, de (3.48), sigue:

$$\Omega_n^*(z) = -I_\omega \left\{ \left(\frac{t+z}{t-z}\right) \left(\rho_n^*(z) - \frac{z^n}{t^n}\rho_n^*(t)\right) \right\},\ t = e^{i\theta},$$

por consiguiente

$$Q_n(z) = I_\omega \left\{ \left(\frac{t+z}{t-z}\right) \left(B_n(z) - \left(\rho_n(t) + \tau \frac{z^n}{t^n}\rho_n^*(t)\right)\right) \right\},\ t = e^{i\theta}.$$

Dado que $B_n(z_j) = 0,\ j = 1, \ldots, n$ y que $\langle \rho_n, 1\rangle_\omega = \langle \rho_n^*, t^n\rangle_\omega = 0$:

$$\begin{aligned} Q_n(z_j) &= I_\omega \left\{ \left(\tfrac{t+z_j}{t-z_j}\right) \left(B_n(z_j) - \left(\rho_n(t) + \tau \tfrac{z_j^n}{t^n}\rho_n^*(t)\right)\right) \right\} \\ &= -I_\omega \left\{ \left(1 + \tfrac{2z_j}{t-z_j}\right) \left(\rho_n(t) + \tau \tfrac{z_j^n}{t^n}\rho_n^*(t)\right) \right\} \\ &= -2z_j I_\omega \left\{ \left(\tfrac{1}{t-z_j}\right) \left(\rho_n(t) + \tau \tfrac{z_j^n}{t^n}\rho_n^*(t)\right) \right\}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} Q_n(z_j) &= -2z_j I_\omega \left\{ \left(\tfrac{1}{t-z_j}\right) \left(\rho_n(t) + \tau\rho_n^*(t) - \tau\rho_n^*(t) + \tau \tfrac{z_j^n}{t^n}\rho_n^*(t)\right) \right\} \\ &= -2z_j I_\omega \left(\tfrac{B_n(z)}{t-z_j}\right) + 2z_j I_\omega \left(\tfrac{\rho_n^*(t)}{t-z_j}\left(1 - \tfrac{z_j^n}{t^n}\right)\right) \\ &= -2z_j I_\omega \left(\tfrac{B_n(z)}{t-z_j}\right), \end{aligned}$$

pues $I_\omega \left(\frac{\rho_n^*(t)}{t-z_j}\left(1 - \frac{z_j^n}{t^n}\right)\right) = 0$, en virtud de las propiedades de ortogonalidad de $\rho_n^*(z)$.

En definitiva, llegamos a que

$$Q_n(z_j) = -2z_j I_\omega \left(\frac{B_n(z)}{t-z_j}\right). \tag{3.51}$$

Así, de (3.50) y (3.51) se culmina la demostración. □

Observación 18 *El interés de la fórmula (3.50) radica en el hecho de que los polinomios $\Omega_n(z)$ de segundo orden satisfacen la misma ley de recurrencia que $\rho_n(z),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ aunque naturalmente con condiciones iniciales distintas (ver fórmula (2.36) del Capıtulo 2).*

Teorema 3.17 *Sea $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ la sucesión ortonormal de polinomios de Szegő y sean $z_1, \ldots, z_n$ los ceros de $B_n(z) = \varphi_n(z) + \tau\varphi_n^*(z)$,*

$|\tau| = 1$. *Entonces, los pesos* $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ *de la correspondiente fórmula de Szegő vienen dados por*

$$\lambda_j = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(z_j)|^2}, \; j = 1, \ldots, n.$$

Demostración: Considerando la fórmula de Christoffel-Darboux para la sucesión $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ y haciendo $t = z_j \in \mathbb{T}$(ver fórmula (2.23) del capítulo anterior), se obtiene:

$$K_{n-1}(z, z_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi_k(z_j)}\varphi_k(z) = \frac{\overline{\varphi_n^*(z_j)}\varphi_n^*(z) - \overline{\varphi_n(z_j)}\varphi_n(z)}{1 - \frac{z}{z_j}}.$$

Teniendo en cuenta que $\varphi_n(z_j) + \tau\varphi_n^*(z_j) = 0$, es decir, que $\overline{\varphi_n^*(z_j)} = -\overline{\varphi_n(z_j)}\tau$, resulta:

$$\begin{aligned} K_{n-1}(z, z_j) \quad &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi_k(z_j)}\varphi_k(z) \\ &= \frac{z_j\overline{\varphi_n(z_j)}(\varphi_n(z)+\tau\varphi_n^*(z))}{z-z_j} \\ &= z_j\overline{\varphi_n(z_j)}\frac{B_n(z)}{z-z_j}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, en el límite cuando $z \to z_j$, se deducimos:

$$B_n^{'}(z) = \frac{1}{z_j\overline{\varphi_n(z_j)}} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(z_j)|^2. \tag{3.52}$$

Por otro lado, si en la igualdad

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi_k(z_j)}\varphi_k(z) = z_j\overline{\varphi_n(z_j)}\frac{B_n(z)}{z - z_j},$$

hacemos $z = e^{i\theta}$, multiplicamos en ambos miembros por $\omega(\theta)$ e integramos sobre $[-\pi, \pi]$, en virtud de la ortogonalidad, resulta:

$$1 = z_j\overline{\varphi_n(z_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_n(z)}{z - z_j}\omega(\theta)d\theta. \tag{3.53}$$

La demostración sigue ahora de (3.50), (3.52) y (3.53). □

Por último, como consecuencia del teorema anterior, deducimos otra expresión para los pesos:

Corolario 3.5 *Sea $\varphi_n(z)$ el polinomio ortonormal de Szegő de grado n para $\omega(\theta)$ y sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j)$ la $n-$ésima fórmula de Szegő correspondiente. Entonces*

$$\lambda_j = \frac{\overline{z}_j}{\varphi_n'(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)} - (\varphi_n^*)'(z_j)\overline{\varphi_n^* z_j)}}. \tag{3.54}$$

Demostración: Introduciendo de nuevo el núcleo reproductor y la identidad de Christoffel-Darboux (ver fórmula (2.23)) podemos escribir, por el Teorema 3.17:

$$\frac{1}{\lambda_j} = K_{n-1}(z_j, z_j) = \lim_{z \to z_j} \frac{\overline{\varphi_n^*(z_j)}\varphi_n^*(z) - \overline{\varphi_n(z_j)}\varphi_n(z)}{1 - z\overline{z}_j}.$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital se obtiene (3.54). □

Observación 19 *La fórmula (3.54) se puede expresar mediante el determinante:*

$$\lambda_j = \frac{\overline{z}_j}{\begin{vmatrix} \overline{\varphi_n(z_j)} & \overline{\varphi_n^*(z_j)} \\ (\varphi_n^*)'(z_j) & \varphi_n'(z_j) \end{vmatrix}}, \; j = 1, \ldots, n. \tag{3.55}$$

Ejemplo 3.4 *Tomemos $\omega(\theta) = 1$. Entonces, $\forall n \geq 1$, $\varphi_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}$, luego $\varphi_n^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, resultando, para todo $j = 1, \ldots, n : (|z_j| = 1)$*

$$\lambda_j = \frac{\overline{z}_j}{\begin{vmatrix} \frac{\overline{z^n}_j}{\sqrt{2\pi}} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ 0 & \frac{nz_j^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \end{vmatrix}} = \frac{2\pi\overline{z}_j}{n\overline{z^n}_j z_j^{n-1}} = \frac{2\pi}{n\overline{z^{n-1}}_j z_j^{n-1}} = \frac{2\pi}{n|z_j|^{2n}} = \frac{2\pi}{n},$$

Ahora los nodos $\{z_j\}_{j=1}^{n}$ serán las raíces de la ecuación $z^n + \tau_n = 0$, $(|\tau_n| = 1)$, o lo que es lo mismo, las raíces de orden n de cualquier complejo de módulo uno.

3.6. Error y convergencia en las fórmulas de Szegő

En esta sección nos ocuparemos de aspectos concernientes a la estimación del error en las fórmulas de Szegő, así como a la velocidad de convergencia, cuando el integrando $f(z)$ es una función analítica en un cierto entorno del círculo unidad. Para ello, haremos uso de ciertas funciones racionales: los llamados "aproximantes de Padé en dos puntos" a la Transformada de Herglotz-Riesz para una cierta función peso en $[-\pi,\pi]$, ó más generalmente, para una distribución o medida con soporte en $\mathbb{T}$. Como hemos mencionado en el Capítulo 2, la Transformada de Herglotz-Riesz representa el análogo sobre la circunferencia unidad de la Transformada de Cauchy de una medida con soporte en $[-1,1]$.

Así pues, sea G una región del plano complejo (G es cerrado y conexo) que contiene a la circunferencia unidad. Sea Γ la frontera de G, la cual se supone es la unión de curvas de Jordan, y sea $f(z)$ una función analítica en G. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(0)=0$, de modo que la función $g(z)=-\frac{f(z)}{2z}$ siempre será analítica en G. Entonces, por el Teorema de Cauchy, se sigue que

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z_0+z}{z_0-z}g(z)dz, \tag{3.56}$$

siempre que z_0 esté en el interior de G. Entonces, por medio del Teorema de Fubini, podemos escribir: ($\mathbb{T}\subset\mathbb{G}$)

$$\begin{aligned} I_\omega(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}g(z)dz\right)\omega(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\omega(\theta)d\theta\right)g(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F_\omega(z)g(z)dz, \end{aligned} \tag{3.57}$$

siendo

$$F_\omega(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\omega(\theta)d\theta, \tag{3.58}$$

y que ya hemos denominado como la "Transformada de Herglotz-Riesz" de la función peso $\omega(\theta)$.

Sea $\{\mu_k\}_k,\ k\in\mathbb{Z}$ la sucesión de los momentos trigonométricos asociada a $\omega(\theta)$, esto es:

$$\mu_k=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Entonces, se verifica la siguiente

PROPOSICIÓN 3.6.1 *La función $F_\omega(z)$ está definida en $\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbb{T}$ y cumple:*

1.

$$\overline{F_\omega(1/\overline{z})} = -F_\omega(z). \tag{3.59}$$

2.

$$F_\omega(z) = \mu_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k,\ |z| < 1. \tag{3.60}$$

3.

$$F_\omega(z) = -\mu_0 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} z^{-k},\ |z| > 1. \tag{3.61}$$

Además, la convergencia en (3.60) y (3.61) es uniforme en compactos de $\mathbb{D}$ y $\mathbb{E}$, respectivamente.

Demostración:

1.

$$\begin{aligned} \overline{F_\omega(1/\overline{z})} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+1/\overline{z}}{e^{i\theta}-1/\overline{z}}\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\theta}+1/z}{e^{-i\theta}-1/z}\omega(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ze^{-i\theta}+1}{ze^{-i\theta}-1}\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{z-e^{i\theta}}\omega(\theta)d\theta \\ &= -F_\omega(z) \end{aligned}$$

2. $\forall n \geq 1$, e $y \in \mathbb{C},\ y \neq 1$, comencemos con la identidad:

$$\frac{1+y}{1-y} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} y^k + \frac{2y^{n+1}}{1-y}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} z^k e^{-ik\theta} + \frac{2z^{n+1}e^{-i(n+1)\theta}}{1-ze^{-i\theta}}.$$

Multiplicando en ambos miembros por $\omega(\theta)$ e integrando:

$$\begin{aligned} F_\omega(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} z^k e^{-ik\theta}\right)\omega(\theta)d\theta + \\ &+2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2z^{n+1}e^{-i(n+1)\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\omega(\theta)d\theta. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Tomemos $z \in \mathbb{D}$, luego, $dist(z,\mathbb{T}) = \rho(z) > 0$, y $|z - e^{i\theta}| \geq \rho(z),\ \forall \theta \in [-\pi,\pi]$. Por tanto,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2z^{n+1}e^{-i(n+1)\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\omega(\theta)d\theta\right| \leq \frac{|z|^n}{\rho(z)}\mu_0 \to 0,\ \text{cuando } n \to \infty,$$

y (3.60) sigue de (3.62).

3. Se deduce de los dos apartados anteriores.

$\square$

Ejercicio: Justifíquese la convergencia uniforme.

Como ya se ha comentado en el Capítulo 2, la función $F_\omega(z)$ caracterizada por los desarrollos en serie (entorno al origen y el infinito) en términos de los momentos trigonométricos $\{\mu_k\}_k,\ k \in \mathbb{Z}$ es de gran importancia en problemas de aproximación e interpolación en la circunferencia unidad. Por ejemplo, en el llamado "problema de interpolación de Caratheodory-Fejer", el cual recordamos que consistía en: "Dada una sucesión de números complejos $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$, encontrar $F(z)$ analítica en $\mathbb{D}$ tal que $\Re\left(F(z)\right) > 0,\ \forall z \in \mathbb{D}$ y que cumpla:

$$F(z) = \mu_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k \text{ ''}.$$

Así pues, si pudiéramos asegurar la existencia de una función peso $\omega(\theta)$ en $[-\pi, \pi]$ tal que $\mu_k = \int_{\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta,\ k = 0, 1, \ldots,$ (Problema de los momentos trigonométricos), entonces claramente $F_\omega(z)$ sería solución al problema de interpolación de Caratheodory-Fejer. (Compruébese que $\Re\left(F_\omega(z)\right) > 0,\ \forall z \in \mathbb{D}$).

En nuestro contexto, (fórmula de cuadratura sobre $\mathbb{T}$), nos va a interesar aproximar $F_\omega(z)$ a partir de los desarrollos (3.60)-(3.61) mediante ciertas funciones racionales $F_n(z)$ y luego estimar el error:

$$\left|F_\omega(z) - F_n(z)\right|, \text{ con } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}.$$

Sea pues $P_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - x_j)$ tal que $|x_j| = 1,\ j = 1, \ldots, n$. Entonces, se puede probar que existe un único polinomio $Q_n(z)$ de grado a lo sumo n tal que

$$\begin{aligned} F_\omega(z) - \tfrac{Q_n(z)}{P_n(z)} &= \textstyle\sum_{j=p+1}^{\infty} \widetilde{\mu}_j z^j = O\left(z^{p+1}\right), & (z \to 0) \\ F_\omega(z) - \tfrac{Q_n(z)}{P_n(z)} &= \textstyle\sum_{j=q+1}^{\infty} \widetilde{\mu}_{-j} z^{-j} = O\left(\left(\tfrac{1}{z}\right)^{q+1}\right), & (z \to \infty), \end{aligned} \tag{3.63}$$

siendo p y q enteros no negativos tales que $0 \le p, q \le n-1$, $p+q = n-1$. La función racional anterior se denomina un "Aproximante tipo-Padé en dos puntos a la función $F_\omega(z)$", [17] y lo denotaremos por $(p/n)_{F_\omega}(z) = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$ con polinomio generador $P_n(z)$, verificándose la siguiente descomposición:

Lema 3.1 $(p/n)_{F_\omega}(z) = \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{x_j+z}{x_j-z}$.

Demostración: $(p/n)_{F_\omega}(z) = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$, $P_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-x_j)$, $Q_n \in \Pi_n$. Entonces, $\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = a_0 + \frac{R_{n-1}(z)}{P_n(z)}$ con $R_{n-1} \in \Pi_{n-1}$.

Mediante la descomposición en fracciones simples de $\frac{R_{n-1}(z)}{P_n(z)}$, podemos escribir:

$$R_{n-1}(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{z-x_j},\ B_j = \frac{R_{n-1}(x_j)}{P_n'(x_j)},\ j = 1, \ldots, n.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que:

$$\frac{z+x_j}{z-x_j} = \frac{z-x_j+2x_j}{z-x_j} = 1 + \frac{2x_j}{z-x_j},$$

entonces

$$\frac{1}{z-x_j} = \frac{1}{2x_j}\left(\frac{z+x_j}{z-x_j} - 1\right) = -\frac{1}{2x_j}\left(\frac{x_j+z}{x_j-z} + 1\right),$$

lo cual implica:

$$\begin{aligned} (p/n)_{F_\omega}(z) &= a_0 + \textstyle\sum_{j=1}^{n} B_j \left(-\frac{1}{2x_j}\left(\frac{x_j+z}{x_j-z}+1\right)\right) \\ &= \lambda_0 + \textstyle\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{x_j+z}{x_j-z}, \end{aligned}$$

siendo $\lambda_0 = a_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{2x_j}$ y $A_j = -\frac{B_j}{2x_j}$, $j = 1, \ldots, n$.

Falta probar que $\lambda_0 = 0$. Esto sigue de las condiciones (3.63). Así,

$$(p/n)_{F_\omega}(0) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} A_j = \mu_0.$$

Por otro lado, $(p/n)_{F_\omega}(\infty) = \lambda_0 - \sum_{j=1}^{n} A_j = -\mu_0$, deduciéndose que $\lambda_0 = 0$. $\square$

Teorema 3.18 *Sea* $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(z_j)$ *con* $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ *y* $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ *como en el lema anterior. Entonces*

1. $I_n(f)$ *es exacta en* $\Delta_{-p,q}$, $0 \le p, q \le n-1$, $p+q = n-1$.

2. Sea f analítica en G tal que $\mathbb{T} \setminus G$, entonces:

$$R_n(f) = I_\omega(f) - I_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z) \right) g(z) dz, \tag{3.64}$$

siendo $g(z) = -\frac{f(z)}{2z}$ y Γ la frontera de G.

Demostración:

1. Sea $R \in \Delta_{-p,q}$, entonces hemos de probar que $I_n(R) = I_\omega(R)$. Teniendo en cuenta que $F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z)$ es analítica en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$, por las condiciones (3.63) y el Teorema de Cauchy, se sigue:

$$\int_\Gamma \left(F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z) \right) \left(\frac{-R(z)}{2z} \right) dz = 0,$$

es decir,

$$\int_\Gamma F_\omega(z) \left(\frac{-R(z)}{2z} \right) dz = \int_\Gamma (p/n)_{F_\omega}(z) \left(\frac{-R(z)}{2z} \right) dz.$$

Ahora bien, por (3.57): $\int_\Gamma F_\omega(z) \frac{-R(z)}{2z} dz = I_\omega(R)$. Mientras que, por el Lema 3.1 y (3.56), se tiene:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} \left(\frac{-R(z)}{2z} \right) dz &= \sum_{j=1}^n A_j \int_\Gamma \frac{x_j+z}{x_j-z} \left(\frac{-R(z)}{2z} \right) dz \\ &= \sum_{j=1}^n A_j R(z_j) = I_n(R). \end{aligned}$$

2. Sea ahora f analítica en G, entonces (de nuevo por (3.56)):

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \sum_{j=1}^n A_j f(z_j) = \sum_{j=1}^n A_j \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{x_j+z}{x_j-z} \left(\frac{-f(z)}{2z} \right) dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\sum_{j=1}^n A_j \frac{x_j+z}{x_j-z} \right) g(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (p/n)_{F_\omega}(z) g(z) dz, \end{aligned}$$

con $g(z) = -\frac{f(z)}{2z}$. Recordando que $I_\omega(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_\omega(z) g(z) dz$, se sigue la demostración. $\square$

Observación 20 *Conviene recordar que, dados n puntos* $x_1, \ldots x_n$, $x_i \neq x_j$ *sobre la circunferencia unidad, siempre existen pesos* $A_1, \ldots A_n$, *unívocamente determinados, de modo que*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) = I_\omega(f),\ \forall f \in \Delta_{-p,q},$$

con $0 \leq p, q \leq n-1$ *y* $p+q = n-1$. *Sin embargo, deberá quedar claro que la representación integral (3.64) del error, sólo es válida para integrandos analíticos.*

Así pues, denotando por $E_n(z)$ el error en el ATP2, esto es

$$E_n(z) = F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z),\ \forall z \notin \mathbb{T},$$

y por $R_n(f)$ el error en la fórmula de cuadratura $I_n(f)$ con nodos $x_1, \ldots x_n$, y exacta en $\Delta_{-p,q}$:

$$R_n(f) = I_\omega(f) - I_n(f),$$

entonces tenemos de inmediato la siguiente acotación del error en dicha cuadratura:

Corolario 3.6 *Sea* f *analítica en* G, *región de* $\overline{\mathbb{C}}$ *que contiene a* $\mathbb{T}$, *y sea* Γ *su frontera, entonces:*

$$|R_n(f)| \leq \frac{1}{4\pi}\left(\text{máx}\left\{\left|\frac{f(\xi)}{\xi}\right| :\ \xi \in \Gamma\right\}\right)\int_\Gamma |E_n(z)|\,|dz|. \tag{3.65}$$

Así pues, vemos que el error en la fórmula de cuadratura está esencialmente "dominado" por el error en el ATP2. Conviene pues, buscar estimaciones del error, teniéndose la siguiente representación integral del mismo:

Teorema 3.19

$$F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z) = \frac{2z^{p+1}}{P_n(z)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ip\theta}P_n\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}-z}\omega(\theta)d\theta,\ z \notin \mathbb{T},$$

siendo $(p/n)_{F_\omega}(z) = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$, *con* $P_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-x_j)$, $x_j \in \mathbb{T}$, $x_j \neq x_k$, $j \neq k$.

Demostración: Sea $z \notin \mathbb{T}$, arbitrario pero fijo. Entonces:

$$F_\omega(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\omega(\theta)d\theta = I_\omega\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right).$$

Por otro lado, del Lemma 3.1, se puede poner:

$$(p/n)_{F_\omega}(z) = \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{x_j+z}{x_j-z} = I_n\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right).$$

Dado que $I_n(f)$ es exacta en $\Delta_{-p,q}$, entonces podemos escribir:

$$I_n(f) = I_\omega\left(L_n(f,\cdot)\right),$$

siendo $L_n(f,x) \in \Delta_{-p,q}$ tal que $L_n(f,x_j) = f(x_j),\ j = 1,\ldots,n$, por lo que

$$I_\omega(f) - I_n(f) = I_\omega\left(f - L_n(f,\cdot)\right).$$

Para $z \notin \mathbb{T}$, consideremos la siguiente función en la variable x, siendo z un parámetro:

$$L_n(x,z) = L_n(x) = \left(1+\frac{2z}{x-z}\right)\left(1-\frac{z^p P_n(x)}{x^p P_n(z)}\right),$$

la cual verifica:

$$L_n \in \Delta_{-p,q},\ L_n(x_j) = 1 + \frac{2z}{x_j-z} = \frac{x_j+z}{x_j-z},\ j = 1,\ldots,n,$$

es decir, L_n es el único polinomio de Laurent que interpola a la función $\frac{x+z}{x-z}$ (z parámetro) en los nodos $\{x_j\}_{j=1}^n$. Por consiguiente, ($x = e^{i\theta}$):

$$\begin{aligned}
E_n(f) &= F_\omega(z) - (p/n)_{F_\omega}(z) = I_\omega\left(\tfrac{x+z}{x-z}\right) - I_n\left(\tfrac{x+z}{x-z}\right)\\
&= I_\omega\left(\tfrac{x+z}{x-z} - L_n(x,z)\right)\\
&= I_\omega\left(1+\tfrac{2z}{x-z} - 1 - \tfrac{2z}{x-z}\left(1-\tfrac{z^pP_n(x)}{x^pP_n(z)}\right)\right)\\
&= I_\omega\left(\tfrac{2z^{p+1}P_n(x)}{x^pP_n(z)}\right)\\
&= \tfrac{2z^{p+1}}{P_n(z)}\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{e^{-ip\theta}P_n\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}-z}\omega(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

□

Veamos seguidamente cómo estos resultados se pueden aprovechar para dar expresiones del error en las fórmulas de Szegő estudiadas en la sección anterior. Para ello, téngase en cuenta que en el análisis realizado hasta el momento, partíamos de n nodos distintos sobre $\mathbb{T}$ y construíamos la correspondiente fórmula exacta en $\Delta_{-p,q},\ p+q=n-1$. Supongamos que tomamos como nodos los ceros $z_1,\dots,z_n$ de un polinomio de grado n para-ortogonal con respecto a ω e invariante, esto es,

$$P_n(z)=B_n(z,\tau)=\rho_n(z)+\tau\rho_n^*(z),\ |\tau|=1.$$

En este caso, sabemos que la correspondiente fórmula de cuadratura $I_n(f)$ basada en tales nodos, no sólo es exacta en $\Delta_{-p,q}$ con p y q enteros no negativos y arbitrarios, tales que, $p+q=n-1$, sino que también lo es en $\Delta_{-(n-1),n-1}$, "máximo dominio de validez". Denotemos por $F_n(z)$ el correspondiente ATP2, esto es,

$$F_n(z)=(p/n)_{F_\omega}(z),\ 0\le p\le n-1.$$

TEOREMA 3.20 *1.* $\forall z\in\overline{\mathbb{C}},\ z\neq z_j,\ \overline{F_n\left(1/\overline{z}\right)}=-F_n(z)$, *con* $F_n(z)$ *independiente de* p, *(*$0\le p\le n-1$*).*

2.

$$\begin{aligned} F_\omega(z)-F_n(z)&=O\left(z^n\right), && (z\to 0),\\ F_\omega(z)-F_n(z)&=O\left(\left(\tfrac{1}{z^n}\right)\right), && (z\to\infty). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Demostración:

1. Sea $I_n(f)=\sum_{j=1}^n\lambda_j f(z_j)$ la correspondiente fórmula de cuadratura exacta en $\Delta_{-p,q}$, que como hemos dicho, coincide con la fórmula de Szegő y por consiguiente, $\lambda_j>0,\ j=1,\dots,n$. Entonces, podemos escribir $(x=e^{i\theta})$:

$$F_n(z)=I_n\left(\frac{x+z}{x-z}\right)=\sum_{j=1}^n\lambda_j\left(\frac{z_j+z}{z_j-z}\right).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\overline{F_n\left(1/\overline{z}\right)}&=\overline{\sum_{j=1}^n\lambda_j\left(\tfrac{z_j+1/\overline{z}}{z_j-1/\overline{z}}\right)}=\sum_{j=1}^n\lambda_j\left(\tfrac{\overline{z}_j+1/z}{\overline{z}_j-1/z}\right)\\ &=\sum_{j=1}^n\lambda_j\left(\tfrac{z_j+z}{z-z_j}\right)=-F_n(z)\end{aligned}$$

2. Por el apartado anterior, basta que comprobemos que $F_\omega(z) - F_n(z) = O\left(z^n\right), \ (z \to 0)$. A tal efecto, sabemos que:

$$F_\omega(z) = \mu_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k, \ \mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta, \ k = 0, 1, \ldots.$$

Por otro lado, $F_n(z)$ es una función racional con polos sobre $\mathbb{T}$, por lo que $\forall z \in \mathbb{D}$:

$$F_\omega(z) = \widetilde{\mu}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mu}_k z^k.$$

Por tanto, hemos de ver que $\widetilde{\mu}_k = \mu_k, \ k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ahora bien,

$$F_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\frac{z_j + z}{z_j - z}\right), \ \lambda_j > 0, \ |z_j| = 1, \ j = 1, \ldots, n.$$

De nuevo: $\frac{z_j+z}{z_j-z} = \frac{z_j-z+2z}{z_j-z} = 1 + \frac{2z}{z_j-z}$, luego

$$F_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(1 + \frac{2z}{z_j - z}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j + 2z\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_j - z}.$$

Así pues, vemos que $\widetilde{\mu}_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = I_n(1) = I_\omega(1) = \mu_0$.

Por otro lado,

$$\frac{1}{z_j - z} = \frac{1}{z_j(1 - z/z_j)} = \frac{1}{z_j}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{z_j^k}, \ \left(\left|\frac{z}{z_j}\right| < 1\right).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
F_n(z) &= \mu_0 + 2z\textstyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{z_j}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{z_j^k}\right) \\
&= \mu_0 + 2z\textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j z^k}{z_j^k} \\
&= \mu_0 + 2z\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j z^k}{z_j^k} \\
&= \mu_0 + 2z\textstyle\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{z_j^k}\right) z^k \\
&= \mu_0 + 2z\textstyle\sum_{k=0}^{n} \widetilde{\mu}_k z^k,
\end{aligned}$$

siendo $\widetilde{\mu}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{z_j^k} = I_n(z^{-k}) = I_\omega(z^{-k}) = \mu_k,\ k = 1, \ldots, n-1.$

$\square$

Por otro lado, si denotamos por $\widetilde{R}_n(f)$ el error en la fórmula de Szegő $I_n(f)$, por el Teorema 3.18, se tiene:

$$\widetilde{R}_n(f) = I_\omega(f) - I_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \widetilde{E}_n(z)g(z)dz, \tag{3.67}$$

siendo $g(z) = -\frac{f(z)}{2z}$ con f analítica en G, dominio que contiene a $\mathbb{T}$, siendo Γ su frontera y $\widetilde{E}_n(z) = F_\omega(z) - F_n(z)$.

De la relación (3.67) vemos que si deseamos establecer acotaciones del error para las fórmulas de Szegő, se hace preciso estimar $\widetilde{E}_n(z)$. Así pues, como una consecuencia inmediata del Teorema 3.20, resulta el siguiente

Corolario 3.7 *Sea $F_n(z)$ el aproximante racional a $F_\omega(z)$ definido en el Teorema 3.20. Entonces, $\forall z \notin \mathbb{T}$ y $x = e^{i\theta}$, se verifica:*

$$\widetilde{E}_n(z) = F_\omega(z) - F_n(z) = \frac{2z^{p+1}}{B_n(z)}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{-p}B_n(z)}{x-z}\omega(\theta)d\theta, \tag{3.68}$$

siendo $B_n(z)$ el denominador del aproximante dado por $B_n(z) = \rho_n(z) + \tau\rho_n^*(z)$ y p cualquier entero no negativo tal que $0 \le p \le n-1$.

Así, de (3.68), cuando hacemos $p = n-1$, y dado que $B_n(0) \neq 0$, entonces se verifica que $\widetilde{E}_n(f) = O(|z|^n),\ (z \to 0)$. Por otro lado, tomando $p = 0$ y como $B_n(z)$ tiene grado exacto n, se deduce que

$$E_n(z) = O\left(\left(\frac{1}{z}\right)^n\right),\ (z \to \infty),$$

tal y como establece el Teorema 3.20. De todos modos, se puede dar una expresión alternativa del error, similar a la dada para los aproximantes de Padé en infinito vistos en el Capítulo 1 en términos de $B_n^2(z)$ y donde se puede constatar que se dan simultáneamente ambos comportamientos asintóticos del error $\widetilde{E}_n(z)$ en entornos del origen y del infinito. En efecto, se puede probar el siguiente

TEOREMA 3.21 *$\forall z \notin \mathbb{T}$ y $x = e^{i\theta}$:*

$$\widetilde{E}_n(z) = F_\omega(z) - F_n(z) = \frac{2z^n}{B_n^2(z)}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{-(n-1)}B_n^2(x)}{x-z}\omega(\theta)d\theta - \gamma_n\right), \tag{3.69}$$

siendo $B_n(z) = \rho_n(z) + \tau\rho_n^*(z)$, $(|\tau| = 1)$ y $\gamma_n \in \mathbb{C}$, $\gamma_n \neq 0$, tal que $|\gamma_n| = \|\rho_n\|_\omega^2 = \langle \rho_n, \rho_n\rangle_\omega$.

Demostración: Sea $z \notin \mathbb{T}$, arbitrario pero fijo. Entonces, puesto que $B_n(z)$ no es mónico, podemos tomar $c_n \neq 0$ tal que:

$$c_n \frac{B_n(x) - B_n(z)}{x - z} = x^{n-1} + R_{n-2}(x),$$

siendo $R_{n-2} \in \Pi_{n-2}$ y con coeficientes dependientes del parámetro z. Teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de $B_n(x)$, se tiene $\left(x = e^{i\theta}\right)$:

$$\begin{aligned} c_n \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{B_n(x)-B_n(z)}{x-z} x^{-(n-1)}\omega(\theta)d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} x^{n-1} + R_{n-2}(x)\omega(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} B_n(x)\omega(\theta)d\theta = \langle B_n, 1\rangle_\omega = \gamma_n \neq 0. \end{aligned}$$

Tomemos ahora $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_n^2 = c_n$ y consideremos $\widetilde{B}_n(x) = \lambda_n B_n(x)$. De lo anterior se tiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{B}_n(x)\frac{\widetilde{B}_n(x) - \widetilde{B}_n(z)}{x - z} x^{-(n-1)}\omega(\theta)d\theta = \gamma_n.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widetilde{B}_n(x)x^{-(n-1)}}{x-z}\omega(\theta)d\theta = \frac{1}{\widetilde{B}_n(z)}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widetilde{B}_n^2(x)x^{-(n-1)}}{x-z}\omega(\theta)d\theta - \gamma_n.$$

Haciendo ahora $p = n - 1$ en el Corolario 3.7, tenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_n(z) &= \tfrac{2z^n}{B_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{B_n(x)x^{-(n-1)}}{x-z}\omega(\theta)d\theta \\ &= \tfrac{2z^n}{\widetilde{B}_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\widetilde{B}_n(x)x^{-(n-1)}}{x-z}\omega(\theta)d\theta \\ &= \tfrac{2z^n}{\widetilde{B}_n^2(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\widetilde{B}_n^2(x)x^{-(n-1)}}{x-z}\omega(\theta)d\theta - \gamma_n \\ &= \tfrac{2z^n}{B_n^2(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{B_n^2(x)x^{-(n-1)}}{x-z}\omega(\theta)d\theta - \gamma_n. \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \int_{-\pi}^{\pi} B_n(x)\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\rho_n(x) + \tau\rho_n^*(x)\right)\omega(\theta)d\theta \\
&= \tau \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n^*(x)\omega(\theta)d\theta == \tau\langle \rho_n^*, 1\rangle_\omega = \tau\langle \rho_n, z^n\rangle_\omega \\
&= \tau\langle \rho_n, \rho_n\rangle_\omega = \tau\|\rho_n\|_\omega^2
\end{aligned}$$

□

En el resto de la sección nos vamos a ocupar de aspectos relacionados con la convergencia de las fórmulas de Szegő. Así pues, en lo que sigue, $\{\tau_n\}_1^\infty$ denotará una sucesión de números complejos sobre $\mathbb{T}$ de forma que, para cada $n \geq 1$, los nodos $\{z_{j,n}\}_{j=1}^n$ de la enésima fórmula de Szegő, serán los ceros de

$$B_n(z) = \rho_n(z) + \tau_n\rho_n^*(z), \tag{3.70}$$

y escribiremos $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(z_{j,n}),\ n = 1, 2, \ldots$ para denotar tales fórmulas. En primer lugar, tenemos el siguiente resultado general de convergencia:

TEOREMA 3.22 *Sea $\omega(\theta)$ una función peso en $[-\pi, \pi]$ y sea $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ acotada y tal que $f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)$ es integrable en $[-\pi, \pi]$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta.$$

Demostración: La demostración sigue la misma pauta que la prueba de convergencia de las fórmulas Gaussianas estudiadas en el Capítulo 1. Así pues, supongamos primero $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Entonces, dado $\epsilon > 0$, por el "Teorema de Aproximación de Weirestrass", existe $L \in \Delta_{-N,N}$ tal que

$$|f(x) - L(x)| < \epsilon,\ \forall x \in \mathbb{T}.$$

Tomemos ahora $n > N + 1$. Entonces, dado que $L \in \Delta_{-(n-1),n-1}$ se cumple que $I_\omega(L) = I_n(L)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
|I_\omega(f) - I_n(f)| &= |I_\omega(f) - I_\omega(L) + I_\omega(L) - I_n(f)| \\
&\leq I_\omega(|f - L|) + I_n(|f - L|) \\
&= \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta)d\theta + \epsilon \sum_{j=1}^n \lambda_j \\
&= 2\epsilon\mu_0, \quad \left(\mu_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta)d\theta\right).
\end{aligned}$$

La conclusión sigue ahora por el Teorema 1.21, que nos asegura que una sucesión de fórmulas de cuadratura con coeficientes positivos que converja en la clase de funciones continuas, también converge en la clase de funciones acotadas integrables sobre $\mathbb{T}$. $\square$

El teorema anterior nos permite deducir la convergencia de la sucesión $\{F_n(z)\}_n$ de aproximantes racionales estudiados previamente. En efecto, tenemos:

TEOREMA 3.23 *Sea $\{F_n(z)\}_n$ la sucesión de aproximantes en el Teorema 3.20 con denominadores dados por (3.69). Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = F_\omega(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\omega(\theta)d\theta,$$

uniformemente en compactos de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$.

Demostración: Para todo $n = 1, 2, \ldots$, se tiene que,

$$F_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n} \frac{z_{j,n}+z}{z_{j,n}-z} = \frac{Q_n(z)}{B_n(z)},\ z_{j,n} \in \mathbb{T},\ j = 1, \ldots, n.$$

Tenemos por tanto una sucesión de funciones racionales de grado n con polos sobre $\mathbb{T}$. Así pues, para probar la convergencia uniforme en compactos de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$ a $F_\omega(z)$, mostraremos en primer lugar que se verifica la convergencia puntual y luego que la sucesión $\{F_n(z)\}_n$ está uniformemente acotada en compactos de $\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbb{T}$. En estas condiciones, la conclusión sigue aplicando el Teorema de Stieltjes-Vitali [10]. Tomemos $z \notin \mathbb{T}$, entonces la función (en la variable x): $\frac{x+z}{x-z}$ es continua sobre $\mathbb{T}$, por lo que: $\left(x = e^{i\theta}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} I_n\left(\frac{x+z}{x-z}\right) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) = I_\omega\left(\frac{x+z}{x-z}\right) = F_\omega(z).$$

En relación a la convergencia uniforme, por el primer apartado del Teorema 3.20, será suficiente que la probemos en $\mathbb{D}$. Sea pues $K \subset \mathbb{D}$, K compacto, de modo que $dis\,(K, \mathbb{T}) = \rho > 0$. Entonces, $\forall z \in K,\ |z| \leq r < 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} |F_n(z)| &= \left|\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n} \frac{z_{j,n}+z}{z_{j,n}-z}\right| \\ &\leq \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n} \left|\frac{z_{j,n}+z}{z_{j,n}-z}\right| \\ &\leq \frac{1+r}{\rho} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n} = \frac{1+r}{\rho}\mu_0 \end{aligned}$$

$\square$

OBSERVACIÓN 21 *Los aproximantes $F_n(z)$ del teorema anterior fueron introducidos por Jones, Njåstad y Thron en [18] quienes los denominaron "aproximantes modificados". Podemos decir que desempeñan, en el contexto de las fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad, el mismo papel que los aproximantes de Padé estudiados en el Capítulo 1, en relación a las fórmulas Gaussianas sobre $[-1, 1]$. No obstante, conviene remarcar que tales funciones racionales no son propiamente "aproximantes de Padé en dos puntos" a $F_\omega(z)$ pues, para cada n, $F_n(z)$ depende de $2n+1$ parámetros e interpola a $F_\omega(z)$ n veces en el origen y n veces en el infinito, faltando pues una condición de interpolación. En el artículo citado anteriormente se da una demostración del Teorema 3.23 mucho más larga y dificultosa.*

En lo que sigue supondremos que f es analítica en un dominio G de $\overline{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{T} \subset G$) y nos proponemos estudiar la "velocidad de convergencia de las fórmulas de Szegő". Esto es, si denotamos por $\widetilde{R}_n(f)$ el error en la enésima fórmula de Szegő, entonces trataremos de analizar

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \left|\widetilde{R}_n(f)\right|^{1/n}.$$

$v = \frac{1}{\lambda}$ se denomina la "velocidad de convergencia de $I_n(f)$ a $I_\omega(f)$". Por consiguiente, "interesa" que el parámetro λ sea lo más pequeño posible. A tal efecto, será crucial el estudiar el comportamiento asintótico de la raíz enésima de la sucesión de polinomios $\{B_n(z)\}_n$ donde $B_n(z) = \rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z) = c_n(\varphi_n(z) + \tau_n \varphi_n^*(z))$, con $c_n \neq 0$ y $|\tau_n| = 1$, siendo $\{\varphi_n(z)\}_n$ la sucesión de polinomios ortonormales de Szegő. Teniendo en cuenta el Teorema 1.19 del Capítulo 1 y el Lema 2.1 del Capítulo 2, podemos probar el siguiente:

TEOREMA 3.24 *Sea $\{\tau_n\}_n$ una sucesión de números complejos en $\mathbb{T}$ y sea $\{X_n(z) = \varphi_n(z) + \tau_n \varphi_n^*(z)\}_n$ una sucesión de polinomios para-ortogonales con respecto a $\omega(\theta)$ e invariantes. Entonces:*

1. $\lim_{n\to\infty} |X_n(z)|^{1/n} = |z|$, *uniformemente en compactos de $\mathbb{E}$.*

2. $\lim_{n\to\infty} |X_n(z)|^{1/n} = 1$, *uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$.*

3. $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = 1$, *donde* $M_n = \|X_n\|_{\mathbb{T}} = \max_{z\in\mathbb{T}} |X_n(z)|$.

Demostración:

1. Sea $z \in \mathbb{E}$, entonces:

$$\frac{X_{n+1}(z)}{X_n(z)} = \frac{\varphi_{n+1}(z) + \tau_{n+1}\varphi_{n+1}^*(z)}{\varphi_n(z) + \tau_n\varphi_n^*(z)} = \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} \frac{1 + \tau_{n+1}\frac{\varphi_{n+1}^*(z)}{\varphi_{n+1}(z)}}{1 + \tau_n \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n(z)}}.$$

   Por consiguiente, aplicando los dos primeros apartados del Lema 2.1, se deduce que $\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}(z)}{X_n(z)} = z$, lo cual implica que $\lim_{n\to\infty} |X_n(z)|^{1/n} = |z|$.

2. Sea $z \in \mathbb{D}$, entonces $\frac{1}{\bar{z}} \in \mathbb{E}$. Hagamos pues, $t = \frac{1}{\bar{z}}$ y $z = \frac{1}{\bar{t}}$. Así, teniendo en cuenta que $X_n(z)$ es invariante:

$$|X_n(z)| = \left|x_n\left(\frac{1}{\bar{t}}\right)\right| = \left|\overline{x_n\left(\frac{1}{\bar{t}}\right)}\right| = |X_{n^*}(t)| = \left|\frac{X_n^*(t)}{t^n}\right| = \left|\frac{X_n(t)}{t^n}\right|.$$

   Luego, por el apartado anterior,

$$\lim_{n\to\infty} |X_n(z)|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{X_n(t)}{t^n}\right|^{1/n} = \frac{1}{|t|} \lim_{n\to\infty} |X_n(t)|^{1/n} = \frac{|t|}{|t|} = 1.$$

3. Denotemos por $\lambda_n = k_n + \tau_n\overline{\varphi_n(0)} = k_n(1 + \tau_n\overline{\rho_n(0)})$, $(k_n > 0)$ el coeficiente director de $X_n(z)$, y donde hemos supuesto: $\rho_n(z) = k_n z^n + \ldots$. Así:

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{1 + \tau_{n+1}\overline{\rho_{n+1}(0)}}{1 + \tau_n\overline{\rho_n(0)}},$$

   y dado que $\lim_{n\to\infty} \rho_n(0) = 0$ por el Lema 2.1, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1,$$

   implicando: $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n|^{1/n} = 1$.

Consideremos la sucesión de polinomios mónicos $\left\{\frac{X_n(z)}{\lambda_n}\right\}_n$ en el compacto $K = \mathbb{D}\bigcup\mathbb{T}$. Vemos que, $\forall n \geq 1$, $X_n(z)$ tiene sus n ceros en K y por el apartado 1 de este teorema:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_n(z)}{\lambda_n}\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|X_n(z)|^{1/n}}{\lambda_n^{1/n}} = |z|,$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{E} = \mathbb{C}\setminus K$. Así pues, usando el Lema 1.19, logramos:

$$\begin{aligned} Cap(K) &= Cap\,(\mathbb{D}\bigcup\mathbb{T}) = Cap\left(\overline{\mathbb{D}}\right) = 1 \\ &= \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{\lambda_n^{1/n}}\|X_n\|_{\mathbb{T}}^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\|X_n\|_{\mathbb{T}}^{1/n},. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.

□

Estamos ahora en condiciones de estimar la velocidad de convergencia. A saber:

Teorema 3.25 *Sea $\{I_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de fórmulas de Szegő con nodos los ceros de $X_n(z) = \varphi_n(z) + \tau_n\varphi_n^*(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\tau_n \in \mathbb{T}$. Sea f analítica en un dominio G tal que $\mathbb{T}\subset G$. Entonces:*

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty}\left|\widetilde{R}_n(f)\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}|I_\omega(f) - I_n(f)|^{1/n} \leq r < 1,$$

donde $r = \max\{r_1, r_2\}$, con

$$r_1 = \max\{|z| : \ z \in \Gamma\bigcap\mathbb{D}\} \quad \text{y} \quad r_2 = \max\{|z|^{-1} : \ z\in\Gamma\bigcap\mathbb{E}\},$$

y siendo Γ la frontera de G.

Demostración: Recordemos que el error $\widetilde{R}_n(f)$ viene dado según (3.67) mediante

$$\widetilde{R}_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \widetilde{E}_n(z)g(z)dz, \tag{3.71}$$

siendo $g(z) = -\frac{f(z)}{2z}$ analítica en G y $\widetilde{E}_n(z) = F_\omega(z) - F_n(z)$. Por consiguiente: $\left|\widetilde{R}_n(f)\right| \leq C(f,\Gamma)\int_\Gamma\left|\widetilde{E}_n(z)\right||dz|$, siendo $C(f,\Gamma)$ una constante positiva dependiente de f y Γ. Por tanto:

$$\left|\widetilde{R}_n(f)\right| \leq C(f,\Gamma)l(\Gamma)\max_{z\in\Gamma}\left|\widetilde{E}_n(z)\right| = C(f,\Gamma)l(\Gamma)\left\|\widetilde{E}_n\right\|_\Gamma,$$

siendo $l\,(\Gamma)$ la longitud de la curva Γ. En consecuencia:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\widetilde{R}_n(f)\right|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \left\|\widetilde{E}_n\right\|_{\Gamma}^{1/n}. \tag{3.72}$$

Haciendo uso del Corolario 3.7, obtenemos

$$\widetilde{E}_n(z) = \frac{2z^{p+1}}{X_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{-p} X_n(z)}{x - z} \omega(\theta) d\theta, x = e^{i\theta},$$

siendo $X_n(z) = \varphi_n(z) + \tau_n \varphi_n^*(z)$ y $0 \leq p \leq n-1$. Así pues, $\forall z \in \Gamma$:

$$\left|\widetilde{E}_n(z)\right| \leq \frac{2|z|^{p+1}}{|X_n(z)|} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|X_n(z)|}{|x - z|} \omega(\theta) d\theta \leq \frac{2|z|^{p+1}}{|X_n(z)|} M_n \frac{\mu_0}{dis\,(\Gamma, \mathbb{T})}, \tag{3.73}$$

(Obsérvese que $dis\,(\Gamma, \mathbb{T}) > 0$), siendo $M_n = \|X_n(z)\|_{\mathbb{T}}$.

Supongamos que $z \in \Gamma \bigcap \mathbb{D}$, entonces, tomando $p = n-1$ en (3.73), resulta:

$$\left|\widetilde{E}_n(z)\right|^{1/n} \leq \frac{2^{1/n}|z|}{|X_n(z)|^{1/n}} M_n^{1/n} \left(\frac{\mu_0}{dis\,(\Gamma, \mathbb{T})}\right)^{1/n}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \left|\widetilde{E}_n(z)\right|^{1/n} &\leq |z| \limsup_{n\to\infty} \frac{M_n^{1/n}}{|X_n(z)|^{1/n}} \leq |z| \frac{\limsup_{n\to\infty} M_n^{1/n}}{\liminf_{n\to\infty} |X_n(z)|^{1/n}} \\ &\leq |z| \frac{\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n}}{\lim_{n\to\infty} |X_n(z)|^{1/n}} = |z|, \end{aligned} \tag{3.74}$$

en virtud del Teorema 3.24.

Por otro lado, si $z \in \Gamma \bigcap \mathbb{E}$, entonces, tomando $p = 0$, resultará de modo análogo:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\widetilde{E}_n(z)\right|^{1/n} \leq \frac{1}{|z|}. \tag{3.75}$$

Así, de (3.74) y (3.75), concluimos que

$$\limsup \left|\widetilde{E}_n(z)\right|^{1/n} \leq \|\gamma(z)\|_{\Gamma}, \tag{3.76}$$

donde $\gamma(z) = \begin{cases} |z|, & z \in \Gamma \bigcap \mathbb{D}, \\ \frac{1}{|z|}, & z \in \Gamma \bigcap \mathbb{E}. \end{cases}$

Por consiguiente, de (3.72) y (3.76) se sigue la demostración. □

3.7. Conexión entre el intervalo [-1,1] y la circunferencia unidad

En esta Sección estableceremos una relación entre las fórmulas Gaussianas para el intervalo $[-1,1]$, que aproximan integrales de la forma $J_\sigma(F) = \int_{-1}^{1} F(x)\sigma(x)dx$, y las fórmulas de cuadratura de Szegő para la circunferencia unidad que aproximan integrales del tipo, $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$, cuando las funciones peso $\sigma(x)$ y $\omega(\theta)$ se relacionan mediante:

$$\omega(\theta) = \sigma(\cos\theta)|\text{sen}\theta|. \tag{3.77}$$

En primer lugar, convendría recordar que existe una íntima relación entre los polinomios ortogonales mónicos sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z : \ |z| = 1\}$ y los polinomios ortogonales mónicos sobre un intervalo finito del eje real (ver [ ]) que por comodidad tomaremos $[-1,1]$. En efecto, sean $\{p_n(x)\}$ y $\{q_n(x)\}$ las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos respecto a las funciones peso $\sigma(x)$ y $(1-x^2)\sigma(x)$ sobre $[-1,1]$, respectivamente. Sea $\omega(\theta)$ una función peso en $[-\pi,\pi]$ definida por (3.77) y $\{\rho_n(z)\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\omega(\theta)$. Entonces si $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $z = e^{i\theta}$, se tiene, para todo $n \geq 1$:

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n(1+\rho_n 2n(0))}\left(z^{-n}\rho_n 2n(z) + z^n\rho_n 2n(z^{-1})\right) \tag{3.78}$$

y

$$q_n(x) = \frac{1}{2^n(1-\rho_n 2n+2(0))}\left(\frac{z^{-n-1}\rho_n 2n+2(z) - z^{n+1}\rho_n 2n+2(z^{-1})}{z-z^{-1}}\right). \tag{3.79}$$

En tal sentido, de acuerdo con la transformación anterior, esto es, $z = e^{i\theta}$ y $x = \frac{z+z^{-1}}{2} = \cos\theta$, podemos escribir para la integral $I_\sigma(F)$:

$$I_\sigma(F) = \int_{-1}^{1} F(x)\sigma(x)dx = -\int_{-\pi}^{0} F(\cos\theta)\sigma(\cos\theta)\text{sen}\theta d\theta.$$

Por otro lado, si $\zeta = -\theta$, se tiene que:

$$\int_{-1}^{1} F(x)\sigma(x)dx = \int_{0}^{\pi} F(\cos\zeta)\sigma(\cos\zeta)\text{sen}\zeta d\zeta.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2\int_{-1}^{1} F(x)\sigma(x)dx &= -\int_{-\pi}^{0} F(\cos\theta)\sigma(\cos\theta)\text{sen}\theta d\theta + \\ &+ \int_{0}^{\pi} F(\cos\zeta)\sigma(\cos\zeta)\text{sen}\zeta d\zeta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\cos\theta)\sigma(\cos\theta)|\text{sen}\theta| d\theta, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo:

$$\int_{-1}^{1} F(x)\sigma(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta \tag{3.80}$$

donde $f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}F\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{2}F(\cos\theta)$, $(\omega(-\theta) = \omega(\theta),\ \forall\theta \in \mathbb{R})$.

Dada la simetría de la función peso $\omega(\theta)$, sus momentos trigonométricos $\{\mu_k\}_k,\ k \in \mathbb{Z}$ son reales y, por lo tanto, también lo son los coeficientes de los polinomios de Szegő $\rho_n(z)$. (Compruébese como ejercicio). Por otro lado, si queremos que los coeficientes de los correspondientes polinomios para-ortogonales $B_n(z,\tau) = \rho_n(z) + \tau\rho_n^*(z)$ tengan también coeficientes reales, debemos tomar $\tau = \pm 1$. Para tales valores de τ, los ceros $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ de $B_n(z,\tau)$, que sabemos son distintos y están sobre $\mathbb{T}$, cumplen también cierta simetría en el sentido que aparecen en pares conjugados o son reales $(z = \pm 1)$.

Tomemos en primer lugar $\tau = 1$. Entonces, como $\rho_n(1) = \rho_n^*(1) \neq 0$, (recuérdese que los ceros de $\rho_n(z)$ están en la región $|z| < 1$ y los de $\rho_n^*(z)$ por tanto están en la región $|z| > 1$) el punto $z = 1$ no puede ser un cero de $B_n(z,1)$. Así pues, para n par, $z = -1$ no puede ser un cero y por tanto todos los ceros de $B_n(z,1)$ están sobre $\mathbb{T}$ en pares conjugados. Si por el contrario n es impar, el único cero real es $z = -1$ y los $(n-1)$ ceros restantes aparecen sobre $\mathbb{T}$ en pares conjugados.

Si ahora tomamos $\tau = -1$, claramente el punto $z = 1$ es un cero de $B_n(z,-1) = \rho_n(z) - \rho_n^*(z)$. Para n par el punto $z = -1$ sería también un cero (observar que $\rho_n(-1) = \rho_n^*(-1)$). Si n es impar, el punto $z = 1$ es el único cero real. En ambos casos, los restantes ceros aparecen en pares conjugados sobre $\mathbb{T}$.

Teniendo en cuenta si n es par o impar y los valores del parámetro τ que elijamos ($\tau = 1$ ó $\tau = -1$), las correspondientes $n-$ésimas fórmulas de Szegő adquieren una determinada expresión. En efecto, supongamos que $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\xi_j)$ es la $n-$ésima fórmula de Szegő respecto a

$\omega(\theta)$. Entonces, sabemos que los coeficientes $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ vienen dados por:

$$\lambda_j = -\frac{1}{2\xi_j}\frac{Q_n(\xi_j,\tau)}{B_n'(\xi_j,\tau)}$$

donde $A_n(z,\tau) = \Omega_n(z) - \tau\Omega_n^*(z)$, siendo $\Omega_n(z)$ el $n-$ésimo polinomio asociado a $\rho_n(z)$. Si $\tau = \pm 1$ entonces, tanto A_n como B_n tienen coeficientes reales. (Compruébese).

Por otro lado, si denotamos por $\widetilde{\lambda}_j$ el coeficiente en la fórmula de cuadratura $I_n(f)$ correspondiente al nodo $\overline{\xi}_j$, siendo ξ_j un cero de $B_n(z,\pm 1)$, entonces se tiene que

$$\widetilde{\lambda}_j = -\frac{1}{2\overline{\xi}_j}\frac{A_n(\overline{\xi}_j,\tau)}{B_n'(\overline{\xi}_j,\tau)} = -\frac{1}{2\overline{\xi}_j}\frac{\overline{A_n(\xi_j,\tau)}}{\overline{B_n'(\xi_j,\tau)}} = \overline{\lambda}_j.$$

Como $\lambda_j > 0$, se tiene que $\widetilde{\lambda}_j = \overline{\lambda}_j = \lambda_j$. Así pues, hemos probado la siguiente:

Proposición 3.7.1 *Sea $\omega(\theta)$ una función peso simétrica, esto es, $\omega(-\theta) = \omega(\theta)$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\xi_j)$ la $n-$ésima fórmula de Szegő respecto a $\omega(\theta)$ donde sabemos que los nodos son los ceros del polinomio para-ortogonal $B_n(z,\tau)$, $|\tau| = 1$. Entonces*

1. *Si $\tau = 1$ se tiene*
   a) *Si n es par: $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n/2} \lambda_j \left(f(\xi_j) + f(\overline{\xi}_j)\right)$.*
   b) *Si n es impar: $I_n(f) = \lambda^- f(-1) + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \lambda_j \left(f(\xi_j) + f(\overline{\xi}_j)\right)$.*
2. *Si $\tau = -1$*
   a) *Si n es par:*
   $$I_n(f) = \lambda^+ f(1) + \lambda^- f(-1) + \sum_{j=1}^{(n-2)/2} \lambda_j \left(f(\xi_j) + f(\overline{\xi}_j)\right)$$
   b) *Si n es impar: $I_n(f) = \lambda^+ f(1) + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \lambda_j \left(f(\xi_j) + f(\overline{\xi}_j)\right)$, donde todos los coeficientes λ^+, λ^- y λ_j son positivos.*

Observación 22 *Conviene señalar que debido a la simetría de la función peso $\omega(\theta)$, sólo tendremos que calcular la mitad de los coeficientes y nodos en la fórmula de cuadratura de Szegő.*

Haciendo uso de la conexión que existe entre los polinomios ortogonales sobre el intervalo $[-1,1]$ y sobre $\mathbb{T}$ se tiene, mediante la fórmula (3.78), que la expresión $z^{-n}\rho_{2n}(z) + z^n\rho_{2n}(z^{-1})$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$z^{-n}\rho_{2n}(z) + z^n\rho_{2n}(z^{-1}) = \frac{\rho_{2n}(z) + \rho_{2n}^*(z)}{z^n} = \frac{B_{2n}(z,1)}{z^n}.$$

Por la Proposición 3.7.1 sabemos que los ceros de $B_{2n}(z,1)$ aparecen sobre $\mathbb{T}$ en pares conjugados. Sean $\xi_1,\ldots,\xi_n,\overline{\xi}_1,\ldots,\overline{\xi}_n$ dichos ceros. Si $\xi_j = e^{i\theta_j},\ j=1,\ldots,n$ entonces los ceros de $p_n(x)$ vienen dados por $x_j = \cos\theta_j,\ j=1,\ldots,n$.

De forma similar se tiene, por fórmula (3.79), que:

$$\frac{z^{-n-1}\rho_{2n+2}(z) - z^{n+1}\rho_{2n+2}(z^{-1})}{z-z^{-1}} = \frac{\rho_{2n+2}(z) - \rho_{2n+2}^*(z)}{z^n(z^2-1)} = \frac{B_{2n+2}(z,-1)}{z^n(z^2-1)}$$

y otra vez, por la Proposición 3.7.1 sabemos que $z=\pm 1$ son ceros de $B_{2n+2}(z,-1)$ y el resto aparecen sobre $\mathbb{T}$ en pares conjugados. Sean $\xi_1,\ldots,\xi_n,\overline{\xi}_1,\ldots,\overline{\xi}_n$ dichos ceros. Si $\xi_j = e^{i\theta_j},\ j=1,\ldots,n$ entonces los ceros de $q_n(x)$ vienen dados por $x_j = \cos\theta_j,\ j=1,\ldots,n$.

Según los valores del parámetro τ ($\tau = 1$ ó $\tau = -1$) y según n sea par o impar, obtendremos, partiendo de fórmulas de Szegő sobre la circunferencia unidad $I_n(f)$, fórmulas de cuadratura $J_n(F)$ en el intervalo $[-1,1]$, que serán fórmulas Gaussianas, fórmulas de Gauss-Lobatto o bien de Gauss-Radau. Así pues, para $\tau=1$ y n par se obtendrán las fórmulas Gaussianas. Si $\tau=-1$ y n es par obtendremos las fórmulas de Gauss- Lobatto, mientras que, para $\tau=\pm 1$ y n impar, se tendrán las de Gauss-Radau.

Fórmulas de cuadratura Gaussianas.

Supongamos que queremos aproximar integrales sobre el intervalo $[-1,1]$ de la forma $J_\sigma(F) = \int_{-1}^{1} F(x)\sigma(x)dx$ donde $\sigma(x)$ es una función peso en $[-1,1]$. Entonces si denotamos por $J_n(F) = \sum_{j=1}^{n} A_j F(x_j)$ a la correspondiente $n-$ésima fórmula Gaussiana, sabemos que todos los coeficientes $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ son positivos y los nodos $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ son los ceros del $n-$ésimo polinomio ortogonal respecto a $\sigma(x)$. Además, esta fórmula de cuadratura alcanza el máximo grado de precisión que es $2n-1$, es decir, $J_\sigma(F) = J_n(F)$, $\forall F \in \Pi_{2n-1}$.

Una conexión entre las fórmulas de cuadratura Gaussianas y las de Szegő, viene dada en el siguiente

TEOREMA 3.26 *Sea $J_n(F) = \sum_{j=1}^{n} A_j F(x_j)$ la $n-$ésima fórmula Gaussiana para*
$J_\sigma(F) = \int_{-1}^{1} F(x)\sigma(x)dx$. Sea $x_j = \cos\theta_j$, $j = 1, \ldots, n$ y definamos $\{\xi_j\}_{j=1}^{2n}$ y $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$ de la siguiente forma:

$$\xi_j = e^{i\theta_j}, \;\; \xi_{n+j} = \overline{z}_j; \;\; j = 1, \ldots, n$$

y

$$\lambda_j = A_j, \;\; \lambda_{n+j} = A_j; \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Entonces $I_n(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\xi_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f(\xi_j) + f(\overline{\xi}_j))$ es la $2n-$ésima fórmula de cuadratura de Szegő para $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$ donde $\omega(\theta)$ y $\sigma(x)$ están relacionadas por (3.77) y los nodos son los ceros de $B_{2n}(z,1)$.

Demostración: Por la caracterización de las fórmulas de cuadratura de Szegő, bastaría con probar que $I_n(L) = I_\omega(L)$ para todo $L \in \Lambda_{-(2n-1),2n-1}$, o, lo que es lo mismo, que $I_n(z^k) = I_\omega(z^k)$, $-(2n-1) \leq k \leq (2n-1)$.

Vamos a suponer que $k \geq 0$ (el caso $k < 0$ es similar). Entonces

$$I_{2n}(z^k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\xi_j^k + \overline{\xi}_j^k) = 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos k\theta_j.$$

Si $T_k(x)$ es el $k-$ésimo polinomio de Chebyshev de primera especie, entonces podemos escribir $\cos k\theta = T_k(\cos\theta)$. Como $0 \leq k \leq 2n-1$ se tiene que

$$I_{2n}(z^k) = 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j T_k(\cos\theta_j) = 2\sum_{j=1}^{n} A_j T_k(x_j) = 2\int_{-1}^{1} T_k(x)\sigma(x)dx.$$

Por (3.80) tendremos que

$$2\int_{-1}^{1} T_k(x)\sigma(x)dx = 2\int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$$

donde $p(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}T_k\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{2}T_k(\cos\theta) = \frac{1}{2}\cos k\theta$. En resumen, hemos probado que $I_{2n}(z^k) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos k\theta\omega(\theta)d\theta$.

Por otro lado,

$$I_\omega(z^k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\omega(\theta)\cos k\theta d\theta + i\int_{-\pi}^{\pi}\omega(\theta)\mathrm{sen}k\theta d\theta.$$

Pero como $\omega(\theta)$ es simétrica, la segunda integral en la relación anterior es nula $\forall k \in \mathbb{Z}$, podemos escribir $I_\omega(z^k) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos k\theta\omega(\theta)d\theta$, para $0 \leq k \leq 2n-1$. $\square$

El recíproco también es cierto. En efecto, se tiene el siguiente

TEOREMA 3.27 *Sea $I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n}\lambda_j f(\xi_j)$ la $2n-$ésima fórmula de Szegő para $I_\omega(f)$ con $\omega(\theta)$ dada en términos de σ mediante (3.77) y cuyos nodos son los ceros de $B_{2n}(z,1)$. Sea $\xi_{n+j} = \overline{\xi}_j$ y $\xi_j = e^{i\theta_j},\ j = 1,\ldots,n$. Entonces, si definimos $x_j = \cos\theta_j,\ j = 1,\ldots,n$, la fórmula $J_n(F) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j F(x_j)$ es la $n-$ésima fórmula Gaussiana para $J_\sigma(F)$.*

Demostración: Hemos de ver que $J_n(p) = J_\sigma(p)$, para todo $p \in \Pi_{2n-1}$, o, lo que es lo mismo, que

$$J_n(x^k) = J_\sigma(x^k),\ \ 0 \leq k \leq 2n-1$$

Como $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ se tiene que

$$x^k = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^k = p(z) + p(z^{-1}) = L(z) \in \Lambda_{-k,k}, \tag{3.81}$$

donde p es un polinomio de grado k con coeficientes reales. Por tanto

$$\overline{L(z)} = L(\overline{z}) = L(z^{-1}) = L(z),\ \ z = e^{i\theta}. \tag{3.82}$$

Sabemos que $\lambda_{n+j} = \lambda_j$ y $\xi_{n+j} = \xi_j,\ j = 1,\ldots,n$. Entonces, como $L \in \Lambda_{-k,k} \subset \Lambda_{-(2n-1),2n-1}$,

$$\begin{aligned} J_n(x^k) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j^k = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j L(\xi_j) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j+\lambda_j}{2}L(\xi_j) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\lambda_j L(\xi_j) \\ &= \textstyle\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}L(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Por otro lado, por la fórmula (3.80):

$$\begin{aligned} J_\sigma(x^k) &= \int_{-1}^{1} x^k \sigma(x)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta)^k\, \sigma(\cos\theta)|\mathrm{sen}\theta| d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta = J_n(x^k) \end{aligned}$$

para $0 \le k \le 2n-1$. $\square$

OBSERVACIÓN 23 *Supongamos que* $p_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$ *es el polinomio nodal en la fórmula Gaussiana que sabemos coincide con el polinomio ortogonal mónico respecto de la función peso* $\sigma(x)$*. Como* $x_j = \cos\theta_j$ *siendo* $\xi_j = e^{i\theta_j}$*,* $j = 1, \ldots, n$ *podemos escribir*

$$\begin{aligned} B_{2n}(z,1) &= \rho_{2n}(z) + \rho_{2n}^*(z) = (1 + \rho_{2n}(0))\prod_{j=1}^{n}(z - \xi_j)(z - \overline{\xi}_j) \\ &= (1 + \rho_{2n}(0)) z^n \prod_{j=1}^{n}(z - \xi_j)(1 - \overline{\xi}_j/z). \end{aligned}$$

Si $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$*, entonces* $(z-\xi_j)(z-\overline{\xi}_j/z) = (z+z^{-1})-(\xi_j+\overline{\xi}_j) = 2(x-x_j)$*. Por tanto,*

$$B_{2n}(z,1) = (1 + \rho_{2n}(0)) z^n 2^n p_n(x)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \tfrac{z^{-n}}{2^n(1+\rho_{2n}(0))}\left(\rho_{2n}(z) + z^{2n}\rho_{2n}(z^{-1})\right) \\ &= \tfrac{z^{-n}\rho_{2n}(z) + z^n \rho_{2n}(z^{-1})}{2^n(1+\rho_{2n}(0))}. \end{aligned}$$

Hemos deducido, por tanto, la fórmula (3.78) de un modo diferente y más sencillo, haciendo uso simplemente de la conexión entre las fórmulas de cuadratura.

Fórmulas de cuadratura de Gauss- Lobatto y Gauss-Radau

Supongamos inicialmente que se desea aproximar $J_\sigma(F)$ mediante una fórmula de cuadratura donde alguno de los nodos $\{a_j\}_{j=1}^{m}$ han sido prefijados y los restantes $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ a determinar de modo que

$$J_n(F) = \sum_{j=1}^{m} B_j F(a_j) + \sum_{j=1}^{n} A_j F(x_j) \tag{3.83}$$

tenga el máximo grado de precisión $2n+m-1$, es decir, $J_\sigma(F) = J_n(F)$ para todo $F \in \Pi_{2n+m-1}$. (Obsérvese que disponemos de $2n+m$ parámetros). Entonces, tenemos el siguiente resultado de caracterización, reformulación del Teorema 1.12: ([21]) (la prueba del mismo se propone como ejercicio)

TEOREMA 3.28 *La fórmula de cuadratura $J_n(F)$ dada mediante (3.83) es exacta en Π_{2n+m-1} sí y sólo si*

(1) $J_n(F)$ es de tipo interpolatorio en Π_{n+m-1}.

(2) Los nodos $\{x_j\}_{j=1}^n$ son los ceros del $n-$ésimo polinomio ortogonal respecto a la función $\nu(x)\sigma(x)$ donde $\nu(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_m)$. Además, si $\nu(x_k) \neq 0$ para $k = 1,\ldots,n$ entonces los coeficientes $\{B_j\}_{j=1}^m$ y $\{A_j\}_{j=1}^n$ son positivos.

Obsérvese que en general $\nu(x)$ cambia de signo, por lo que no puede asegurarse que el $n-$ésimo polinomio ortogonal tenga grado n y que sus ceros estén en $[-1,1]$, (ver [14], fórmulas de Gauss- Kronrod).

Para $m = 2$, $a_1 = -1$ y $a_2 = 1$ se obtienen las fórmulas de Gauss-Lobatto. En este caso, los nodos $\{x_j\}_{j=1}^n$ son los ceros del $n-$ésimo polinomio ortogonal con respecto a la función peso $(1-x^2)\sigma(x)$. Por la fórmula (3.78), los nodos vienen dados en términos de los ceros del polinomio para-ortogonal $B_{2n+2}(z,-1)$, el cual tiene $2n$ ceros complejos que aparecen en pares conjugados sobre $\mathbb{T}$ y los dos restantes son $z = \pm 1$. Sean $\xi_1,\ldots,\xi_{2n}$ los $2n$ ceros complejos. Si $\xi_{n+j} = \overline{\xi}_j = e^{-i\theta_j}$, $j = 1,\ldots,n$, vemos que, por (3.79), los ceros de $q_n(x)$ y por tanto los nodos $\{x_j\}_{j=1}^n$ en la fórmula (3.83) vienen dados por $x_j = \cos\theta_j$, $j = 1,\ldots,n$.

De forma análoga al Teorema 3.26 podemos demostrar el siguiente

TEOREMA 3.29 *Sea $J_n(F) = A^+F(1) + A^-F(-1) + \sum_{j=1}^n A_jF(x_j)$ la $n-$ésima fórmula de Gauss- Lobatto para $J_\sigma(F) = \int_{-1}^1 F(x)\sigma(x)dx$. Sea $x_j = \cos\theta_j$ y definamos $\{\xi_j\}_{j=1}^{2n}$ y $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$ de la siguiente forma:*

$$\xi_j = e^{i\theta_j},\ \ \xi_{n+j} = \overline{\xi}_j;\ \ j = 1,\ldots,n$$

y

$$\lambda^+ = A^+,\ \lambda^- = A^-,\ \lambda_j = A_j,\ \ \lambda_{n+j} = A_j;\ \ j = 1,\ldots,n.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I_n(f) &= 2\lambda^+f(1) + 2\lambda^-f(-1) + \textstyle\sum_{j=1}^{2n}\lambda_jf(\xi_j) \\ &= 2\lambda^+f(1) + 2\lambda^-f(-1) + \textstyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f(\xi_j) + f(\overline{\xi}_j)), \end{aligned}$$

es la $(2n+2)-$ésima fórmula de cuadratura de Szegő para $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$ donde $\omega(\theta)$ y $\sigma(x)$ están relacionadas por (3.77) y los nodos son los ceros de $B_{2n+2}(z,-1)$.

Haciendo uso de las fórmulas (3.81) y (3.82), y procediendo igual que en el Teorema 3.27 se tiene:

TEOREMA 3.30 *Sea $I_{2n+2}(f) = \sum_{j=1}^{2n+2} \lambda_j f(\xi_j)$ la $(2n+2)-$ésima fórmula de Szegő para $I_\omega(f)$ con $\omega(\theta)$ dada en términos de σ como en la fórmula (3.77) y cuyos nodos son los ceros de $B_{2n+2}(z,-1)$. Sea $\xi_{2n+1} = 1$, $\xi_{2n+2} = -1$ y $\xi_{n+j} = \overline{\xi}_j$ con $\xi_j = e^{i\theta_j}$, $j = 1,\dots,n$. Entonces si definimos $x_j = \cos\theta_j$, $j = 1,\dots,n$ y tomando $\lambda^+ = \lambda_{2n+1}$ y $\lambda^- = \lambda_{2n+2}$, la fórmula $J_n(F) = \frac{\lambda^+}{2}F(1) + \frac{\lambda^-}{2}F(-1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j F(x_j)$ es la $n-$ésima fórmula de Gauss- Lobatto para $J_\sigma(F)$.*

OBSERVACIÓN 24 *Supongamos que $q_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$ es el polinomio nodal en la fórmula de Gauss- Lobatto, que sabemos que coincide con el polinomio ortogonal mónico respecto de la función peso $(1-x^2)\sigma(x)$. Como $x_j = \cos\theta_j$ siendo $\xi_j = e^{i\theta_j}$, $j = 1,\dots,n$ podemos escribir*

$$\begin{aligned} B_{2n+2}(z,-1) &= \rho_{2n+2}(z) - \rho_{2n+2}^*(z) \\ &= (1-\rho_{2n+2}(0))(z^2-1)\prod_{j=1}^{n}(z-\xi_j)(z-\overline{\xi}_j) \\ &= (1-\rho_{2n+2}(0))z^n(z^2-1)\prod_{j=1}^{n}(z-\xi_j)(1-\overline{\xi}_j/z). \end{aligned}$$

Si $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$, entonces $(z-\xi_j)(1-\overline{\xi}_j/z) = (z+z^{-1})-(\xi_j+\overline{\xi}_j) = 2(x-x_j)$. Por tanto,

$$B_{2n+2}(z,-1) = (1-\rho_{2n+2}(0))z^n 2^n (z^2-1)q_n(x)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \frac{z^{-n}}{2^n(1-\rho_{2n+2}(0))}\left(\frac{\rho_{2n+2}(z)-z^{2n+2}\rho_{2n+2}(z^{-1})}{z^2-1}\right) \\ &= \frac{z^{-n-1}\rho_{2n+2}(z)+z^{n+1}\rho_{2n+2}(z^{-1})}{2^n(1-\rho_{2n+2}(0))(z-z^{-1})}. \end{aligned}$$

Hemos deducido, por tanto, la fórmula (3.79) de una forma diferente y más sencilla, haciendo uso, de nuevo, de la conexión entre las fórmulas de cuadratura.

Supongamos ahora que en (3.83) elegimos $m = 1$ y $a_1 = 1$ ó bien $a_1 = -1$. En ambos casos obtendremos las fórmulas de Gauss- Radau donde los nodos $\{x_j\}_{j=1}^n$ son los ceros del $n-$ésimo polinomio ortogonal con respecto a la función peso $(1 + x)\sigma(x)$ (si $a_1 = 1$) y $(1 - x)\sigma(x)$ (si $a_1 = -1$). Dichos nodos vendrán dados en términos de los ceros de los polinomios para-ortogonales $B_{2n+1}(z, -1)$, (si $a_1 = 1$) y $B_{2n+1}(z, 1)$, (si $a_1 = -1$). Para fijar ideas, supongamos que $a_1 = 1$. Entonces el polinomio $B_{2n+1}(z, -1)$ tiene un único cero real que es el punto $z = 1$ y los $2n$ restantes aparecen sobre $\mathbb{T}$ en pares conjugados. Podemos formular teoremas para el caso de las fórmulas de Gauss- Radau análogos a los Teoremas 3.29 y 3.30 dados en el caso Gauss- Lobatto:

TEOREMA 3.31 *Sea $J_n(F) = A^+F(1)+\sum_{j=1}^n A_jF(x_j)$ la $n-$ésima fórmula de Gauss- Radau para $J_\sigma(F) = \int_{-1}^1 F(x)\sigma(x)dx$. Sea $x_j = \cos\theta_j$ y definamos $\{\xi_j\}_{j=1}^{2n+1}$ y $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n+1}$ de la siguiente forma:*

$$\xi_j = e^{i\theta_j}, \ \ \xi_{n+j} = \overline{\xi}_j; \ \ j = 1, \ldots , n, \ \xi_{2n+1} = 1$$

y

$$\lambda_j = A_j, \ \ \lambda_{n+j} = A_j; \ \ j = 1, \ldots , n, \ \ \lambda^+ = \lambda_{2n+1} = A^+$$

Entonces

$$I_n(f) = 2\lambda^+f(1) + \sum_{j=1}^{2n} \lambda_jf(\xi_j) = 2\lambda^+f(1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(f(\xi_j) + f(\overline{\xi}_j)),$$

es la $(2n + 1)-$ésima fórmula de cuadratura de Szegő para $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)d\theta$ donde $\omega(\theta)$ y $\sigma(x)$ están relacionadas por la fórmula (3.77) y los nodos son los ceros de $B_{2n+1}(z, -1)$.

Recíprocamente se tiene también el siguiente

TEOREMA 3.32 *Sea $I_{2n+1}(f) = \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_jf(\xi_j)$ la $(2n+1)-$ésima fórmula de Szegő para $I_\omega(f)$ con $\omega(\theta)$ dada en términos de σ a través de (3.77) y cuyos nodos son los ceros de $B_{2n+1}(z, -1)$. Sea $\xi_{2n+1} = 1$ y $\xi_{n+j} = \overline{\xi}_j$ con $\xi_j = e^{i\theta_j}$, $j = 1, \ldots , n$. Entonces si definimos $x_j = \cos\theta_j$, $j = 1, \ldots , n$ y tomando $\lambda^+ = \lambda_{2n+1}$, la fórmula*

$$J_n(F) = \frac{\lambda^+}{2}F(1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_jF(x_j),$$

es la $n-$ésima fórmula de Gauss- Radau para $J_\sigma(F)$.

Finalmente, veamos cómo puede deducirse una expresión para los polinomios ortogonales mónicos relativos a las funciones peso $(1+x)\sigma(x)$ y $(1-x)\sigma(x)$, respectivamente, utilizando, nuevamente, la conexión entre las fórmulas de cuadratura. Así pues, tenemos el siguiente

TEOREMA 3.33 *Sea $\sigma(x)$ una función peso en el intervalo $[-1,1]$ y consideremos las siguientes funciones peso asociadas a $\sigma(x)$ también en $[-1,1]$:*

$$\sigma^{+}(x) = (1+x)\sigma(x) \quad y \quad \sigma^{-}(x) = (1-x)\sigma(x).$$

Sean $\{Q_n^{+}(x)\}$ y $\{Q_n^{-}(x)\}$ las sucesiones de los polinomios mónicos respecto de $\sigma^{+}(x)$ y $\sigma^{-}(x)$, respectivamente. Si definimos $\omega(\theta)$ en $[-\pi,\pi]$ como en (3.77), entonces si $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $(z = e^{i\theta})$, se tiene que

$$Q_n^{\pm}(x) = \frac{1}{2^n(1 \pm \rho_{2n+1}(0))}\left(\frac{z^{-n}\rho_{2n+1}(z) \pm z^{n+1}\rho_{2n+1}(z^{-1})}{z \pm 1}\right),$$

siendo como siempre $\{\rho_n(z)\}$ la sucesión de polinomios mónicos de Szegő para $\omega(\theta)$.

Demostración: Sea $I_{2n+1}(f)$ la $(2n+1)-$ésima fórmula de Szegő para $I_\omega(f)$, donde los nodos son los ceros del polinomio para-ortogonal $B_{2n+1}(z,1)$. Sabemos que, en este caso, el único cero real es el punto $z = -1$ y los $2n$ ceros restantes $\{\xi_j\}_{j=1}^{2n}$ aparecen sobre $\mathbb{T}$ en pares conjugados. Es decir,

$$I_{2n+1}(f) = \lambda^{-} f(-1) + \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\xi_j) = \lambda^{-} f(-1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f(\xi_j) + f(\overline{\xi}_j)).$$

Entonces, si definimos $x_j = \cos\theta_j$ siendo $\xi_j = e^{i\theta_j}$, $j = 1,\ldots,n$, se puede comprobar que la fórmula de cuadratura:

$$J_n(F) = \lambda^{-} F(-1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j F(x_j)$$

para $J_\sigma(F)$ es exacta en Π_{2n}. Es decir, hemos obtenido la fórmula de Gauss- Radau $(m=1)$ tomando ahora $a_1 = -1$ en la fórmula (3.83).

Si $Q_n^+(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$, por el Teorema 3.28, sabemos que es el $n-$ésimo polinomio ortogonal respecto a $(1+x)\sigma(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(z,1) &= \rho_{2n+1}(z) + \rho_{2n+1}^*(z) \\ &= (1 + \rho_{2n+1}(0))(z+1) \textstyle\prod_{j=1}^n (z - \xi_j)(z - \overline{\xi}_j) \\ &= (1 + \rho_{2n+1}(0)) z^n (z+1) \textstyle\prod_{j=1}^n (z - \xi_j)(1 - \overline{\xi}_j / z) \\ &= (1 + \rho_{2n+1}(0)) 2^n z^n (z+1) Q_n^+(x). \end{aligned}$$

El caso $\sigma^-(x)$ se demuestra de forma similar. $\square$

Observación 25 *La conexión entre la circunferencia unidad y el intervalo $[-\pi, \pi]$ fue estudiada ampliamente por el "padre" de los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad (Gabőr Szegő), permitiendo obtener de forma más rápida y directa propiedades tanto algebraicas como analíticas para los polinomios ortogonales sobre $[-1, 1]$ a partir de las correspondientes sobre $\mathbb{T}$. En esta sección, hemos contribuido a completar tal conexión figurando el contenido de la misma en el trabajo reciente [5] de los autores L. Daruis y P. González- Vera, en colaboración con el Profesor A. Bulthell. Tal circunstancia pone de manifiesto la vitalidad y dinamismo del tema en cuestión.*

Capítulo 4

Ejemplos, Aplicaciones y Extensiones

4.1. Modificaciones racionales de la medida de Lebesgue

A lo largo del curso, hemos venido mencionando ejemplos de polinomios de Szegő, polinomios para-ortogonales y fórmulas de cuadratura, con respecto a la función peso más sencilla $\omega(\theta) = 1$ (medida de Lebesgue) o en forma normalizada $\left(\int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta)d\theta = 1\right)$, $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$. Afortunadamente, para tal función peso, la sucesión de polinomios de Szegő se conoce explícitamente y tiene la forma extremadamente sencilla: $\rho_n(z) = z^n,\ n = 0, 1, \ldots$, lo cual nos permite simplificar muchos cálculos, (no ocurre lo mismo en el caso real, donde la función peso $\sigma(x) = 1,\ x \in [-1, 1]$, lleva a los polinomios de Legendre).

La siguiente familia de funciones peso estudiada ya desde la época de Szegő, son las denominadas "modificaciones racionales de la medida de Lebesgue" sobre la que nos vamos a centrar en esta sección. Tales funciones peso son de la forma (normalizada):

$$\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi \left|h\left(e^{i\theta}\right)\right|^2}, \tag{4.1}$$

siendo $h(z)$ un polinomio de grado m fijo con ceros fuera de la circunferencia unidad. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que tales ceros se encuentran en $\mathbb{D}$. Así tenemos la primera

Proposición 4.1.1 *$\forall n \geq m$, $\varphi_n(z) = z^{n-m}h(z)$, representa el polinomio ortonormal de grado n para $\omega(\theta)$ dada por (4.1).*

Demostración: $\forall n \geq m$, $\varphi_n(z)$, es un polinomio de grado exacto n. Tomemos $k:\ 0 \leq k \leq n-1$. Entonces, $\left(z = e^{i\theta}\right)$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, z^k \rangle_\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(z) z^{-k} \omega(\theta) d\theta = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{z^{n-m-k} h(z)}{h(z)\overline{h(z)}} d\theta \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{z^{2n-(m+k)}}{h^*(z)} d\theta = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \tfrac{z^{2n-(m+k+1)}}{h^*(z)} dz. \end{aligned}$$

Por el Teorema de los residuos, dado que los ceros de $h^*(z)$ están en $\mathbb{E}$, se tiene que

$$\langle \varphi_n, z^k \rangle_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^{2n-(m+k+1)}}{h^*(z)} dz = 0,\ (k:\ 0 \leq k \leq n-1.)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(z)|^2 \omega(\theta) d\theta = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(z)}}{|h(z)|^2} d\theta \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{z^{n-m} h(z) z^{m-n} \overline{h(z)}}{|h(z)|^2} d\theta = 1. \end{aligned}$$

□

Así pues, los polinomios para-ortogonales $B_n(z)$ serán de la forma

$$B_n(z) = c_n \left(\varphi_n(z) + \tau_n \varphi_n^*(z) \right),\ c_n \neq 0,\ |\tau_n| = 1.$$

Ahora bien, si $n \geq m$:

$$\begin{aligned} \varphi_n^*(z) &= z^n \varphi_{n^*}(z) = z^n \overline{\varphi_n\left(\tfrac{1}{\bar{z}}\right)} \\ &= z^n \left(\tfrac{1}{z^{n-m}} \overline{h\left(\tfrac{1}{\bar{z}}\right)} \right) = z^m \overline{h\left(\tfrac{1}{\bar{z}}\right)} = h^*(z). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$B_n(z) = c_n \left(z^{n-m} h(z) + \tau_n h^*(z) \right),\ n \geq m. \tag{4.2}$$

Si denotamos por $I_n(f)$ la correspondiente fórmula de Szegő para el parámetro τ_n, esto es,

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j),$$

entonces, los nodos $\{z_j\}_{j=1}^n$ serán las raíces de la ecuación:

$$z^{n-m}h(z) + \tau_n h^*(z) = 0, \ n \geq m. \tag{4.3}$$

En cuanto a los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, tenemos:

Proposición 4.1.2 *Si $h(z) = \prod_{k=1}^s (z-\alpha_k)^{r_k}$, donde $r_1 + \ldots + r_s = m$ y $|\alpha_k| < 1$, $k = 1, \ldots, s$:*

$$\lambda_j = \frac{1}{|h(z_j)|^2 \left(n - m + \sum_{k=1}^s \frac{r_k(1-|\alpha_k|^2)}{|z_j-\alpha_k|^2} \right)}, \ j = 1, \ldots n,$$

con $n \geq m$.

Demostración: Utilizaremos la expresión de los pesos estudiada en el Capítulo 3, a saber:

$$\lambda_j = \frac{\overline{z_j}}{\varphi_n'(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)} - (\varphi_n^*)'(z_j)\overline{\varphi_n^*(z_j)}} = \frac{z_j^{n-1}}{\varphi_n^*(z_j)\varphi_n'(z_j) - \varphi_n(z_j)(\varphi_n^*)'(z_j)}.$$

Dado que $\varphi_n(z) = z^{n-m}h(z)$, entonces $\varphi_n'(z_j) = (n-m)h(z_j)z_j^{n-m-1} + z_j^{n-m}h'(z_j)$. Además, $\varphi_n^*(z) = h^*(z)$, por lo que $(\varphi_n^*)'(z_j) = (h^*)'(z_j)$. Por tanto,

$$\lambda_j = \frac{z_j^{n-1}}{h^*(z_j)\left((n-m)h(z_j)z_j^{n-m-1} + z_j^{n-m}h'(z_j)\right) - z_j^{n-m}h(z_j)(h^*)'(z_j)}.$$

dado que $z_j \in \mathbb{T} : h^*(z_j) = z_j^m \overline{h(z_j)}$, luego:

$$\lambda_j = \frac{z_j^{n-1}}{(n-m)z_j^{n-1}|h(z_j)|^2 + z_j^n \overline{h(z_j)} h'(z_j) - z_j^{n-m}h(z_j)(h^*)'(z_j)}. \tag{4.4}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $h(z) = \prod_{k=1}^s (z-\alpha_k)^{r_k}$, se puede comprobar fácilmente que:

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{k=1}^s \frac{r_k}{z-\alpha_k}.$$

Además, $h^*(z) = \prod_{k=1}^{s}(1 - \overline{\alpha}_k z)^{r_k}$, por lo que de modo análogo:

$$\frac{(h^*)'(z)}{h^*(z)} = -\sum_{k=1}^{s} \frac{\overline{\alpha}_k r_k}{1 - \overline{\alpha}_k z}.$$

Por tanto, utilizando (4.4), se deduce:

$$\lambda_j = \frac{z_j^{n-1}}{(n-m)z_j^{n-1}|h(z_j)|^2 + z_j^n |h(z_j)|^2 \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{r_k}{z-\alpha_k}\right) + z_j^n |h(z_j)|^2 \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\overline{\alpha}_k r_k}{1-\overline{\alpha}_k z}\right)},$$

es decir,

$$\lambda_j = \frac{1}{|h(z_j)|^2 \left((n-m) + z_j \left(\sum_{k=1}^{s} \left(\frac{r_k}{z-\alpha_k} + \frac{\overline{\alpha}_k r_k}{1-\overline{\alpha}_k z}\right)\right)\right)}. \tag{4.5}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-\alpha_k} + \frac{\overline{\alpha}_k}{1-\overline{\alpha}_k z} &= \frac{1}{z-\alpha_k} + \frac{\overline{\alpha}_k \overline{z}_j}{\overline{z}_j - \overline{\alpha}_k} = \frac{\overline{z}_j - \overline{\alpha}_k + z_j \overline{z}_j \overline{\alpha}_k - |\alpha_k|^2 \overline{z}_j}{|z-\alpha_k|^2} \\ &= \frac{\overline{z}_j (1-|\alpha_k|^2)}{|z-\alpha_k|^2}. \end{aligned}$$

Recordando que $|z_j|^2 = 1,\ j = 1, \ldots, n$, al sustituir esta última expresión en (4.5), se concluye la demostración. □

Obsérvese que cuando $h(z) = 1$, se tiene $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$. Entonces $m = s = 0$, quedando, para los pesos, la expresión ya conocida

$$\lambda_j = \frac{1}{n},\ j = 1, \ldots, n.$$

Otro caso particular interesante es el que conduce al llamado núcleo de Poisson (el que comparece en la integral de Poisson)

$$\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi(1 - 2r\cos\theta + r^2)},\ r \in (0,1).$$

En efecto, si en (4.1) tomamos $m = 1$ y $h(z) = z - r,\ r \in (0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} \left|h\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 &= \left|e^{i\theta} - r\right|^2 = \left(e^{i\theta} - r\right)\left(e^{-i\theta} - r\right) = 1 + r^2 - 2\Re\left(re^{i\theta}\right) \\ &= 1 - 2r\cos\theta + r^2. \end{aligned}$$

Los nodos $\{z_j\}_{j=1}^n$ de las correspondientes fórmulas de cuadratura de Szegő serán las raíces de la ecuación

$$z^{n-1}(z-r)+\tau(1-rz)=0,\ |\tau|=1.$$

En cuanto a los pesos, aplicando la Proposición 4.1.2, obtenemos, para todo $j=1,\ldots,n$:

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \frac{1}{|z_j-r|^2 \quad n-1+\frac{1-r^2}{|z_j-r|^2}} = \frac{1}{(n-1)|z_j-r|^2+1-r^2} \\
&= \frac{1}{1-r^2+(n-1)(1-r^2+2r\cos\theta_j)} = \frac{1}{n(1-r^2)+2(n-1)r\cos\theta_j},
\end{aligned}$$

siendo $z_j=e^{i\theta},\ j=1,\ldots,n.$

Ejemplo 4.1 *Compruébese que el error $\widetilde{E}_n(z)$ en la aproximación a $F_\omega(z)$ (Transformada de Herglotz-Riesz) viene dada por*

$$\widetilde{E}_n(z)=F_\omega(z)-F_n(z)=\begin{cases} \frac{2z^n}{(1-rz)B_n(z)} & \text{si} \quad |z|<1, \\ \frac{-2\tau z}{(z-r)B_n(z)} & \text{si} \quad |z|>1, \end{cases}$$

siendo $B_n(z)=z^{n-1}(z-r)+\tau(1-rz),\ 0<r<1.$

4.2. Funciones peso tipo-Chebyshev

Con la finalidad de seguir calculando explícitamente fórmulas de cuadratura de Szegő, tomaremos algunos casos particulares de las llamadas "funciones peso de tipo Jacobi" que se expresan en la forma:

$$\omega(\theta)=(1-\cos\theta)^{\alpha+1/2}(1+\cos\theta)^{\beta+1/2},\ \ \alpha,\beta>-1. \tag{4.6}$$

Más concretamente, nos centraremos en los siguientes casos:

$$\begin{array}{lll} \alpha=-\frac{1}{2}, & \beta=\frac{1}{2}, & \omega_1(\theta)=1+\cos\theta \\ \alpha=\frac{1}{2}, & \beta=-\frac{1}{2}, & \omega_2(\theta)=1-\cos\theta \\ \alpha=\frac{1}{2}, & \beta=\frac{1}{2}, & \omega_3(\theta)=\operatorname{sen}^2\theta. \end{array} \tag{4.7}$$

Tales funciones forman parte de las llamadas funciones peso de Chebyshev, es decir, funciones peso $\sigma(x)$ en $[-1,1]$ de tipo Jacobi, esto es, $\sigma(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, donde $\alpha,\beta\in\{\pm\frac{1}{2}\}$. El caso que falta es

$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ y da lugar a la función $\omega_4(\theta) = 1$ (medida de Lebesgue) para la que, como hemos visto en la sección anterior, se conocen muy bien las fórmulas de Szegő.

Calcularemos, en primer lugar, para cada una de las funciones peso ω_k, $k = 1, 2, 3$, tanto los polinomios de Szegő $\rho_n(z)$ como sus asociados $\Omega_n(z)$.

Por otro lado, también determinaremos los polinomios para-ortogonales $B_n(z, \tau)$ para ciertos valores del parámetro τ así como los asociados $A_n(z, \tau)$ con el fin de dar fórmulas explícitas para los coeficientes de las correspondientes fórmulas de Szegő.

A la hora de computar los polinomios de Szegő $\rho_n(z)$ a través de las relaciones de recurrencia, se hace preciso determinar los coeficientes de reflexión $\delta_n := \rho_n(0)$. En [24] se probó que para las funciones peso de tipo Jacobi, los polinomios de Szegő mónicos satisfacen:

$$\rho_n(0) = \frac{\alpha + \frac{1}{2} + (-1)^n(\beta + \frac{1}{2})}{n + \alpha + \beta + 1}. \tag{4.8}$$

En primer lugar, estudiaremos en detalle todo lo relativo a la función peso de Chebyshev normalizada $\omega_3(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2\pi}$. En este caso la sucesión de momentos viene dada por $\mu_0 = 1/2$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -1/4$ y $\mu_k = 0$ $\forall k \geq 3$. Por la fórmula (4.8) los coeficientes de reflexión son $\delta_n := \rho_n(0) = \frac{1+(-1)^n}{n+2}$. Así pues, los polinomios de Szegő se pueden computar recursivamente obteniéndose, para los primeros valores de n, lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \rho_2(z) = \frac{1}{2} + z^2 & \rho_3(z) = z\left(\frac{1}{2} + z^2\right) \\ \rho_4(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^2 + z^4 & \rho_5(z) = z\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^2 + z^4\right). \end{array}$$

Como regla general, hemos deducido la siguiente:

Proposición 4.2.1 *La sucesión* $\{\rho_n\}$, *donde*

$$\rho_n(z) = \begin{cases} \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n/2}(k+1)z^{2k} & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ z\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{(n-1)/2}(k+1)z^{2k} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases} \tag{4.9}$$

es la sucesión de los polinomios mónicos de Szegő con respecto a la función peso $\omega(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2\pi}$, *para todo* n.

Demostración: Supongamos que n es par, entonces:

$$\begin{aligned}
< \rho_n(z), z^k >_{\omega_3} &= \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\frac{-1}{2n+4} \sum_{j=0}^{n/2} (j+1) z^{2j} \quad (z^2-1)^2}{z^{k+3}} dz \\
&= Res(h, 0)
\end{aligned}$$

donde $h(z) = \frac{\frac{-1}{2n+4} \sum_{j=0}^{n/2} (j+1) z^{2j} \quad (z^2-1)^2}{z^{k+3}}$. Por tanto:

$$h(z) = \frac{-1}{2n+4} \left(\sum_{j=0}^{n/2} \frac{j+1}{z^{k-2j-1}} + \sum_{j=0}^{n/2} \frac{-2(j+1)}{z^{k-2j+1}} + \sum_{j=0}^{n/2} \frac{j+1}{z^{k-2j+3}} \right).$$

Observar que, si k es impar entonces $Res(h, 0) = 0$. Si $k = 0$ se tiene

$$Res(h, 0) = \frac{-1}{2n+4}(-2+2) = 0.$$

Si $2 \leq k \leq n-2$

$$Res(h, 0) = \frac{-1}{2n+4} \left(\frac{k-2}{2} + 1 - 2\left(\frac{k}{2}+1\right) + \frac{k+2}{2} + 1 \right) = 0.$$

Si $k = n$

$$Res(h, 0) = \frac{-1}{2n+4} \left(\frac{n}{2} - n - 2 \right) = \frac{n+4}{4(n+2)} \neq 0.$$

Si n es impar, se tiene:

$$\begin{aligned}
< \rho_n(z), z^k >_{\omega_3} &=< z\rho_{n-1}(z), z^k >_{\omega_3} \\
&=< \rho_{n-1}(z), z^{k-1} >_{\omega_3} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ \frac{n+4}{4(n+2)} & \text{si} \quad k = n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Si $k = 0$,

$$\begin{aligned}
< \rho_n(z), 1 >_{\omega_3} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{z\rho_{n-1}(z)(z^2-1)^2}{-4z^3} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\rho_{n-1}(z)(z^2-1)^2}{-4z^2} dz \\
&= Res(h, 0)
\end{aligned}$$

donde

$$h(z) = \frac{-1}{2(n+1)} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \left((j+1)z^{2j+2} + (-2(j+1))z^{2j} + (j+1)z^{2j-2} \right).$$

Por tanto, $Res(h,0) = 0$ y para todo n, tenemos que:

$$< \rho_n(z), z^k >_{\omega_3} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ \frac{n+4}{4(n+2)} & \text{si} \quad k = n. \end{cases}$$

□

Observación 26 *La expresión (4.9) de los polinomios de Szegő con respecto a la función peso* $\omega_3(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\pi}$ *(y en general también para* ω_1 *y* ω_2*) ya había sido obtenida con anterioridad. Por ejemplo ver [16], teniendo en cuenta que* $\frac{\operatorname{sen}\theta}{2\pi} = \frac{\left|1-z^2\right|^2}{2} \frac{1}{2\pi}$, $z = e^{i\theta}$ *(modificación racional de la medida de Lebesgue). Ver también [15] y [24].*

Los correspondientes polinomios asociados $\Omega_n(z)$ para los primeros valores de n vienen dados por: (recuérdese que satisfacen la misma ley de recurrencia que los $\rho_n(z)$ pero con distinto valor inicial (2.36))

$$\begin{array}{ll} \Omega_0(z) = -\frac{1}{2} & \Omega_1(z) = -\frac{1}{2}z \\ \Omega_2(z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}z^2 & \Omega_3(z) = z\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}z^2\right) \\ \Omega_4(z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{2}z^4 & \Omega_5(z) = z\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{2}z^4\right). \end{array}$$

Como regla general se tiene la siguiente

Proposición 4.2.2 *La sucesión* $\{\Omega_n\}$, *donde*

$$\begin{array}{ll} \Omega_n(z) = \frac{1}{n+2}\frac{1-z^n}{1-z^2} - \frac{1}{2}z^n & \textit{para } n \textit{ par} \\ \Omega_n(z) = z\left(\frac{1}{n+1}\frac{1-z^{n-1}}{1-z^2} - \frac{1}{2}z^{n-1}\right) = z\Omega_{n-1}(z) & \textit{para } n \textit{ impar} \end{array} \tag{4.10}$$

es la sucesión de polinomios asociados con respecto a la función peso $\omega(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2\pi}$, *para todo* n.

Demostración: Para n par:

$$\begin{aligned}
&z\Omega_{n-1}(z) - \delta_n\Omega^*_{n-1}(z) = z^2\Omega_{n-2}(z) - \delta_n\Omega^*_{n-2}(z)\\
&= z^2\left(\tfrac{1}{n}\tfrac{1-z^{n-2}}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}z^{n-2}\right) - \tfrac{2}{n+2}\left(\tfrac{1}{n}\tfrac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}\right)\\
&= \tfrac{1}{n}\tfrac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \tfrac{1}{n(n+2)}\tfrac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} + \tfrac{1}{n+2} - \tfrac{1}{2}z^{n-2}\\
&= \tfrac{1}{n(n+2)(1-z^2)}\big((n+2)z^2(1-z^{n-2}) - 2z^2(1-z^{n-2}) + (1-z^2)n\big) - \tfrac{1}{2}z^n\\
&= \tfrac{1}{n(n+2)(1-z^2)}\big((n+2)z^2 - (n+2)z^n - 2z^2 + 2z^n + n - nz^2\big) - \tfrac{1}{2}z^n\\
&= \tfrac{1}{n(n+2)(1-z^2)}\left(-nz^n + n\right) - \tfrac{1}{2}z^n\\
&= \tfrac{1}{n+2}\tfrac{1-z^n}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}z^n\\
&= \Omega_n(z).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\delta_n z\Omega_{n-1}(z) - \Omega^*_{n-1}(z) = \delta_n z^2\Omega_{n-2}(z) - \Omega^*_{n-2}(z)\\
&= \tfrac{2}{n+2}z^2\left(\tfrac{1}{n}\tfrac{1-z^{n-2}}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}z^{n-2}\right) - \left(\tfrac{1}{n}\tfrac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}\right)\\
&= \tfrac{2}{n(n+2)}\tfrac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \tfrac{1}{n}\tfrac{z^2(1-z^{n-2})}{1-z^2} - \tfrac{1}{n+2}z^n + \tfrac{1}{2}\\
&= \tfrac{1}{n(n+2)(1-z^2)}\big(2z^2(1-z^{n-2}) - (n+2)z^2(1-z^{n-2}) - (1-z^2)nz^n\big) + \tfrac{1}{2}\\
&= \tfrac{1}{n(n+2)(1-z^2)}\big(-nz^2 + nz^n - nz^n + nz^{n+2}\big) + \tfrac{1}{2}\\
&= \tfrac{1}{n(n+2)(1-z^2)}\big(-nz^2(1-z^n)\big) + \tfrac{1}{2}\\
&= -\tfrac{1}{n+2}\tfrac{z^2(1-z^n)}{1-z^2} + \tfrac{1}{2}\\
&= -\Omega^*_n(z).
\end{aligned}$$

Para n impar, como $\delta_n = 0$,

$$z\Omega_{n-1}(z) - \delta_n\Omega^*_{n-1}(z) = z\Omega_{n-1}(z) = \Omega_n(z)$$

$$\delta_n z\Omega_{n-1}(z) - \Omega^*_{n-1}(z) = -\Omega^*_{n-1}(z) = -\Omega^*_n(z).$$

Acabamos de ver que los polinomios Ω_n, definidos anteriormente, con $\Omega_0(z) = -\frac{1}{2}$, satisfacen las relaciones de recurrencia dadas por (2.36). Como se sabe, tales relaciones de recurrencia caracterizan los polinomios $\Omega_n(z)$. Esto concluye la demostración. $\square$

Una vez deducida la sucesión $\{\rho_n(z)\}$ de polinomios mónicos de Szegő dada por (4.9), podemos construir los polinomios para-ortogonales $B_n(z,\tau_n) = \rho_n(z) + \tau_n\rho^*_n(z)$ con $|\tau_n| = 1$. Si tomamos $\tau_n = 1$ y $\tau_n = -1$, $\forall n$ tenemos las siguientes expresiones para los polinomios para-ortogonales:

Proposición 4.2.3

$$\begin{aligned} B_{2n}(z,1) &= \tfrac{(n+2)}{n+1}\tfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}, \\ B_{2n}(z,-1) &= \tfrac{1}{n+1}\tfrac{-n(1-z^{2n+4})+(n+2)z^2(1-z^{2n})}{(1-z^2)^2} \end{aligned} \tag{4.11}$$

y

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(z,1) &= \tfrac{(n+1)(1-z^{2n+4})+(n+2)z(1-z^{2n+2})}{(n+1)(1-z^2)(1+z)} \\ B_{2n+1}(z,-1) &= \tfrac{-(n+1)(1-z^{2n+4})+(n+2)z(1-z^{2n+2})}{(n+1)(1-z^2)(1-z)}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} B_{2n}(z,1) &= \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)z^{2k} + \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)z^{2k} \\ &= \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)+(n-k+1)\right)z^{2k} = \tfrac{n+2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} z^{2k} \\ &= \tfrac{(n+2)}{n+1}\tfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}. \end{aligned}$$

De forma análoga se tiene

$$\begin{aligned} B_{2n}(z,-1) &= \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)z^{2k} - \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)z^{2k} \\ &= \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)-(n-k+1)\right)z^{2k} \\ &= \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{i=0}^{n}(2k-n)z^{2k} \\ &= \tfrac{1}{n+1}\left(2\textstyle\sum_{k=0}^{n}k(z^2)^k - n\sum_{k=0}^{n}(z^2)^k\right) \\ &= \tfrac{1}{n+1}\tfrac{2z^2-2(n+1)z^{2n+2}+2nz^{2n+4}}{(1-z^2)^2} - n\tfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} \\ &= \tfrac{1}{n+1}\tfrac{2z^2-2(n+1)z^{2n+2}+2nz^{2n+4}-n(-z^{2n+2})(1-z^2)}{(1-z^2)^2} \\ &= \tfrac{1}{n+1}\tfrac{(n+2)z^2-(n+2)z^{2n+2}+nz^{2n+4}-n}{(1-z^2)^2} \\ &= \tfrac{1}{n+1}\tfrac{-n(1-z^{2n+4})+(n+2)z^2(1-z^{2n})}{(1-z^2)^2}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(z,1) &= \rho_{2n+1}(z)+\rho^*_{2n+1}(z) = z\rho_{2n}(z)+\rho^*_{2n}(z) \\ &= \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)z^{2k+1} + \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)z^{2k} \\ &= \tfrac{1}{n+1}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)z^{2k}\right) \\ &= \tfrac{1}{n+1}(z-1)\textstyle\sum_{k=0}^{n}k(z^2)^k + (z+1+n)\sum_{k=0}^{n}(z^2)^k \\ &= \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{(z-1)(z^2-(n+1)z^{2n+2}+nz^{2n+4})}{(1-z^2)^2} + \tfrac{(1+z)(1-z^{2n+2})}{1-z^2} + \tfrac{n(1-z^{2n+2})}{1-z^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{z^2-(n+1)z^{2n+2}+nz^{2n+4}}{(1+z)^2(z-1)} + \tfrac{1-z^{2n+2}}{1-z} + n\tfrac{1-z^{2n+2}}{(1-z)(1+z)}\right) \\ &= \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{z^2-(n+1)z^{2n+2}+nz^{2n+4}-(1+z)^2(1-z^{2n+2})-n(1+z)(1-z^{2n+2})}{(z^2-1)(1+z)}\right) \\ &= \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{(n+1)z^{2n+4}-(n+1)-(n+2)z+(n+2)z^{2n+3}}{(z^2-1)(1+z)}\right) \\ &= \tfrac{(n+1)(1-z^{2n+4})+(n+2)z(1-z^{2n+2})}{(n+1)(1-z^2)(1+z)}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_{2n+1}(z,-1) &= \rho_{2n+1}(z) - \rho^*_{2n+1}(z) = z\rho_{2n}(z) - \rho^*_{2n}(z)\\
&= \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)z^{2k+1} - \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)z^{2k}\\
&= \tfrac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)z^{2k+1} - \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)z^{2k}\right)\\
&= \tfrac{1}{n+1}(z+1)\sum_{k=0}^{n} k(z^2)^k + (z-1-n)\sum_{k=0}^{n}(z^2)^k\\
&= \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{(z+1)(z^2-(n+1)z^{2n+2}+nz^{2n+4})}{(1-z^2)^2} + \tfrac{(z-1)(1-z^{2n+2})}{1-z^2} - n\tfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}\right)\\
&= \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{z^2-(n+1)z^{2n+2}+nz^{2n+4}}{(1-z)^2(z+1)} - \tfrac{1-z^{2n+2}}{1-z} - n\tfrac{1-z^{2n+2}}{(1-z)(1+z)}\right)\\
&= \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{z^2-(n+1)z^{2n+2}+nz^{2n+4}-(z-1)^2(1-z^{2n+2})+n(z-1)(1-z^{2n+2})}{(z^2-1)(z-1)}\right)\\
&= \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{(n+1)z^{2n+4}-(n+1)+(n+2)z-(n+2)z^{2n+3}}{(z^2-1)(1+z)}\right)\\
&= \tfrac{-(n+1)(1-z^{2n+4})+(n+2)z(1-z^{2n+2})}{(n+1)(1-z^2)(1-z)}.
\end{aligned}
$$

□

De la misma manera podemos construir los polinomios, $Q_n(z,\tau_n) = \Omega_n(z) - \tau_n\Omega^*_n(z)$, tomando $\tau_n = \pm 1$, $\forall n$. En efecto, si la sucesión $\{\Omega_n\}$ es la dada por la fórmula (4.10), vale la siguiente

Proposición 4.2.4

$$
Q_{2n}(z,1) = \tfrac{n+2}{2(n+1)}(1-z^{2n}), \quad Q_{2n}(z,-1) = \tfrac{n(z^{2n+2}-1)}{2(n+1)(1-z^2)} + \tfrac{(n+2)z^2(1-z^{2n-2})}{2(n+1)(1-z^2)} \tag{4.13}
$$

y

$$
\begin{aligned}
Q_{2n+1}(z,1) &= \tfrac{z(1-z^{2n})}{2(n+1)(1+z)} + \tfrac{1}{2}(1-z^{2n+1}),\\
Q_{2n+1}(z,-1) &= \tfrac{z(1-z^{2n})}{2(n+1)(1-z)} - \tfrac{1}{2}(1+z^{2n+1}).
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
Q_{2n}(z,1) &= \left(\tfrac{1}{2n+2}\tfrac{1-z^{2n}}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}z^{2n}\right) - \left(\tfrac{1}{2n+2}\tfrac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}\right)\\
&= \tfrac{1}{2(2n+2)(1-z^2)}\left(2(1-z^{2n}) - 2z^2(1-z^{2n}) + (1-z^{2n})(2n+2)(1-z^2)\right)\\
&= \tfrac{1}{2(2n+2)(1-z^2)}\left((2n+4) - (2n+4)z^2 - (2n+4)z^{2n} + (2n+4)z^{2n+2}\right)\\
&= \tfrac{n+4}{2(2n+2)(1-z^2)}\left(1 - z^2 - z^{2n} + z^{2n+2}\right)\\
&= \tfrac{2n+4}{2(2n+2)(1-z^2)}\left((1-z^2)(1-z^{2n})\right)\\
&= \tfrac{n+2}{2(n+1)}(1-z^{2n}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{2n}(z,-1) &= \left(\tfrac{1}{2n+2}\tfrac{1-z^{2n}}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}z^{2n}\right) + \left(\tfrac{1}{2n+2}\tfrac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}\right)\\
&= \tfrac{1}{2(2n+2)(1-z^2)}\left(2(1-z^{2n}) + 2z^2(1-z^{2n}) - (1+z^{2n})(2n+2)(1-z^2)\right)\\
&= \tfrac{1}{2(2n+2)(1-z^2)}\left(-2n - (2n+4)z^2 - (2n+4)z^{2n} + 2nz^{2n+2}\right)\\
&= \tfrac{n(z^{2n+2}-1)}{2(n+1)(1-z^2)} + \tfrac{(n+2)z^2(1-z^{2n-2})}{2(n+1)(1-z^2)}.
\end{aligned}
$$

Análogamente

$$
\begin{aligned}
Q_{2n+1}(z,1) &= \Omega_{2n+1}(z) - \Omega^*_{2n+1}(z) = z\Omega_{2n}(z) - \Omega^*_{2n}(z)\\
&= z\left(\tfrac{1}{2(n+1)}\tfrac{1-z^{2n}}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}z^{2n}\right) - \left(\tfrac{1}{2(n+1)}\tfrac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}\right)\\
&= \tfrac{z(1-z^{2n}) - z^2(1-z^{2n}) + (1-z^{2n+1})(n+1)(1-z^2)}{2(n+1)(1-z^2)}\\
&= \tfrac{z(1-z^{2n})(1-z) + (1-z^{2n+1})(n+1)(1-z^2)}{2(n+1)(1-z^2)}\\
&= \tfrac{z(1-z^{2n})}{2(n+1)(1+z)} + \tfrac{1}{2}(1 - z^{2n+1}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{2n+1}(z,-1) &= \Omega_{2n+1}(z) + \Omega^*_{2n+1}(z) = z\Omega_{2n}(z) + \Omega^*_{2n}(z)\\
&= z\left(\tfrac{1}{2(n+1)}\tfrac{1-z^{2n}}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}z^{2n}\right) + \left(\tfrac{1}{2(n+1)}\tfrac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2} - \tfrac{1}{2}\right)\\
&= \tfrac{z(1-z^{2n}) + z^2(1-z^{2n}) - (1+z^{2n+1})(n+1)(1-z^2)}{2(n+1)(1-z^2)}\\
&= \tfrac{z(1-z^{2n})(1+z) - (1+z^{2n+1})(n+1)(1-z^2)}{2(n+1)(1-z^2)}\\
&= \tfrac{z(1-z^{2n})}{2(n+1)(1-z)} - \tfrac{1}{2}(1 + z^{2n+1}).
\end{aligned}
$$

□

Una vez hechos estos cálculos preliminares, estamos ahora en disposición de determinar los nodos y coeficientes de las fórmulas de Szegő. En efecto, sabemos que si $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ denotan los ceros de $B_n(z,\tau)$ entonces, los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő se pueden escribir, (recordar fórmula (3.49) del Capítulo 2) en la forma

$$\lambda_k = \frac{-1}{2\xi_k}\frac{Q_n(\xi_k,\tau)}{B_n'(\xi_k,\tau)},\ k = 1,\ldots,n. \tag{4.15}$$

De modo que si Q_n y B_n vienen dados por (4.13) y (4.11) respectivamente, para n par y $\tau = 1$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
B_n'(z,1) &= \tfrac{n+4}{n+2}\tfrac{-(n+2)z^{n+1}(1-z^2) - (1-z^{n+2})(-2z)}{(1-z^2)^2}\\
&= \tfrac{n+4}{n+2}\tfrac{-(n+2)z^{n+1} + (n+2)z^{n+3} + 2z - 2z^{n+3}}{(1+z)^2}\\
&= \tfrac{n+4}{n+2}z\left(\tfrac{2-(n+2)z^n + nz^{n+2}}{(1-z^2)^2}\right).
\end{aligned}
$$

En este caso, los nodos son $\xi_k = e^{i\theta_k} = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}},\ k = 2, ..., n+2,\ k \neq$

$\frac{n}{2}+2$. Por tanto, por fórmula (4.15), resultará:

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \frac{-1}{2e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}} \frac{\frac{1- \quad -e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}} \quad n}{2e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}\left(-(n+2)\left(e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}\right)^n+n+2\right)}}{\left(1-e^{\frac{4(k-1)\pi i}{n+2}}\right)^2} \\
&= -\frac{1}{4e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}} \frac{1-e^{\frac{2(k-1)n\pi i}{n+2}}}{(n+2)(1-e^{\frac{2(k-1)n\pi i}{n+2}})} \left(1-e^{\frac{4(k-1)n\pi i}{n+2}}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4(n+2)} \frac{1-2e^{\frac{4(k-1)\pi i}{n+2}}+e^{\frac{8(k-1)\pi i}{n+2}}}{e^{\frac{4(k-1)\pi i}{n+2}}} \\
&= -\frac{1}{4(n+2)}\left(-2+2\Re\left(e^{\frac{4(k-1)\pi i}{n+2}}\right)\right) \\
&= \frac{1-\cos \ \frac{4(k-1)\pi}{n+2}}{2(n+2)} = \frac{2\pi\omega_3(\theta_k)}{n+2}.
\end{aligned}$$

En resumen, hemos probado el siguiente

TEOREMA 4.1 *Los coeficientes de la $n-$ésima fórmula de cuadratura de Szegő para n par y $\tau_n = 1$, con respecto a la función peso $\omega_3(\theta) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\pi}$, son:*

$$\lambda_k = \frac{2\pi\omega_3(\theta_k)}{n+2}, \quad k = 2, ..., n+2, \ k \neq \frac{n}{2}+2$$

viniendo los nodos dados explícitamente por $\xi_k = e^{i\theta_k} = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n+2}}$, $k = 2, ..., n+2$, $k \neq \frac{n}{2}+2$.

OBSERVACIÓN 27 *Téngase en cuenta que la correspondiente $n-$ésima fórmula de Szegő calculada anteriormente se puede escribir como:*

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega_3(\theta)d\theta &\approx \sum_{k=2,k\neq\frac{n}{2}+2}^{n+2} \lambda_k f(e^{i\theta_k}) \\
&= \sum_{k=2,k\neq\frac{n}{2}+2}^{n+2} \frac{2\pi\omega_3(\theta_k)}{n+2} f(e^{i\theta_k}) \\
&= \frac{2\pi}{n+2}\sum_{k=1}^{n+2} f(e^{i\theta_k})\omega_3(\theta_k)
\end{aligned}$$

con $\theta_k = \frac{2(k-1)\pi}{n+2}$, $k = 1, \ldots, 2n+2$.

Vemos pues que la $n-$ésima fórmula de Szegő con respecto a ω_3 coincide con la $(n+2)-$ésima fórmula de Szegő respecto a la medida de Lebesgue, si consideramos todo el integrando $f(e^{i\theta})\omega_3(\theta)$.

Como para el resto de las funciones peso de Chebyshev normalizadas, es decir, $\omega_1(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ y $\omega_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2\pi}$, los cálculos son muy parecidos a los efectuados para $\omega_3(\theta)$, los omitiremos y expondremos sólo los resultados directamente.

En la Tabla 1 se puede ver la expresión de los polinomios de Szegő $\rho_n(z)$ y de los asociados $\Omega_n(z)$ con respecto a $\omega_1(\theta)$ y $\omega_2(\theta)$, respectivamente,

Tabla1	
$\rho_n(z)$	$\Omega_n(z)$
$\rho_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1) z^k$	$\Omega_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1+(-1)^{n-1} z^n}{1+z} - z^n$
$\rho_n(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (k+1) z^k$	$\Omega_n(z) = \frac{1}{n+1} \frac{1-z^n}{1-z} - z^n$

Observación 28 *Procediendo de igual forma que en la demostración de la Proposición 3.1 , se puede comprobar que*

$$< \rho_n(z), z^k >_{\omega_j} = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \ j = 1, 2.$$

Los polinomios para-ortogonales $B_n(z,\tau)$ y los asociados $Q_n(z,\tau)$, $(|\tau| = 1)$, se han calculado para $\tau = \pm 1$. Los resultados se muestran en las Tablas 2 y 3:

Tabla2	
$\omega(\theta)$	$B_n(z,\tau)$
$\omega_1(\theta)$	$B_n(z,(-1)^n) = \frac{(-1)^n (n+2)}{n+1} \frac{1+(-1)^n z^{n+1}}{1+z}$ $B_n(z,(-1)^{n+1}) = \frac{1}{n+1} \frac{n(z^{n+2}-(-1)^n)+(n+2)z(z^n-(-1)^n)}{(1+z)^2}$
$\omega_2(\theta)$	$B_n(z,1) = \frac{(n+2)}{n+1} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ $B_n(z,-1) = \frac{1}{n+1} \frac{n(z^{n+2}-1)-(n+2)z(z^n-1)}{(1-z)^2}$

Tabla3	
$\omega(\theta)$	$Q_n(z,\tau)$
$\omega_1(\theta)$	$Q_n(z,(-1)^n)=\frac{(-1)^n(n+2)}{n+1}(1-z^n)$ $Q_n(z,(-1)^{n+1})=\frac{(-1)^n n(1-(-1)^{n+1}z^{n+1})}{(n+1)(1-z)}+\frac{(-1)^n(n+2)z(1+(-1)^n z^{n-1})}{(n+1)(1+z)}$
$\omega_2(\theta)$	$Q_n(z,1)=\frac{n+2}{n+1}(1-z^n)$ $Q_n(z,-1)=\frac{n(z^{n+1}-1)}{(n+1)(1-z)}+\frac{(n+2)z(1-z^{n-1})}{(n+1)(1-z)}$

Si en las fórmulas de Szegő para la función peso ω_1, tomamos $\tau=(-1)^n$ y tenemos en cuenta la sencillez de las expresiones para $B_n(z,(-1)^n)$ y $Q_n(z,(-1)^n)$, obtenemos el siguiente teorema donde se dan, tanto los nodos como los coeficientes de la fórmula de cuadratura de Szegő con respecto a dicha función peso:

Teorema 4.2 *Los coeficientes de la $n-$ésima fórmula de cuadratura de Szegő con respecto a la función peso $\omega_1(\theta)=\frac{1+\cos\theta}{2\pi}$ tomando $\tau_n=(-1)^n$ son:*

$$\lambda_k=\begin{cases}\frac{2\pi}{n+1}\omega_1(\theta_k) & \text{si } n \text{ es impar},\ 1\le k\le n+1,\ k\neq\frac{n+1}{2}+1\\ \frac{2\pi}{n+1}\omega_1(\theta_k) & \text{si } n \text{ es par},\ 1\le k\le n+1,\ k\neq\frac{n}{2}+1\end{cases}$$

y los nodos vienen dados por $\xi_k=e^{i\theta_k}$ siendo

$$\theta_k=\begin{cases}\frac{2(k-1)\pi}{n+1} & \text{si } n \text{ es impar},\ 1\le k\le n+1,\ k\neq\frac{n+1}{2}+1\\ \frac{(2k-1)\pi}{n+1} & \text{si } n \text{ es par},\ 1\le k\le n+1,\ k\neq\frac{n}{2}+1.\end{cases}\tag{4.16}$$

Si para la función peso ω_2 elegimos $\tau=1$, tendremos el siguiente

Teorema 4.3 *Los coeficientes de la $n-$ésima fórmula de cuadratura de Szegő con respecto a la función peso $\omega_2(\theta)=\frac{1-\cos\theta}{2\pi}$ y $\tau_n=1$ son:*

$$\lambda_k=\frac{2\pi}{n+1}\omega_2(\theta_k)$$

y los nodos son $\xi_k=e^{i\theta_k}$ con $\theta_k=\frac{2(k-1)\pi}{n+1},\ k=1,\dots,n.$

Finalmente, digamos que para estas dos funciones peso, ω_1 y ω_2, se puede obtener un resultado análogo al dado en la observación 27.

Ejercicio: Comprobar que la transformada de Herglotz-Riesz para ω_1, ω_2 y ω_3 viene dada, respectivamente, por:

$$F_{\omega_1}(z) = \begin{cases} 1+z & \text{si} \quad |z| < 1 \\ -\frac{1+z}{z} & \text{si} \quad |z| > 1, \end{cases}$$

$$F_{\omega_2}(z) = \begin{cases} 1-z & \text{si} \quad |z| < 1 \\ \frac{1-z}{z} & \text{si} \quad |z| > 1, \end{cases}$$

y

$$F_{\omega_3}(z) = \begin{cases} \frac{1-z^2}{2} & \text{si} \quad |z| < 1 \\ \frac{1-z^2}{2z^2} & \text{si} \quad |z| > 1. \end{cases}$$

4.3. Funciones peso de signo variable

En los capítulos precedentes, al referirnos a una integral "pesada" de la forma $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta$, sobre la circunferencia unidad, ó $I_\sigma(f) = \int_a^b f(x)\sigma(x)dx$, sobre el eje real, siempre hemos supuesto que tanto $\omega(\theta)$ como $\sigma(x)$ eran funciones peso, recordando con ello, por ejemplo en la circunferencia unidad que $\omega(\theta) \geq 0$, $\forall\theta \in [-\pi, \pi]$ y que $\int_{-\pi}^{\pi}\omega(\theta)d\theta > 0$. También vimos que en la construcción de fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión "algebraica" o "trigonométrica" jugaban un papel esencial ciertos polinomios que satisfacían condiciones de ortogonalidad respecto al producto interior generado por la correspondiente función peso. En esta sección nos vamos a ocupar de construir fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad, esto es, expresiones de la forma

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j),\ x_i \neq x_j,\ \forall i \neq j,\ x_j \in \mathbb{T},\ 1 \leq j \leq n, \tag{4.17}$$

que permitan "estimar", en algún sentido, la integral

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta, \tag{4.18}$$

donde ahora $\omega(\theta)$ ya no es una función peso, sino que puede cambiar de signo en $[-\pi,\pi]$ o incluso, más generalmente, $\omega(\theta)$ podría tomar valores complejos. Dado que a $I_n(f)$ le vamos a seguir exigiendo "exactitud" sobre ciertos subespacios de polinomios de Laurent, impondremos como hipótesis básicas sobre $\omega(\theta)$ que sea L_1-integrable en $[-\pi,\pi]$ y que las integrales

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta, \tag{4.19}$$

sean "fácilmente calculables" para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Claramente, ahora el "producto" asociado a $\omega(\theta)$:

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\overline{g\left(e^{i\theta}\right)}\omega(\theta)d\theta,$$

ya no es "interior" y aunque podríamos hablar de "ortogonalidad formal", nada puede asegurarse , en general, sobre la existencia de sucesiones de polinomios ortogonales y mucho menos sobre localización de los ceros de los mismos, como ocurría cuando $\omega(\theta)$ era una función peso positiva.

Por otro lado, pudiera suceder que $\omega(\theta)$ fuese propiamente una función peso, pero con una forma tal que el cálculo de los polinomios ortogonales (polinomios de Szegő) y posterior computación de ceros de los correspondientes polinomios para-ortogonales , implicase un proceso computacional altamente costoso y probablemente inestable, de modo que cabría pensarse en rebajar el dominio de exactitud a fin de estimar (4.18) con otras fórmulas que fueran más fácilmente computable. Tanto para un caso como para otro, en relación a $\omega(\theta)$, tenemos las llamadas fórmulas de "tipo interpolatorio", introducidas ya en el Capítulo 3, en relación a la aproximación de la Transformada de Herglotz-Riesz de $\omega(\theta)$.

Sean pues, $x_1, \ldots, x_n$, n nodos distintos situados sobre $\mathbb{T}$, dado que $\Delta_{-p,q}$, con p y q enteros no negativos verificando $p + q = n - 1$, es un subespacio de Chebyshev de Δ de dimensión n, se puede probar fácilmente la siguiente (hágase como ejercicio):

PROPOSICIÓN 4.3.1 *Sea $\omega(\theta)$ una función L_1-integrable en $[-\pi,\pi]$ y sean $x_1, \ldots, x_n$, n nodos distintos sobre $\mathbb{T}$. Entonces, existen números* *complejos $A_1, \ldots, A_n$, unívocamente determinados tales que*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) = I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta, \ \forall f \in \Delta_{-p,q}.$$

Por otro lado, dados los nodos $x_1, \ldots, x_n, \ \ x_i \neq x_j, \ \forall i \neq j, \ x_j \in \mathbb{T}, \ 1 \leq j \leq n$, sabemos que existe un único polinomio de Laurent $L_n(f,z) \in \Delta_{-p,q}$, tal que

$$L_n(f, x_j) = f(x_j), \ 1 \leq j \leq n.$$

Además, se tiene que

$$L_n(f,z) = \sum_{j=1}^{n} l_j(z) f(x_j),$$

siendo $l_j \in \Delta_{-p,q}$, tal que $l_j(x_k) = \delta_{j,k}$.

Ejercicio: *Sea $Q_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - x_j)$ (polinomio nodal), pruébese entonces que:*

$$l_j(z) = \frac{x_j^p}{z^p} \frac{Q_n(z)}{(z - x_j) Q_n'(x_j)}, \ j = 1, \ldots, n. \tag{4.20}$$

Por consiguiente,

$$I_\omega\left(L_n(f,.)\right) = \sum_{j=1}^{n} I_\omega(l_j) f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{A}_j f(x_j) = \widetilde{I}_n(f)$$

Además, puesto que $\forall f \in \Delta_{-p,q}$, se cumple que $L_n(f,z) = f(z)$, la fórmula de cuadratura $\widetilde{I}_n(f)$ definida anteriormente es exacta en $\Delta_{-p,q}$ y la denominaremos de "tipo interpolatorio en $\Delta_{-p,q}$", pudiéndose comprobar la siguiente:

Proposición 4.3.2 *Una fórmula de cuadratura*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j), \ x_i \neq x_j, \ \forall i \neq j, \ x_j \in \mathbb{T}, \ 1 \leq j \leq n,$$

es exacta en $\Delta_{-p,q}$, $(p + q = n - 1)$, sí y sólo si, $I_n(f)$ es de tipo interpolatorio en $\Delta_{-p,q}$.

Veamos pues, que tenemos la "libertad" de elegir nodos sobre $\mathbb{T}$, generando fórmulas de cuadraturas exactas en subespacios de dimensión n, frente a las fórmulas de Szegő (cuando se pudieran construir) que son exactas en $\Delta_{-(n-1),n-1}$ (dimensión $2n-1$). La pregunta que surge es: ¿Cómo elegir los nodos para que $I_n(f)$ sea efectivamente una "buena estimación" de $I_\omega(f)$? En general, dada una tabla triangular de nodos sobre $\mathbb{T}: X = \{x_{j,n}: \ x_{i,n} \neq x_{k,n}, \ \forall i \neq k\}_{j=1}^{n}, \ (n \in \mathbb{N})$, de forma que, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} f(x_{j,n}) = I_\omega(f), \ \forall f \in \Delta_{-p,q}, \tag{4.21}$$

(p y q enteros no negativos dependientes de n tales que $p+q=n-1$), vamos exigir a $I_n(f)$ las siguientes propiedades:

1. Estabilidad: $\{I_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ dada por (4.19), se dirá estable, sí y sólo si, $\exists M > 0: \ \forall n \geq 1, \ \sum_{j=1}^{n} |A_{j,n}| \leq M$.

2. Convergencia: $\{I_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ se dirá convergente en una cierta clase G de funciones definidas sobre $\mathbb{T}$, sí y sólo si,

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = I_\omega(f), \ \forall f \in G.$$

Vamos a denotar ahora por $\mathcal{C}(\mathbb{T}) = \{f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}; \ f \text{ continua}\}$. Entonces, se tiene que cuando $G = \mathcal{C}(\mathbb{T})$, "estabilidad" y "convergencia" son conceptos equivalentes, como se probará en el siguiente teorema. A tal efecto, en lo que sigue $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q(n)\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones crecientes de enteros no negativos cumpliendo:

1. $p(n) + q(n) = n-1, \ n = 1, 2, \ldots, \ (p(1) = q(1) = 0)$.

2. $\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} q(n) = \infty$.

Como consecuencia del Teorema de Banach- Steinhauss, se tiene:

Teorema 4.4 *Sea* $\mathbb{X}$ *una tabla triangular de nodos sobre* $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{X} = \{x_{j,n}: \ x_{i,n} \neq x_{k,n}, \ \forall i \neq k\}_{j=1}^{n}, \ (n \in \mathbb{N}),$$

y sea

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} f(x_{j,n}) = I_\omega(f), \ \forall f \in \Delta_{-p(n),q(n)}.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = I_\omega(f),\ \forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \exists M > 0 :\ \forall n \geq 1,\ \sum_{j=1}^{n} |A_{j,n}| \leq M.$$

Demostración: "$\Leftarrow$" Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Dado $\epsilon > 0$, sabemos que existe (Teorema de Weierestrass) $T_N \in \Delta_{-N,N}$ tal que

$$|f(x) - T_N(x)| < \epsilon,\ \forall x \in \mathbb{T}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} q(n) = \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$: $\min\{p(n), q(n)\} > N$. Por consiguiente, $T_N \in \Delta_{-p(n),q(n)}$ y se cumple: $I_n(T_N) = I_\omega(T_N)$. Entonces, $\forall n > n_0$:

$$\begin{aligned} |I_\omega(f) - I_n(f)| &= |I_\omega(f) - I_\omega(T_N) + I_n(T_N) - I_n(f)| \\ &\leq |I_\omega(f) - I_\omega(T_N)| + |I_n(T_N) - I_n(f)| \\ &\leq I_\omega\left(|f - T_N|\right) + I_n\left(|f - T_N|\right) < \left(|\mu_0| + M\right)\epsilon, \end{aligned}$$

siendo $\mu_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta) d\theta$.

"$\Rightarrow$" Aplíquese el Teorema de Banach- Steinhauss.

$\square$

Observación 29 *Del Teorema 4.4, se puede observar que, dada la tabla* $\mathbb{X}$, *la condición* $\sum_{j=1}^{n} |A_{j,n}| \leq M$ *no es fácilmente constatable, de ahí que dicho teorema no resulte, en principio, de mucha utilidad práctica. En la línea de solventar este tipo de dificultades, damos el siguiente teorema que es una versión, sobre la circunferencia unidad, del famoso Teorema de Erdös-Turan, relativo a la convergencia en norma* L_2 *para sucesiones de polinomios interpolantes en los ceros de polinomios ortogonales.*

Teorema 4.5 *Sea* $\nu(\theta)$ *una función peso positiva en* $[-\pi, \pi]$ *y sea* $\{\tau_n\}_n \subset \mathbb{T}$. *Sea* $L_n(f, z)$ *el polinomio de Laurent en* $\Delta_{-p(n),q(n)}$ *que interpola a la función* $f(z)$ *en los ceros* $\{z_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ *del polinomio para-ortogonal respecto a* $\nu(\theta)$:

$$B_n(z) = \rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z),\ n = 1, 2, \ldots.$$

Entonces, $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(f, .)\|_\nu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(e^{i\theta}\right) - L_n\left(f, e^{i\theta}\right) \right|^2 \nu(\theta) d\theta \right)^{1/2} = 0.$$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Dado $\epsilon > 0$, $\exists T_N \in \Delta_{-N,N}$ tal que

$$|f(x) - T_N(x)| < \epsilon, \; \forall x \in \mathbb{T}.$$

Procediendo de modo análogo a la demostración del Teorema 4.4, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : T_N \in \Delta_{-p(n),q(n)}$ y por consiguiente,

$$T_N(x) = L_n(T_n, x).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|f - L_n(f,.)\|_\nu &\leq \|f - T_N\|_\nu + \|T_N - L_n(f,.)\|_\nu \\ &= \|f - T_N\|_\nu + \|L_n(T_N - f,.)\|_\nu.\end{aligned}$$

Ahora bien, claramente

$$\|f - L_n(f,.)\|_\nu < \epsilon\sqrt{c_0}, \tag{4.22}$$

donde $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\nu(\theta)d\theta, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$L_n(T_N - f, x) = \sum_{j=1}^{n} l_{j,n}(x)(T_N - f)(x_{j,n}),$$

con $l_{j,n} \in \Delta_{-p(n),q(n)}$, $l_{j,n}(x_{k,n}) = \delta_{j,k}$, $\left(x = e^{i\theta}\right)$, podemos escribir:

$$\begin{aligned}&\|L_n(f - T_N,.)\|_\nu^2 = \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |L_n(T_N - f, x)|^2 \nu(\theta)d\theta = \\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{j=1}^{n} l_{j,n}(x)(T_N - f)(x_{j,n})\right|^2 \nu(\theta)d\theta = \\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{n} l_{j,n}(x)(T_N - f)(x_{j,n}) \sum_{j=1}^{n} \overline{l_{j,n}(x)(T_N - f)(x_{j,n})}\nu(\theta)d\theta = \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} l_{j,n}(x)\overline{l_{k,n}(x)}(T_N - f)(x_{j,n})\overline{(T_N - f)(x_{k,n})}\nu(\theta)d\theta.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Denotemos por $\widetilde{I}_n(f)$ la fórmula de Szegő para $I_\nu(f)$ con nodos, los ceros $\{z_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ de

$$B_n(z) = \rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z), \; n = 1, 2, \ldots,$$

y escribamos, $\forall f \in \Delta_{-(n-1),n-1}$:

$$\widetilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n} f(z_{j,n}) = I_\nu(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \nu(\theta) d\theta,$$

siendo $\lambda_{j,n} > 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Por otro lado, obsérvese que

$$l_{j,n}(x)\overline{l_{k,n}(x)} \in \Delta_{-(n-1),n-1},\ j,k = 1, \ldots, n,$$

y en consecuencia, haciendo $\beta_j = (T_N - f)(x_{j,n}),\ j = 1, \ldots, n$, resulta, $\forall j,k = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} l_{j,n}(x)\overline{l_{k,n}(x)}\beta_j\overline{\beta}_k\nu(\theta)d\theta &= \beta_j\overline{\beta}_k \textstyle\sum_{r=1}^{n} \lambda_{r,n} l_{j,n}(x)\overline{l_{k,n}(x)} \\ &= |\beta_j|^2\lambda_{j,n}\delta_{j,k}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Así, de (4.23) y (4.24), podemos establecer

$$\begin{aligned} \|L_n(T_N - f, .)\|_\nu^2 &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n} \left| f(x_{j,n}) - T_N(x_{j,n})\right|^2 \nu(\theta)d\theta \\ &< \epsilon^2 \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n} = \epsilon^2 \int_{-\pi}^{\pi} \nu(\theta)d\theta = \epsilon^2 c_0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Concluimos pues, de (4.22) y (4.25) que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0$:

$$\|f - L_n(f, .)\|_\nu < 2\sqrt{c_0}\epsilon,$$

culminando así la demostración. □

Vemos pues, que podemos introducir una función peso auxiliar $\nu(\theta)$ de modo que los ceros de la sucesión de polinomios para-ortogonales e invariantes nos proporcionan una tabla triangular $\mathbb{X}$ de nodos. En el siguiente teorema se probará que la sucesión de fórmulas de tipo interpolatorio asociados a dicha tabla $\mathbb{X}$ es convergente en la clase de las funciones continuas sobre $\mathbb{T}$.

Teorema 4.6 *Sea $\omega(\theta)$ una función peso, posiblemente compleja y $\nu(\theta)$ una función peso positiva, ambas definidas en $[-\pi, \pi]$ y supongamos que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\nu(\theta)|^2}{\omega(\theta)} d\theta = K < +\infty. \tag{4.26}$$

Sea $B_n(z) = \rho_n(z) + \tau_n,\ (|\tau_n| = 1)$ *para-ortogonal con respecto a* $\nu(\theta)$ *e invariante y sean* $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ *sus ceros para* $n = 1, 2, \ldots$. *Sea* $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} f(x_{j,n})$ *la fórmula de cuadratura con tales ceros y de tipo interpolatorio en* $\Delta_{-p(n),q(n)}$, *siendo* $\{p(n)\}$ *y* $\{q(n)\}$ *sucesiones de enteros no negativos tales que* $p(n) + q(n) = n - 1,\ n = 1, 2, \ldots$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} q(n) = \infty.$$

Entonces, $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} f(x_{j,n}) = I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta. \tag{4.27}$$

Demostración: Recordar que $I_\omega(f) = I_\omega\left(L_n(f,.)\right)$, siendo $L_n(f,x) \in \Delta_{-p(n),q(n)}$ que interpola a f en los nodos $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n}$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} |I_\omega(f) - I_n(f)| &\le I_\omega\left(|f - L_n(f,.)|\right) \\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right) - L_n\left(f, e^{i\theta}\right)\right| |\omega(\theta)| d\theta \\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right) - L_n\left(f, e^{i\theta}\right)\right| \sqrt{\nu(\theta)} \frac{|\omega(\theta)|}{\sqrt{\nu(\theta)}} d\theta. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, resultará

$$\begin{aligned} |I_\omega(f) - I_n(f)| &\le \left(\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right) - L_n\left(f, e^{i\theta}\right)\right|^2 \nu(\theta) d\theta\right)^{1/2} \left(\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\omega(\theta)|^2}{\nu(\theta)} d\theta\right)^{1/2} \\ &\le \sqrt{K} \|f - L_n(f,.)\|_\nu. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 4.5:

$$|I_\omega(f) - I_n(f)| \to 0.$$

□

Del Teorema 4.6 y el Teorema de Banach- Steinhauss, se deduce el siguiente:

COROLARIO 4.1 *Bajo las mismas condiciones del Teorema 4.6,* $\exists M > 0 : \forall n \ge 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} |A_{j,n}| \le M.$$

Como una aplicación de los resultados anteriores, también podemos deducir la convergencia de la sucesión de aproximantes tipo-Padé en dos puntos $(p(n)/n)_{F_\omega}(z) = \frac{Q_n(z)}{B_n(z)}$ a la Transformada de Herglotz-Riesz de la función $\omega(\theta)$. Podemos enunciar el siguiente:

Teorema 4.7 *Bajo las mismas condiciones del Teorema 4.6, se verifica:*

$$\lim_{n\to\infty} (p(n)/n)_{F_\omega}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n(z)}{B_n(z)} = F_\omega(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\omega(\theta)d\theta,$$

uniformemente en compactos de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$.

Demostración: Recordar que $(p(n)/n)_{F_\omega}(z)$ admite la siguiente descomposición:

$$(p(n)/n)_{F_\omega}(z) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,n}\left(\frac{z+x_{j,n}}{z-x_{j,n}}\right),$$

siendo $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ los ceros de $B_n(z) = \rho_n(z) + \tau_n\rho_n^*(z)$, $(|\tau_n| = 1)$ y $\{A_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ los coeficientes de la correspondiente fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio en $\Delta_{-p(n),q(n)}$, esto es,

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} f(x_{j,n}).$$

Por consiguiente: $(p(n)/n)_{F_\omega}(z) = I_n\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)$.

Ahora se procede como en la demostración del Teorema 3.23 del Capítulo 3. Los detalles se dejan para el lector. □

Al propio tiempo, se pueden dar estimaciones de la velocidad de convergencia. Sea pues, $E_n(z) = F_\omega(z) - (p(n)/n)_{F_\omega}(z)$, $z \notin \mathbb{T}$. Entonces, se cumple

Teorema 4.8 *Bajo las condiciones del Teorema 4.6, sea* $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$, *compacto, entonces:*

$$\limsup_{n\to\infty} \|E_n\|_K^{1/n} \le \rho < 1,$$

con $\|E_n\|_K = \max_{z\in K} |E_n(z)|$. *Aquí:* $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$, *siendo:*

$$\rho_1 = \max\{|z|^r : z \in K \bigcap \mathbb{D}\}, \quad \rho_2 = \max\{|z|^{r-1} : z \in K \bigcap \mathbb{E}\},$$

y $r = \lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n}$, *donde hemos supuesto que* $0 < r < 1$.

Demostración: Utilizando la expresión obtenida en el Capítulo 3 para $E_n(z)$, (véase relación (3.69)), podemos escribir, para $z \in K$:

$$E_n(z) = \frac{z^{p(n)}}{B_n(z)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{-(p(n)-1)} B_n(x)}{x - z} \omega(\theta) d\theta, \; x = e^{i\theta}.$$

Así: $|E_n(z)| \leq \frac{|z|^{p(n)}}{|B_n(z)|} \frac{M_n}{dis(K, \mathbb{T})}$, con $M_n = \text{máx}_{z \in \mathbb{T}} |B_n(z)|$.

Procediendo como en la demostración del Teorema 3.25 del Capítulo 3, se obtiene el resultado. Los detalles se dejan para el lector. $\square$

El Teorema 4.8 nos va a permitir dar estimaciones de la velocidad de convergencia de las sucesiones de fórmulas de cuadratura estudiadas en el Teorema 4.6, cuando consideramos integrandos analíticos. En efecto, procediendo como en la demostración del Teorema 3.25, tenemos:

COROLARIO 4.2 *Sea* $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta$, *siendo* $\omega(\theta)$ *una función peso (posiblemente compleja y* L_1-*integrable) y* f *analítica en una región* G *que contiene a* $\mathbb{T}$ *con* $\Gamma = \partial G$, *(frontera). Sean* $\{p(n)\}$ *y* $\{q(n)\}$ *sucesiones crecientes de enteros no negativos tales que* $p(n) + q(n) = n - 1, \; n = 1, 2, \ldots,$

$$\lim_{n \to \infty} p(n) = \lim_{n \to \infty} q(n) = \infty,$$

y $\lim_{n \to \infty} \frac{p(n)}{n} = r$, *(*$0 < r < 1$*). Sea* $\nu(\theta)$ *una función peso positiva tal que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\omega(\theta)|^2}{\nu(\theta)} d\theta < +\infty,$$

y sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} f(x_{j,n})$ *una fórmula de cuadratura para* $I_\omega(f)$ *de tipo interpolatorio en* $\Delta_{-p(n),q(n)}$, *siendo* $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n}$, *los ceros de* $B_n(z)$ *de grado* n, *para-ortogonal respecto a* $\nu(\theta)$ *e invariante. Entonces:*

$$\lim_{n \to \infty} |R_n(f)|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} |I_\omega(f) - I_n(f)|^{1/n} \leq \rho < 1,$$

siendo $\rho = \text{máx}\{\rho_1, \rho_2\}$, *con:*

$$\rho_1 = \text{máx}\{|z|^r : \; z \in \Gamma \bigcap \mathbb{D}\}, \quad \text{y} \quad \rho_2 = \text{máx}\{|z|^{r-1} : \; z \in \Gamma \bigcap \mathbb{E}\},$$

OBSERVACIÓN 30 *Si por ejemplo, se desea una distribución "balanceada" (equilibrada) de potencias "positivas"* $(p(n))$ *y "negativas"* $(q(n))$ *en* *los correspondientes subespacios $\Delta_{-p(n),q(n)}$, de polinomios de Laurent, podríamos escoger $p(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$ ($q(n) = n - p(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right]$) que satisfacen todas las exigencias del Corolario 4.2, con*

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} = \frac{1}{2}.$$

Si comparamos la estimación de la velocidad de convergencia para las fórmulas de Szegő (dada por r en el Teorema 4.8) con la estimación para las de tipo interpolatorio dada por ρ en el Corolario 4.2, vemos que se cumple $r = \rho^2$, constatando así la mayor velocidad de convergencia de las de Szegő frente a las de tipo interpolatorio.

Ahora cabría preguntarse acerca de la existencia de funciones "peso" positivas $\nu(\theta)$ en $[-\pi, \pi]$, que proporcionen nodos interpolatorios $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ con el menor esfuerzo computacional posible ($\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ dados explícitamente o fácilmente calculables, al menos).

Como ya hemos ilustrado en el Capítulo 3, una respuesta positiva viene dada en términos de la función peso positiva más simple que uno pudiera imaginar, esto es, $\nu(\theta) = 1$, $\forall\theta \in [-\pi, \pi]$, ya que en ese caso $\rho_n(z) = z^n$ y $B_n(z) = z^n + \tau_n$ con $\tau_n \in \mathbb{T}$. Así, los nodos $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ serán rotaciones de las raíces de la unidad. Denotando por $\{\mu_k\}_{-\infty}^{\infty}$ la sucesión de momentos trigonométricos respecto a $\omega(\theta)$, es decir, $\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\omega(\theta)d\theta$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos deducir, para los pesos, la siguiente expresión:

PROPOSICIÓN 4.3.3 *Sea $\tau \in \mathbb{T}$ y sean $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ las raíces de la ecuación $z^n - \tau = 0$. Entonces, los pesos de la fórmula de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ de tipo interpolatorio en $\Delta_{-p,q}$, ($p + q = n - 1$) para $I_\omega(f)$, vienen dados por*

$$A_j = \frac{1}{n} \sum_{j=-p}^{q} x_j^{-k}\mu_{-k} = \frac{1}{n} \sum_{j=-q}^{p} x_j^{k}\mu_k,\ j = 1, \ldots, n.$$

Demostración: Si denotamos por $B_n(z) = z^n - \tau$, el polinomio nodal, entonces, para todo $j = 1, \ldots, n$, y $x = e^{i\theta}$, por (4.20), sigue:

$$A_j = \frac{x_j^p}{B_n'(x_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_n(x)}{x^p(x - x_j)}\omega(\theta)d\theta,$$

lo cual implica

$$A_j = \frac{x_j^p}{n x_j^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n - \tau}{x^p(x - x_j)} \omega(\theta) d\theta = \frac{x_j^{-q}}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n - x_j^n}{x^p(x - x_j)} \omega(\theta) d\theta.$$

Ahora bien, $\frac{x^n - x_j^n}{x^p(x-x_j)} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_j^k = \sum_{k=-p}^{q} x_j^{q-k} x^k$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} A_j &= \tfrac{x_j^{-q}}{n} \textstyle\sum_{k=-p}^{q} x_j^{q-k} \int_{-\pi}^{\pi} x^k \omega(\theta) d\theta = \tfrac{1}{n} \sum_{k=-p}^{q} x_j^{-k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \omega(\theta) d\theta \\ &= \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=-p}^{q} x_j^{-k} \mu_{-k} = \tfrac{1}{n} \sum_{k=-q}^{p} x_j^k \mu_k. \end{aligned}$$

□

Observación 31 *Si suponemos $\omega(\theta)$ real y n impar, por ejemplo $n = 2m+1$ y tomamos $p = q = m$, entonces, dado que ahora los momentos $\{\mu_k\}$ satisfacen $\mu_k = \overline{\mu}_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$, para los pesos tenemos la siguiente representación:*

$$A_j = \frac{2}{n} \left(\frac{\mu_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \Re \left(\mu_k x_j^k \right) \right), \ j = 1, \ldots, n.$$

Finalmente, cabría considerar la posibilidad de tomar como función peso en la integral $I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta$, la idénticamente igual a uno, siendo el integrando $f\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) = F\left(e^{i\theta}\right)$, es decir

$$I_\omega(f) = I(F) = \int_{-\pi}^{\pi} F\left(e^{i\theta}\right) d\theta,$$

y aproximar ésta última mediante una fórmula de Szegő. El problema radica en que normalmente $\omega(\theta)$ suele contener singularidades en los extremos del intervalo de integración y eso conlleva que la fórmula de Szegő, o bien no se pudiera aplicar, o que su convergencia fuese extremadamente lenta. Con carácter ilustrativo, se podrían realizar diversos experimentos numéricos considerando la integral de Poisson:

$$\rho(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2) f\left(e^{i\theta}\right)}{1 - 2r\cos(\theta + \varphi) + r^2} d\theta, \ 0 \leq r < 1, \ \varphi \in [-\pi, \pi]. \tag{4.28}$$

(Recuérdese que una función ρ que satisface la ecuación de Laplace en cada punto $z \in \mathbb{D}$ (o sea, es armónica) y toma el valor presente $f\left(e^{i\theta}\right)$ sobre $\mathbb{T}$, está dada por (4.28)).

Obsérvese que, haciendo $\alpha = re^{i\varphi}$, podemos poner

$$\rho(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)f\left(e^{i\theta}\right)}{|e^{i\theta}-\alpha|^2} d\theta,$$

y que, cuando $r \approx 1$, α está muy próximo a $\mathbb{T}$, es decir, que tenemos que integrar en presencia de singularidades.

Se proponen tres procedimientos para estimar (4.28)):

1. Considerar la función peso $\omega(\theta) = 1,\ \theta \in [-\pi,\pi]$ e integrar mediante una fórmula de Szegő, (Regla Trpezoidal).

2. Tomar $\omega(\theta) = \frac{(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta+\varphi)+r^2}$ y considerar una fórmula de Szegő para tal función peso.

3. Tomar $\omega(\theta)$ como en el caso anterior y utilizar una fórmula de tipo interpolatorio con nodos, las raíces de la unidad o rotaciones de éstas.

Concluimos esta sección extendiendo los resultados de convergencia de las sucesiones de fórmulas de cuadratura introducidas en el Teorema 4.6 a la clase de las funciones integrables sobre la circunferencia unidad. En efecto, con la ayuda del Teorema 1.16 del Capítulo 1 (Sección 1.5), podemos extender el Teorema 4.5 (Erdös-Turan) a la clase de las funciones integrables sobre $\mathbb{T}$, como queda constatado en el siguiente:

Teorema 4.9 *Sea $\nu(\theta)$ una función peso sobre $[-\pi,\pi]$ y sea $\{B_n(z) = B_n(z,\tau_n) = \rho_n(z) + \tau_n\rho_n^*(z)\}_{n=1}^{\infty}$, $(|\tau_n| = 1)$ una sucesión de polinomios para-ortogonales respecto a $\nu(\theta)$ e invariantes. Sean $\{z_{j,n}\}_{j=1}^{n}$ los ceros de $B_n(z)$ ($z_{i,n} \neq z_{k,n}$, $\forall i \neq k$ y $\{z_{j,n}\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{T}$) y denotemos por $L_n(f,z)$ el polinomio de Laurent en $\Delta_{-p(n),q(n)}$ que interpola a una función f definida sobre $\mathbb{T}$. Aquí $\{p(n)\}$ y $\{q(n)\}$ son dos sucesiones de enteros no negativos tales que $p(n)+q(n) = n-1,\ n = 1,2,\ldots$ y*

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} q(n) = \infty.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(f,.)\|_\nu = 0,$$

siendo f acotada y tal que $f(\theta)\nu(\theta)$ es integrable sobre $[-\pi,\pi]$.

Demostración:

$$\begin{aligned}\|f-L_n(f,.)\|_\nu^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)-L_n\left(f,e^{i\theta}\right)\right|^2\nu(\theta)d\theta\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\nu(\theta)d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}\left|L_n\left(f,e^{i\theta}\right)\right|^2\nu(\theta)d\theta-\\ &-2\Re\left(\int_{-\pi}^{\pi}f\left(e^{i\theta}\right)L_n\left(f,e^{i\theta}\right)\nu(\theta)d\theta\right).\end{aligned}$$

Ahoar bien, $|L_n(f,x)|^2\in\Delta_{-(n-1),n-1}$, $\left(x=e^{i\theta}\right)$, por consiguiente:

$$I_\nu\left(|L_n(f,.)|^2\right)=I_n\left(|L_n(f,.)|^2\right),$$

siendo $I_n(f)$ la $n-$ésima fórmula de Szegő con nodos $\{z_{j,n}\}_{j=1}^n$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}I_n\left(|L_n(f,.)|^2\right) &= \sum_{j=1}^n\lambda_{j,n}\left|L_n(f,z_{j,n})\right|^2\\ &= \sum_{j=1}^n\lambda_{j,n}\left|f(z_{j,n})\right|^2=I_n\left(|f|^2\right).\end{aligned}$$

Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f\left(e^{i\theta}\right)L_n\left(f,e^{i\theta}\right)\nu(\theta)d\theta\right| &\le \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\nu(\theta)d\theta\right)^{1/2}\times\\ &\times\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\nu(\theta)d\theta\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Por otro lado, $\left(x=e^{i\theta}\right)$

$$\begin{aligned}\|f-L_n(f,.)\|_\nu^2 &\le I_\nu\left(|f|^2\right)+I_n\left(|f|^2\right)+\\ &+2\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\nu(\theta)d\theta\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|L_n(f,x)|^2\nu(\theta)d\theta\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Así pues, teniendo en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty}I_n\left(|f|^2\right)=I_\nu\left(|f|^2\right),$$

de (4.29) resultará:

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - L_n(f,.)\|_\nu^2 \leq 4\int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 \nu(\theta)d\theta. \tag{4.30}$$

Sea ahora, $\epsilon > 0$, y consideremos $f\left(e^{i\theta}\right) = f_1(\theta) + if_2(\theta)$, donde $f_j(\theta),\ j = 1,2$, son funciones periódicas, acotadas y tal que $f_j(\theta)\nu(\theta),\ j = 1,2$, integrables en $[-\pi,\pi]$. Entonces, aplicando el Teorema 1.16 a $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$, podemos asegurar que existen constantes positivas y polinomios trigonométricos $T_1(\theta)$ y $T_2(\theta)$, tales que:

$$\begin{gathered} -M_1 - \epsilon \leq f_1(\theta) \leq T_1(\theta) \leq M_1 + \epsilon, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left|f_1(\theta) - T_1(\theta)\right| \nu(\theta)d\theta < \epsilon, \end{gathered} \tag{4.31}$$

y

$$\begin{gathered} -M_2 - \epsilon \leq f_2(\theta) \leq T_2(\theta) \leq M_2 + \epsilon, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left|f_2(\theta) - T_2(\theta)\right| \nu(\theta)d\theta < \epsilon. \end{gathered} \tag{4.32}$$

Formemos ahora $T(\theta) = T_1(\theta) + iT_2(\theta) = R\left(e^{i\theta}\right)$, con $R \in \Delta_{-N,N}$. Así, $\forall x \in \mathbb{T}:$

$$\begin{aligned} |f(x) - R(x)| &\leq |f_1(\theta) - T_1(\theta)| + |f_2(\theta) - T_2(\theta)| \\ &\leq 2\left((M_1 + \epsilon) + (M_2 + \epsilon)\right). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - R(x)|^2 \nu(\theta)d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - R(x)|\,|f(x) - R(x)|\,\nu(\theta)d\theta \\ &\leq 2(M_1 + M_2 + 2\epsilon)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(\theta) - T_1(\theta)|\,\nu(\theta)d\theta + \right. \\ &\left. + \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(\theta) - T_2(\theta)|\,\nu(\theta)d\theta\right) \leq 4(M_1 + M_2 + 2\epsilon)\epsilon. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Ahora, dado que $\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} q(n) = \infty$, y que $R \in \Delta_{-N,N}$, tomando n suficientemente grande podemos asegurar que $R \in \Delta_{-p(n),q(n)}$ y consecuentemente escribir:

$$\begin{aligned} f - L_n(f,.) &= f - R + R - L_n(f,.) = (f - R) - (L_n(f,.) - L_n(R,.)) \\ &= (f - R) - L_n(f - R,.) \end{aligned}$$

Por tanto, de (4.30) y (4.33), se sigue, $\left(x = e^{i\theta}\right)$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|f - L_n(f,.)\|_\nu^2 &= \limsup_{n\to\infty} \|f - R - L_n(f-R,.)\|_\nu^2 \\
&\le 4\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - R(x)|^2 \, \nu(\theta) d\theta \\
&\le 16(M_1 + M_2 + 2\epsilon)\epsilon.
\end{aligned}$$

Esto implica que $\limsup_{n\to\infty} \|f - L_n(f,.)\|_\nu^2 = 0$ y de aquí se concluye la demostración. □

A partir de este resultado podemos ahora establecer, procediendo como en el Teorema 4.6, el siguiente

COROLARIO 4.3 *Bajo las mismas condiciones del Teorema 4.6, se verifica*

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} f(x_{j,n}) = I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta,$$

para cualquier función $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ *acotada y tal que* $f\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)$ *es integrable en* $[-\pi, \pi]$.

OBSERVACIÓN 32 *Obviamente, el Teorema 4.9 y Corolario 4.3 se pudieron haber dado con anterioridad y de aquí deducir los Teoremas 4.5 y 4.6 relativos a la convergencia en la clase de las funciones continuas. Creemos, no obstante, que el procedimiento expuesto es más didáctico en el sentido de que se va viendo la necesidad de ir incorporando otros tipos de Teoremas de Teoría de Aproximación para obtener las conclusiones deseadas. Con todo, conviene resaltar que se trata de resultados recientes deducidos en el marco más amplio de las funciones racionales ortogonales sobre la circunferencia unidad dados por A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen y O. Njåstad (véase [8]). Sin embargo, se hace preciso resaltar que el Teorema 4.6 fue establecido por los cuatro autores anteriores en 1996 en la clase de las funciones continuas que satisfacen una cierta condición de Lipschitz como puede verse en [6].*

4.4. Computación de la Transformada de Fourier

Es bien sabido que la computación de la Transformada de Fourier de una función g,

$$G(\sigma) = \mathcal{F}(g)(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{2\pi i\sigma t}dt, \ -\infty < \sigma < +\infty, \tag{4.34}$$

puede conllevar considerables dificultades involucrando el rango infinito del intervalo de integración por una parte, y el carácter "altamente oscilatorio" del integrando por otro. Al respecto, y de acuerdo con David-Rabinowitz [14], por un integrando "altamente oscilatorio" entenderemos que posee un gran número (más de diez) de extremos locales (máximos y mínimos) sobre el intervalo de integración. En esta sección rebajaremos el grado de dificultad en la estimación de (4.34) suponiendo que $g(t)$ se anula fuera de un cierto intervalo finito. Sin embargo, añadiremos una dificultad extra, admitiendo la presencia de singularidades próximas al intervalo de integración. Bajo estas condiciones, la expresión (4.34) la computaremos mediante ciertas fórmulas de cuadratura (fórmulas de Szegő) asumiendo previamente que todas las singularidades las reunimos en una cierta función peso, siendo éste el proceso habitual empleado en la integración numérica.

Así pues, supongamos que $g \in L_1(\mathbb{R})$, de modo que su transformada de Fourier $\mathcal{F}(g)(\sigma) = G(\sigma)$ dada por (4.34), satisface:

$$G(\sigma) = \mathcal{F}(g)(\sigma) = \lim_{\substack{B_1 \to \infty \\ B_2 \to \infty}} \int_{-B_2}^{B_1} g(t)e^{2\pi i\sigma t}dt, \ -\infty < \sigma < +\infty. \tag{4.35}$$

Tomando ahora $T > 0$, entonces, de (4.35), podemos escribir:

$$G(\sigma) = \mathcal{F}(g)(\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T g(t + kT)e^{2i\sigma(t+kT)\pi}dt, \ -\infty < \sigma < +\infty. \tag{4.36}$$

Suponiendo que podemos intercambiar los símbolos de "integración" y "sumatorio", se sigue:

$$\begin{aligned} G(\sigma) &= \mathcal{F}(g)(\sigma) \\ &= \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t+kT)e^{2\sigma ikT}\right) e^{2\pi\sigma ikT}dt,\ -\infty < \sigma < +\infty. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Nuestro objetivo ahora será la evaluación de la Transformada de Fourier en valores discretos de la variable σ, a saber, $\sigma = \sigma_r = \frac{r}{T}$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Esto es,

$$G(\sigma_r) = \mathcal{F}(g)(\sigma_r) = \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t+kT)e^{2\sigma ikT}\right) e^{2\pi\sigma_r ikT}dt,\ -\infty < \sigma < +\infty. \tag{4.38}$$

Haciendo

$$g_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t+kT),\ -\infty < t < +\infty,\ T > 0,$$

se puede escribir:

$$G(\sigma_r) = \mathcal{F}(g)(\sigma_r) = \int_0^T g_p(t)e^{2\pi it\sigma_r}dt,\ -\infty < \sigma < +\infty. \tag{4.39}$$

Obsérvese que, para cualquier función $g(t)$, $g_p(t)$ es periódica de periodo T y coincide con $g(t)$ en $[0,T]$, sí y sólo si, $g(t)$ se anula fuera de este intervalo. En otras palabras, $g_p(t)$ representa la "extensión periódica" de la parte de $g(t)$ sobre $[0,T]$. Por tal motivo, en lo que sigue supondremos que $g(t) = 0$, $\forall t \notin [0,T]$. En realidad, si $g(t)$ no se anulara fuera de $[0,T]$, surgiría una nueva fuente de error llamado "error de solapamiento", que sin embargo no tendremos en cuenta en nuestro análisis. Por consiguiente, tenemos:

$$G(\sigma_r) = \int_0^T g(t)e^{2\pi it\sigma_r}dt,\ -\infty < \sigma < +\infty. \tag{4.40}$$

Haciendo $t = \frac{T}{2\pi}\theta$, podemos escribir:

$$G(\sigma_r) = \frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(\frac{T}{2\pi}\theta\right) e^{2\pi\sigma_r \frac{T}{2\pi}\theta i}d\theta,\ -\infty < \sigma < +\infty, \tag{4.41}$$

o de forma equivalente

$$G(\sigma_r) = G(r) = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{g}(\theta) e^{ir\theta} d\theta, \tag{4.42}$$

siendo $\widetilde{g}(\theta) = g\left(\frac{T}{2\pi}\theta\right)$. Supongamos ahora que $\widetilde{g}(\theta)$ se puede factorizar como $\widetilde{g}(\theta) = h(\theta)\omega(\theta)$, con $h(\theta)$ suficientemente suave y $\omega(\theta)$ con posibles singularidades.

Inicialmente, supondremos que $\omega(\theta)$ es una función peso en $[0, 2\pi]$, es decir, $\omega(\theta) > 0$ salvo en un conjunto de medida nula, de forma que la Transformada de Fourier

$$G(r) = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) e^{ir\theta} \omega(\theta) d\theta, \tag{4.43}$$

se podría aproximar utilizando una fórmula de Szegő para la función peso $\omega(\theta)$ con N nodos. Así, si escribimos para dicha fórmula:

$$I_N(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j f(z_j),\ \lambda_j > 0,\ z_j \neq z_k,\ z_j \in \mathbb{T},$$

resultará:

$$G(r) \approx \frac{T}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j e^{ir\theta_j} h(\theta_j) = G_N(r), \tag{4.44}$$

donde hemos supuesto $z_j = e^{i\theta_j},\ j = 0, 1, \ldots, N-1, \theta_j \in [0, 2\pi),\ \theta_j \neq \theta_k$ si $j \neq k$. Si suponemos que $g(t)$ es real, entonces $h(\theta)$ también lo es y, puesto que $\lambda_j > 0,\ j = 0, \ldots, N-1$, se tiene:

$$\overline{G_N(r)} = \frac{T}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j h(\theta_j) z_j^{-r}.$$

Por consiguiente, en este caso, nos podemos restringir a valores no negativos de r. Si nos limitamos a $r \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, entonces, la fórmula (4.44) transforma la sucesión $h(j) = h(\theta_j),\ j = 0, 1, \ldots, N-1$ en la sucesión $G_N(r),\ r = 0, 1, \ldots, N-1$. En tal sentido, cuando $\omega(\theta) = 1,\ \theta \in [0, 2\pi]$, entonces sabemos que:

$$I_N(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j f(z_j),$$

donde $\lambda_j = \frac{2\pi}{N},\ j = 0, 1, \ldots, N-1$ y los nodos $\{z_j\}_{j=0}^{N-1}$ son las raíces de orden N de cualquier número complejo $\tau \in \mathbb{T}$. En particular, si tomamos $\tau = 1$, entonces, $z_j = e^{\frac{2\pi i j}{N}},\ j = 0, 1, \ldots, N-1$. Por consiguiente, (4.44) se transforma en

$$G_N(r) = \frac{T}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g\left(\frac{jT}{N}\right) e^{\frac{2\pi i j}{N}}, \tag{4.45}$$

que no es otra cosa que la bien conocida "Transformada discreta de Fourier" (después de cancelar el factor $\frac{T}{N}$).

Por otro lado, teniendo en cuenta que $h(j) = h(\theta_j),\ j = 0, 1, \ldots, N-1$ y después de haber suprimido por comodidad el factor $\frac{T}{N}$, (4.44) se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} G_N(0) \\ G_N(1) \\ \vdots \\ G_N(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{N-1} \\ \lambda_0 z_0 & \lambda_1 z_1 & \ldots & \lambda_{N-1} z_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0 z_0^{N-1} & \lambda_1 z_1^{N-1} & \ldots & \lambda_{N-1} z_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{pmatrix}.$$

Si hacemos $G_N^t = (G_N(0) \ldots G_N(N-1))$ y $h^t = (h(0) \ldots h(N-1))$, podemos poner:

$$G_N = Dh,$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{N-1} \\ \lambda_0 z_0 & \lambda_1 z_1 & \ldots & \lambda_{N-1} z_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0 z_0^{N-1} & \lambda_1 z_1^{N-1} & \ldots & \lambda_{N-1} z_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Claramente,

$$det(D) = \prod_{j=0}^{N-1} \lambda_j \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_0^{N-1} & z_1^{N-1} & \ldots & z_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ya que $\lambda_j > 0,\ j = 0, \ldots, N-1$ y $z_j \neq z_k,\ \forall j \neq k$. Por consiguiente,

$$h = D^{-1} G_N,$$

y la Transformada inversa de Fourier $g(t)$ también se puede recuperar (recuérdese que $g(t) = h\left(\frac{2t\pi}{T}\right)\omega\left(\frac{2t\pi}{T}\right),\ t \in [0,T]$).

Supongamos ahora que $\omega(\theta)$ en (4.43) ya no es una función peso de modo que las fórmulas de Szegő ahora no tienen sentido. Como hemos comentado en la Sección 4.3, también pudiera suceder que $\omega(\theta)$ sea propiamente una función peso, pero considerada "no estándar" de modo que, si bien la fórmula de Szegő sí que se puede emplear su utilización podría dar lugar a un proceso computacional largo e inestable. Como alternativa propondremos, de acuerdo con la Sección anterior, aproximar (4.43) mediante una fórmula de cuadratura con $2n+1$ nodos que sea exacta en $\Delta_{-n,n}$ y tomando como nodos las raíces de la unidad de orden $2n+1$. Así,

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{2n} A_j f(x_j),\ x_j = \sqrt[2n+1]{1},\ j = 1,\ldots,2n, \tag{4.46}$$

viniendo los pesos $\{A_j\}_{j=0}^{2n}$ dados por la Proposición 4.3.3. Así pues, cuando (4.46) se aplica a (4.43), se deduce:

$$G(r) \approx G_{2n+1}(r) = \frac{T}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n} A_j h(\theta_j) e^{ir\theta_j}, \tag{4.47}$$

donde ahora $\theta_j = \frac{2j\pi}{2n+1},\ j = 0,1,\ldots,2n$.

Además, si suponemos que $g(t)$ es real, dado que $\{A_j\}_{j=0}^{2n} \subset \mathbb{R}$, se tiene:

$$\overline{G_{2n+1}(r)} = \frac{T}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n} A_j h(\theta_j) e^{-ir\theta_j},$$

de modo que, de nuevo, podemos restringir nuestros cálculos a valores enteros de r no negativos. Así, para $r \geq 0$

$$G_{2n+1}(r) = \frac{T}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n} A_j h\left(\frac{2j\pi}{2n+1}\right) e^{\left(\frac{2jr\pi}{2n+1}\right)i}. \tag{4.48}$$

La expresión (4.48) se puede considerar como una "entidad" en sí misma. En efecto, luego de suprimir el factor $\frac{T}{2\pi}$ (por sencillez y comodidad), y hacer $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ con $N = 2n+1$, se puede escribir:

$$G(r) \approx G_N(r) = \sum_{j=0}^{N-1} A_j h(j) w^{rj}, \tag{4.49}$$

con $h(j) = h\left(\frac{2j\pi}{N}\right)$. En realidad, (4.49) se puede interpretar como una transformación lineal que aplica la sucesión $h(0), h(1), \ldots, h(N-1)$ en la sucesión $G(0), G(1), \ldots, G(N-1)$.

Ahora, haciendo uso de la bien conocida identidad:

$$\sum_{r=0}^{N-1} w^{r(j-k)} = \frac{1-w^{N(j-k)}}{1-w^{j-k}} = \begin{cases} N, & \text{si} \quad j = k \\ 0, & \text{si} \quad j \neq k \end{cases},$$

para k fijo, $(0 \leq k \leq N-1)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{r=0}^{N-1} G(r)w^{-kr} &= \textstyle\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} A_j h(j) w^{rj} w^{-kr} \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} A_j h(j) w^{(j-k)r} \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{N-1}\left(A_j h(j)\sum_{r=0}^{N-1} A_j h(j) w^{(j-k)r}\right) \\ &= A_k h(k) N. \end{aligned}$$

En consecuencia, siempre que $A_k \neq 0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1$, obtenemos:

$$h(k) = h\left(\frac{2k\pi}{N}\right) = \frac{1}{NA_k}\sum_{r=0}^{N-1} G(r)w^{-kr},$$

lo que nos permite recuperar nuevamente la transformada inversa $g(t)$.

4.5. Procesamiento de señales digitales

Es bien sabido que una de las aplicaciones de los polinomios de Szegő, los polinomios para-ortogonales y las fórmulas de Szegő ha sido su utilización en el llamado *procesamiento de señales digitales* o *señal discreta*.

Así, a lo largo de esta sección, cualquier sucesión de números reales $\{x(m)\}_{-\infty}^{\infty}$ la denominaremos con el término *señal discreta*. Para nuestros propósitos, nos centraremos en el estudio de señales periódicas de la forma:

$$x(m) = \begin{cases} \sum_{j=-I}^{I} \alpha_j e^{im\omega_j}, & m = 0, 1, \ldots \\ 0, & m < 0 \end{cases} \tag{4.50}$$

donde I es un entero positivo, las frecuencias ω_j satisfacen $\omega_j \in \mathbb{R}$, $\omega_{-j} = -\omega_j$, $0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_I < \pi$ y las amplitudes α_j verifican $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_{-j} = \overline{\alpha_j} \in \mathbb{C}$.

El problema clásico del análisis de frecuencias consiste en determinar $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_I$ a partir de N observaciones de la señal (4.50), es decir,

$$x_N(m) = \begin{cases} \sum_{j=-I}^{I} \alpha_j e^{im\omega_j}, & 0 \leq m \leq N-1 \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{4.51}$$

Una vez conocidas las frecuencias ω_j, las amplitudes α_j se pueden calcular resolviendo un sistema lineal de ecuaciones dadas por las relaciones (4.51).

Existe un método para resolver este problema, basado en los polinomios de Szegő, que viene a ser una reformulación del llamado *método de Wiener-Levinson* ([22],[34]). El punto de partida de este método lo constituyen los llamados *coeficientes de autocorrelación:*

$$\mu_k^{(N)} := \sum_{m=0}^{N-1} x_N(m) x_N(m+k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se puede ver fácilmente que la sucesión $\{\mu_k^{(N)}\}$ es la sucesión de momentos con respecto a la función de peso

$$\omega_N(\theta) := \left| X_N(e^{i\theta}) \right|^2,$$

donde

$$X_N(z) = \sum_{m=0}^{N-1} x_N(m) z^{-m}.$$

Es decir

$$\mu_k^{(N)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \omega_N(\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sea $\tilde{\mu}_k^{(N)} = \frac{\mu_k^{(N)}}{N}$. Entonces la función peso $\omega_N(\theta)/N$ da lugar a un producto interior y por tanto a una sucesión de polinomios ortogonales mónicos o polinomios de Szegő: $\{\rho_n(\omega_N; z)\}$. Estos polinomios juegan un papel fundamental en la resolución del problema de análisis de frecuencias cuando $n \geq n_0$, donde $n_0 = 2I + 1$. En efecto, si n_0 es conocido, entonces se tiene que ([25],[20])

$$\lim_{N \to \infty} \rho_{n_0}(\omega_N; z) = \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j})$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$. Esto implica, haciendo uso del Teorema de Hurwitz ([10, p. 152]), que los ceros del polinomio de Szegő $\rho_{n_0}(\omega_N; z)$ se aproximarán a los puntos $\beta_j = e^{i\omega_j},\ j = 1, \ldots, n_0$, llamados también *puntos de frecuencia*.

Sin embargo, el número n_0 de frecuencias suele ser desconocido. Supongamos, en primer lugar, que $n < n_0$, entonces ([25],[20])

$$\lim_{N\to\infty} \rho_n(\omega_N; z) = Q_n(z)$$

donde Q_n es el polinomio de Szegő con respecto a la medida discreta

$$d\sigma(\theta) = \sum_{j=1}^{n_0} |\alpha_j|^2 \delta_{\beta_j},\ \beta_j = e^{i\omega_j},\ j = 1, \ldots, n_0. \tag{4.52}$$

Como ya sabemos, sus ceros están en $\mathbb{D}$ y por tanto, en este caso, no podremos utilizar los polinomios de Szegő para resolver el problema de análisis de frecuencias.

Por otro lado, si $n > n_0$ entonces ([25],[20]) existe una subsucesión $\{N_k\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \rho_n(\omega_{N_k}; z) = Q_{n-n_0}(z) \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j}). \tag{4.53}$$

De nuevo, haciendo uso del Teorema de Hurwitz, se tiene que n_0 ceros del polinomio de Szegő se aproximarán a los puntos $\beta_j = e^{i\omega_j},\ j = 1, \ldots, n_0$, y que el resto de los $(n - n_0)$ se aproximarán a los ceros del polinomio $Q_{n-n_0}(z)$ que dependerá de la subsucesión que se tome. Los $(n-n_0)$ ceros se denominan, a menudo, "uninteresting points" y se puede demostrar ([25]) que estos ceros están en la región $|z| < 1$, es decir, que los "uninteresting" ceros permanecen fuera de la circunferencia unidad. Entonces, si $x_j^N,\ j = 1, \ldots, n - n_0$ son los $n - n_0$ ceros del polinomio $Q_{n-n_0}(z)$, para todo $n > n_0$ existe un número $K_n \in (0, 1)$ que depende de n y de la señal dada tal que

$$|x_j^N| \leq K_n < 1,\ j = 1, \ldots, n - n_0. \tag{4.54}$$

Este método es, por tanto, muy útil a la hora de determinar las frecuencias. Sin embargo, si bien sabemos que los "uninteresting points" se mantienen separados de los ceros que van a aproximar los puntos de frecuencia $\beta_j = e^{i\omega_j}$, $j = 1, \ldots, n_0$, no se sabe calcular con exactitud el número $K_n \in (0, 1)$, ni siquiera se han podido obtener, hasta ahora, estimaciones del mismo.

Este es uno de los motivos por los que, en vez de polinomios de Szegő $\{\rho_n(\omega_N; z)\}$, se consideraron los correspondientes polinomios para-ortogonales $B_n(\omega_N, \tau; z) = \rho_n(\omega_N; z) + \tau\rho_n^*(\omega_N; z)$, $|\tau| = 1$, (véase [11] y [12]). En este caso, se tiene el siguiente resultado análogo al obtenido para los polinomios de Szegő dado por (4.53): ([19])

Teorema 4.10 *Sea $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ una subsucesión arbitraria de la sucesión de números naturales. Entonces existe una subsucesión $\{N_{k_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ y la correspondiente sucesión de polinomios $\{W_n(N_{k_\nu}, \tau; z)\}$ de grado a lo sumo $n - n_0$, tal que, para cada $n \geq n_0$, $|\tau| = 1$, se tiene que*

$$\lim_{\nu \to \infty} B_n(\omega_{N_{k_\nu}}, \tau; z) = W_n(N_{k_\nu}, \tau; z) \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j}),$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$.

Por tanto, n_0 ceros de $B_n(\omega_{N_{k_\nu}}, \tau; z)$ aproximarán a los puntos de frecuencia β_j, $j = 1, \ldots, n_0$. Sin embargo, para los ceros de estos polinomios no se tiene ninguna propiedad como la dada en la fórmula (4.54) que separe los "uninteresting" ceros de los que se aproximan a β_j, $j = 1, \ldots, n_0$.

Recordar que en el caso de los polinomios de Szegő, los ceros ("uninteresting" ceros) del polinomio Q_{n-n_0} dado en (4.53), están en $\mathbb{D}$. Al considerar ahora polinomios para-ortogonales, la preguntasería: ¿Qué se puede decir de los ceros de $W_n(N_{k_\nu}, \tau; z)$? A tal efecto se tiene el siguiente

Teorema 4.11 *El polinomio W_{n-n_0} es el $(n - n_0)-$ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a una medida positiva μ sobre $\mathbb{T}$. Es decir, podemos escribir:*

$$W_{n-n_0}(z, \tau) = Q_{n-n_0}(z) + \tau Q_{n-n_0}^*(z),$$

donde Q_{n-n_0} es el polinomio de Szegő de grado $n - n_0$ con respecto a dicha medida μ.

La medida μ, además, se puede calcular explícitamente a partir de $\omega_N(\theta)$. En efecto,

$$\begin{aligned}\omega_N(\theta) &= |X_N(e^{i\theta})|^2 = \left|\sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{n_0}\alpha_j\beta_j^m\right)e^{-i\theta m}\right|^2\\ &= \left|e^{i\theta}\sum_{j=1}^{n_0}\frac{\alpha_j}{e^{i\theta}-\beta_j} - e^{-i\theta(N-1)}\sum_{j=1}^{n_0}\frac{\alpha_j\beta_j^N}{e^{i\theta}-\beta_j}.\right|^2\end{aligned}$$

Si,

$$\sum_{j=1}^{n_0}\frac{\alpha_j}{z-\beta_j} = \frac{N_{n_0-1}(z)}{\rho_{n_0}(z)}, \qquad \sum_{j=1}^{n_0}\frac{\alpha_j\beta_j^N}{z-\beta_j} = \frac{M_{n_0-1;N}(z)}{\rho_{n_0}(z)},$$

entonces:

$$\begin{aligned}|\rho_{n_0}(e^{i\theta})|^2|X_N(e^{i\theta})|^2 &= |N_{n_0-1}(e^{i\theta})|^2 + |M_{n_0-1;N}(e^{i\theta})|^2\\ &\quad -e^{iN\theta}N_{n_0-1}\overline{M_{n_0-1;N}}\\ &\quad -e^{-iN\theta}\overline{N_{n_0-1}}M_{n_0-1;N},\end{aligned}$$

y se tiene el siguiente:

Teorema 4.12 *Supongamos que $\{N_{k(\nu)}\}$ es una subsucesión tal que:*

$$\lim_{\nu\to\infty}|M_{n_0-1,N_{k(\nu)}}(e^{i\theta}) - M_{n_0-1}(e^{i\theta})| = 0, \text{ uniformemente en } [0,2\pi].$$

Entonces $Q_{n-n_0}(z)$ es ortogonal con respecto a:

$$d\mu(\theta) = \left(|N_{n_0-1}(e^{i\theta})|^2 + |M_{n_0-1}(e^{i\theta})|^2\right)d\theta.$$

Por simplicidad, sea $B_n(z) = W_n(N_{k_\nu},\tau;z)\prod_{j=1}^{n_0}(z-e^{i\omega_j})$. Del Teorema 4.11, los ceros de W_{n-n_0} son simples y están en $\mathbb{T}$. Como consecuencia, los puntos de frecuencia $\beta_j = e^{i\omega_j}$ serán ceros del polinomio "límite" B_n de multiplicidad a lo sumo dos, es decir, se pueden dar los siguientes casos, si $j = 1,\ldots,n_0$:

1. Ó bien, β_j es cero simple del polinomio límite B_n.
2. Ó bien, β_j es cero doble del polinomio límite B_n.

Nuestro objetivo será, por tanto, el responder a la siguiente pregunta: ¿Cómo distinguir los ceros de $B_n^{(N_{k(\nu)})}$ que aproximan a los puntos de frecuencias de los que no ? Una primera respuesta a este problema nos la van a dar las fórmulas de cuadratura de Szegő, más concretamente, los coeficientes $\lambda_j^N,\ j = 1, \ldots, n$ de la $n-$ésima fórmula de Szegő respecto a ω_N :

TEOREMA 4.13 *Sea $n > n_0$ y supongamos que la sucesión $\{z_j^{N_{k(\nu)}}\}_\nu$ de ceros de $B_n^{(N_{k(\nu)})}$ converge a un cero de W_{n-n_0} que no coincida con ningún punto de frecuencia. Entonces, para la correspondiente sucesión de coeficientes en la fórmula de Szegő, se tiene que*

$$\lim_{\nu \to \infty} \lambda_j^{N_{k(\nu)}} = 0.$$

Acabamos de ver, por el Teorema anterior, que los coeficientes correspondientes a ceros de $B_n^{(N_{k(\nu)})}$ que aproximan a ceros de W_{n-n_0} que no coinciden con ningún punto de frecuencia, tienden a cero. La pregunta ahora es pues: ¿Qué ocurrirá con los coeficientes correspondientes a ceros de $B_n^{(N_{k(\nu)})}$ que aproximen a los puntos de frecuencia? La respuesta nos la darán los dos Teoremas siguientes, que se corresponden con el caso "simple" y "doble", respectivamente:

TEOREMA 4.14 *Supongamos β_j es un cero simple del polinomio límite B_n para algún $j = 1, \ldots, n_0$, $(W_{n-n_0}(\beta_j, \tau) \neq 0)$ y sea $n > n_0$. Entonces*

$$\text{Si,} \quad \lim_{\nu \to \infty} z_j^{N_{k(\nu)}} = \beta_j, \quad \Rightarrow \quad \lim_{\nu \to \infty} \lambda_j^{N_{k(\nu)}} = |\alpha_j|^2 .$$

TEOREMA 4.15 *Supongamos que β_j, para algún $j = 1, \ldots, n_0$, es un cero doble del polinomio límite B_n $(W_{n-n_0}(\beta_j, \tau) = 0,\ W'_{n-n_0}(\beta_j, \tau) \neq 0)$. Entonces, existen dos sucesiones $\{z_{j_1}^{N_{k(\nu)}}\}_\nu$, $\{z_{j_2}^{N_{k(\nu)}}\}_\nu$ de ceros de $B_n^{(N_{k(\nu)})}$ tales que*

$$\lim_{\nu \to \infty} z_{j_m}^{N_{k(\nu)}} = \beta_j,\ m = 1, 2.$$

Y, para las correspondientes sucesiones de coeficientes $\{\lambda_{j_1}^{N_{k(\nu)}}\}_\nu$, y $\{\lambda_{j_2}^{N_{k(\nu)}}\}_\nu$, se tiene que:

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(\lambda_{j_1}^{N_{k(\nu)}} + \lambda_{j_2}^{N_{k(\nu)}} \right) = |\alpha_j|^2 .$$

Por tanto, bastaría computar los coeficientes $\lambda_{j_1}^{N_{k(\nu)}}$ de la $n-$ésima fórmula de Szegő para distinguir qué ceros de $B_n^{(N_{k(\nu)})}$ van a aproximar los puntos de frecuencia y cuáles no. Veamos un ejemplo ilustrativo:

Ejemplo: Tomemos la señal: $x_N(m) = e^{im\pi/2} + e^{-im\pi/2},\ 0 \leq m \leq N-1$. En este caso los puntos de frecuencia y amplitudes son:

$$\beta_1 = e^{i\pi/2} = i, \quad \beta_2 = e^{-i\pi/2} = -i, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1.$$

A partir de N observaciones de la señal $\{x_N(m)\}_{m=0}^{N-1}$, podemos construir la función peso $\omega_N(\theta) = \frac{1}{N}\left|\sum_{m=0}^{N-1} x_N(m)e^{-im\theta}\right|^2$ y a partir de ésta, computar el $n-$ésimo polinomio para-ortogonal $B_n^N(z,\tau)$. Debemos elegir $n \geq n_0 = 2$. Si tomamos $n = 5$ y la subsucesión $N = 2k+1$, se puede comprobar que

$$\lim_{k\to\infty} B_5^{(2k+1)}(z,\tau) = W_3(z,\tau)(z^2+1),\ W_3(z,\tau) = z^3 + \tau.$$

Por tanto, si $\tau = -i$, entonces $\beta_2 = -i$ es un cero doble. Los ceros de $W_3(z,-i) = z^3 - i$ son:

$$w_1 = -0{,}866025403 + 0{,}5\ i, \quad w_2 = 0{,}866025403 + 0{,}5\ i, \quad \text{y} \ \ w_3 = -i.$$

Para $n = 5$ y la subsucesión $N = 2k+1$, hemos calculado los nodos $\{z_j^{(2k+1)}\}_{j=1}^5$ y pesos $\{\lambda_j^{(2k+1)}\}_{j=1}^5$ de la correspondiente fórmula de Szegő, con distintos valores de k, a saber, $k = 2500$, $k = 25000$ y $k = 2500000$.

Los nodos $\{z_j^{(2k+1)}\}_{j=1}^5$ vienen dados en las siguientes tablas, para los tres valores de k, respectivamente:

$k = 2500$	$k = 25000$
$z_1 = -0{,}86600616 + 0{,}50003332i$	$z_1 = -0{,}86602347 + 0{,}50000333i$
$z_2 = 0{,}86600616 + 0{,}50003332i$	$z_2 = 0{,}86602347 + 0{,}50000333i$
$z_3 = i$	$z_3 = i$
$\underline{z_4 = -0{,}0115455 - 0{,}9999333i}$	$\underline{z_4 = -0{,}00365143 - 0{,}99999333i}$
$\underline{z_5 = 0{,}0115455 - 0{,}9999333i}$	$\underline{z_5 = 0{,}00365143 - 0{,}99999333i}$

$k = 250000$
$z_1 = -0{,}86602521 + 0{,}50000033i$
$z_2 = 0{,}86602521 + 0{,}50000033i$
$z_3 = i$
$z_4 = -0{,}00115469 - 0{,}999999333i$
$z_5 = 0{,}00115469 - 0{,}999999333i$

y los pesos $\{\lambda_j^{(2k+1)}\}_{j=1}^5$ vienen dados en la siguiente tabla, para los tres valores de k :

	$k = 2500$	$k = 25000$	$k = 250000$
λ_1	0,00017774	0,00001777	0,00000177
λ_2	0,00017774	0,00001777	0,00000177
λ_3	0,9999	0,99999	0,999999
λ_4	0,50007221	0,50000722	0,50000072
λ_5	0,50007221	0,50000722	0,50000072

Observando la tabla de los valores de los pesos de la fórmula de Szegő vemos que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_j^{2k+1} = 0, \; j = 1, 2.$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_3^{2k+1} = |\alpha_1|^2 = 1.$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\lambda_4^{2k+1} + \lambda_5^{2k+1}\right) = |\alpha_2|^2 = 1.$$

De esta información podemos concluir que existen dos puntos de frecuencia ($n_0 = 2$): $\beta_1 \approx i$ y $\beta_2 \approx -0{,}00115469 - 0{,}999999333i \approx -i$ (ó bien $0{,}00115469 - 0{,}999999333i \approx -i$).

Observación 33 *Notar que, para el caso de los coeficientes asociados a ceros "dobles", se tiene que*

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(\lambda_{j_1}^{N_{k(\nu)}} + \lambda_{j_2}^{N_{k(\nu)}}\right) = |\alpha_j|^2 .$$

Sin embargo, nada se sabe a cerca de

$$\{\lambda_{j_1}^{N_{k(\nu)}}\}, \quad \{\lambda_{j_2}^{N_{k(\nu)}}\}, \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

Los ejemplos numéricos que se han hecho y tal y como se puede observar en el ejemplo anterior, podemos conjeturar que

$$\lim_{\nu\to\infty} \lambda_{j_1}^{N_{k(\nu)}} = \lim_{\nu\to\infty} \lambda_{j_2}^{N_{k(\nu)}} = \frac{|\alpha_j|^2}{2}.$$

Téngase en cuenta que los pesos de las fórmulas de Szegő no sólo nos hace distinguir los ceros que aproximan a los puntos de frecuencia de los que no, sino que nos proporcionan, además, estimaciones del módulo de las amplitudes que también son parámetros a determinar.

4.6. Funciones racionales ortogonales

Las funciones racionales, esto es, las definidas como cociente de dos polinomios, poseen la característica especial de ser las funciones más generales que pueden definirse utilizando las "operaciones usuales de la Aritmética": Suma, resta multiplicación y división. Esto ha hecho que las funciones racionales hayan sido utilizadas con gran profusión en los diferentes campos de la Teoría de la Aproximación. Ejemplos de funciones racionales aproximantes las hemos visto en los Capítulos 1 y 3, mediante los llamados Aproximantes de Padé, que en el caso unipuntual (Capítulo 1) pueden, en cierto modo, considerarse como la "versión racional" del polinomio de Taylor. Claramente, los polinomios son funciones racionales, donde ahora sus polos (los ceros del polinomio denominador), están todos localizados en el punto del infinito. Parece pues lógico, plantearse utilizar otro tipo de funciones racionales más generales, en el sentido de que los polos no tengan por qué estar todos "prefijados en el infinito". Esto ha dado lugar en los últimos años al desarrollo de una Teoría sobre funciones racionales ortogonales, tanto sobre intervalos (finitos o infinitos) del eje real como sobre la circunferencia unidad. En tal sentido, cabe significar que uno de los autores de la presente memoria, en colaboración con los profesores Adhemar Bultheel, de la Universidad Católica de Lovaina (Bélgica), Erik Hendriksen, de la Universidad de Amsterdam (Holanda) y Olav Njåstad, de la Universidad de Trondheim (Noruega), han contribuido al desarrollo de tal teoría con más de sesenta trabajos y una monografía [7] donde se recoge la labor investigadora de los cuatro autores durante la última década.

El objetivo de esta sección es mostrar de forma esquemática, cómo los polinomios de Szegő se pueden extender al caso de funciones racionales con polos prefijados fuera del disco unidad y cómo se pueden construir fórmulas de cuadratura con nodos sobre la circunferencia unidad que son "exactas" en ciertos subespacios de funciones racionales que generalizan los polinomios de Laurent estudiados en el Capítulo 3.

Sea pues $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, la cual supondremos fija en lo que sigue, y consideremos el espacio $\mathcal{L}_n$ de las funciones racionales de grado n (numerador y denominador de grado a lo sumo n) con polos en $\{\gamma_k\}_{k=1}^{n}$. Por tanto:

$$\mathcal{L}_n = \left\{ \frac{P(z)}{\prod_{k=1}^{n}(z-\gamma_k)},\ P \in \Pi_n \right\},\ n = 1, 2, \ldots .$$

(Observar que $1 \in \mathcal{L}_n$ y que $dim\,(\mathcal{L}_n) = n+1$). Por otro lado, se pueden elegir diferentes bases para definir $\mathcal{L}_n$, por ejemplo:

1. Si $\gamma_j \neq \gamma_k,\ j \neq k$, una base sería: $\left\{1, \frac{1}{z-\gamma_1}, \ldots, \frac{1}{z-\gamma_n}\right\}$.

2. $\left\{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(z-\gamma_k)}, \frac{z}{\prod_{k=1}^{n}(z-\gamma_k)}, \ldots, \frac{z^n}{\prod_{k=1}^{n}(z-\gamma_k)}\right\}$.

Al objeto de hacer un desarrollo algebraico uniforme que permita recuperar en todo momento los polinomios ($\gamma_k = \infty,\ k = 1, 2, \ldots$), resulta fundamental elegir una base apropiada. En tal sentido, en lugar de partir de la sucesión $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, tomaremos una sucesión $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$, de forma que los polos se fijarán en $\gamma_k = \frac{1}{\overline{\alpha}_k}$. De este modo, cuando $\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots$, entonces $\gamma_k = \infty,\ k = 1, 2, \ldots$ y obtendríamos los polinomios.

Así pues, fijada la sucesión $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$, consideramos los factores de Blaschke, para $k = 1, 2, \ldots$:

$$\xi_k = \frac{\overline{\alpha}_k}{|\alpha_k|} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z},$$

lo que nos permite definir los productos de Blaschke, $B_k(z),\ k = 0, 1, \ldots$:

$$B_0 \equiv 1,\ B_k(z) = B_{k-1}(z)\xi_k,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Por convenio, definimos $\frac{\overline{\alpha}_n}{|\alpha_n|} = -1$ cuando $\alpha_n = 0$. También vemos que se puede escribir:

$$B_n(z) = \eta_n \frac{\omega_n(z)}{\pi_n(z)},$$

con

$$\begin{aligned} &\eta_n = (-1)^n \textstyle\prod_{j=1}^n \frac{\overline{\alpha}_j}{|\alpha_j|}, \qquad \omega_n(z) = \textstyle\prod_{j=1}^n (z-\alpha_j), \\ &\pi_n(z) = \textstyle\prod_{j=1}^n (1-\overline{\alpha}_j z) \quad . \end{aligned} \tag{4.55}$$

Consideremos ahora el espacio $\mathcal{L}_n$ de las funciones racionales generado por los factores de Blaschke $\{B_k\}_{k=0}^n$, esto es,

$$\mathcal{L}_n = \langle B_0, B_1, \ldots, B_n \rangle.$$

Es fácil ver que el sistema $\{B_k\}_{k=0}^n$, es linealmente independiente y por consiguiente $dim\,(\mathcal{L}_n) = n+1$ y claramente $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+1}$.

Por otro lado, $\forall R \in \mathcal{L}_n$, se tiene

$$R(z) = \sum_{j=0}^n a_j B_j(z) = a_0 + \eta_1 \frac{\omega_1(z)}{\pi_1(z)} + \ldots + \eta_n \frac{\omega_n(z)}{\pi_n(z)} = \frac{P_n(z)}{\pi_n(z)},\ P_n \in \Pi_n.$$

Recíprocamente, cualquier función racional de la forma $\frac{P_n(z)}{\pi_n(z)}$, con $P_n \in \Pi_n$, está en $\mathcal{L}_n$, y podremos poner $(n = 0, 1, \ldots)$:

$$\mathcal{L}_n = \langle B_0, B_1, \ldots, B_n \rangle = \left\{ \frac{P(z)}{\pi_n(z)},\ P \in \Pi_n \right\}.$$

Con los convenios anteriores, vemos que cuando $\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$ entonces

$$B_n(z) = z^n,\ n = 0, 1, \ldots,$$

y que, por consiguiente, $\mathcal{L}_n = \Pi_n$.

Por otro lado, en el Capítulo 3, vimos que las fórmulas de Szegő integraban exactamente subespacios de polinomios de Laurent, que no es otra cosa que funciones racionales con polos en el origen y el infinito. Seguidamente, introduciremos otras funciones racionales que generalizan los polinomios de Laurent y que trataremos posteriormente de integrar "exactamente" mediante fórmulas de cuadratura. A tal efecto, recordemos la transformación "subestrella":

$$f_*(z) = \overline{f\,(1/\overline{z})},\ \left(f_*(z) = \overline{f(z)},\ \forall z \in \mathbb{T} \right),$$

la cual nos permite definir los espacios $(n = 0, 1, \ldots)$

$$\mathcal{L}_{n^*} = \{f_* : \ f \in \mathcal{L}_n\}.$$

Claramente, $\mathcal{L}_{n^*} = \langle B_{0^*}, B_{1^*}, \ldots, B_{n^*}\rangle$, por consiguiente, $dim\,(\mathcal{L}_{n^*}) = n+1$ y también $\mathcal{L}_{n^*} \subset \mathcal{L}_{n+1^*}$.

Recordemos que $B_n(z) = \eta_n \frac{\omega_n(z)}{\pi_n(z)}$, donde $\eta_n,\ \omega_n(z)$ y$\pi_n(z)$ vienen dadas por las fórmulas (4.55), teniéndose la siguiente

Proposición 4.6.1 $\forall n \geq 0 :\ B_{n^*}(z) = \frac{1}{B_n(z)}$.

Demostración: Hágase como ejercicio.

Ahora estamos en condiciones de definir los espacios de funciones racionales con polos prefijados fuera de la circunferencia unidad que generalizan a los polinomios de Laurent. Así, para p y q enteros no negativos, definimos

$$\mathcal{R}_{p,q} = \mathcal{L}_{p^*} + \mathcal{L}_q = \left\{ \frac{P(z)}{\omega_p(z)\pi_q(z)},\ P \in \Pi_{p+q} \right\}. \tag{4.56}$$

Por tanto, si $R \in \mathcal{R}_{p,q} : R(z) = \frac{P(z)}{\prod_{k=1}^{p}(z-\alpha_k)\prod_{k=1}^{q}(1-z\overline{\alpha}_k)}$, es decir, los elementos de (4.56) son funciones racionales con polos en $\{\alpha_k\}_{k=1}^{p} \subset \mathbb{D}$ y en $\left\{\frac{1}{\overline{\alpha}_k}\right\}_{k=1}^{p} \subset \mathbb{E}$.

Algunas consecuencias inmediatas de (4.56) son :

1. $\mathcal{R}_{0,n} = \mathcal{L}_n$.

2. $\mathcal{R}_{p,q} = \langle \frac{1}{B_p}, \ldots, \frac{1}{B_1}, B_0, B_1, \ldots, B_q\rangle$.

3. $dim\,(\mathcal{R}_{p,q}) = p + q + 1$.

4. Por convenio: $B_{-n}(z) = \frac{1}{B_n(z)}$.

5. Si $\alpha_k = 0,\ \forall k \geq 1$, entonces $B_n(z) = z^n,\ n = 0, \pm 1, \ldots$ y por consiguiente:

$$\mathcal{R}_{p,q} = \langle \frac{1}{z^p}, \ldots, \frac{1}{z}, 1, z, \ldots, z^q\rangle = \Delta_{-p,q}.$$

Preparados pues los espacios de funciones, trataremos de estudiar la "contrapartida racional" a las fórmulas de cuadratura analizadas en el Capítulo 3.

Supongamos una función peso $\omega(\theta)$ en $[-\pi, \pi]$ y consideremos de nuevo la integral

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta, \tag{4.57}$$

se trata de encontrar nodos sobre $\mathbb{T} : \{z_j\}_{j=1}^n$, $z_j \neq z_k$, $\forall j \neq k$ y coeficientes o pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, de modo que $I_n(f)$ dado por

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j), \tag{4.58}$$

sea una "aproximación" efectiva de $I_\omega(f)$. Como veremos, para la elección de los nodos y pesos en $I_n(f)$, hemos de suponer que las integrales $\int_{-\pi}^{\pi} B_k\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta$ existen y se pueden calcular para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Téngase en cuenta que si $k > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} B_{-k}\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega(\theta)}{B_k\left(e^{i\theta}\right)} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} B_{k^*}\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{B_k\left(e^{i\theta}\right)} \omega(\theta) d\theta = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} B_k\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta}.
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos restringirnos a valores no negativos de k. Así pues, vamos a imponer a (4.58) que integre exactamente subespacios de la forma $\mathcal{R}_{p,q}$ con p y q dependientes de n lo más grande posible. Si denotamos por $A = \{\alpha_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{D}$ y en $\hat{A} = \left\{\frac{1}{\bar{\alpha}_k}\right\}_{k=1}^p \subset \mathbb{E}$, entonces $\forall p, q$ enteros no negativos, es fácil ver (hágase como ejercicio), que $\mathcal{R}_{p,q}$ representa un sistema de Chebyshev sobre cualquier conjunto $X \in \mathbb{C} \setminus \left(A \cup \hat{A}\right)$, y tenemos la siguiente:

Proposición 4.6.2 *Sean p y q enteros no negativos tales que $p + q = n - 1$, sean $\{z_j\}_{j=1}^n \subset X \in \mathbb{C} \setminus \left(A \cup \hat{A}\right)$ $n-$ puntos distintos dados y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces, existe un único elemento $R_n \in \mathcal{R}_{p,q}$ verificando*

$$R_n(z_j) = f(z_j), \; j = 1, \ldots, n.$$

Demostración: Hágase como ejercicio. □

Para nuestros propósitos, resultará conveniente dar una representación tipo- Lagrange del interpolante $R_n(z)$ de la proposición anterior. Así, definimos:

$$\Omega_n(z) = \frac{N_n(z)}{\omega_p(z)\pi_q(z)}, \tag{4.59}$$

siendo $N_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ el polinomio nodal y definamos

$$L_j(z) = \frac{1 - \overline{\alpha}_{q+1}z}{1 - \overline{\alpha}_{q+1}z_j} \frac{\Omega_n(z)}{(z - z_j)\Omega_n'(z_j)} \in \mathcal{R}_{p,q}. \tag{4.60}$$

Entonces, se cumple

PROPOSICIÓN 4.6.3 *Sea $R_n(z) \in \mathcal{R}_{p,q}$ que interpola a $f(z)$ en n nodos distintos en $\mathbb{C} \setminus \left(A \bigcup \hat{A}\right)$, entonces:*

$$R_n(z) = \sum_{j=1}^{n} L_j(z) f(z_j). \tag{4.61}$$

Demostración: Compruébese que $L_j(z_k) = \delta_{j,k},\ 1 \leq j, k \leq n.$ $\square$

En particular, si en la proposición anterior hacemos $p = 0$, $(q = n - 1)$, entonces, $\mathcal{R}_{0,n-1} = \mathcal{L}_{n-1}$ y el interpolante vendrá dado por:

$$R_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - \overline{\alpha}_n z}{1 - \overline{\alpha}_n z_j} \frac{\Omega_n(z)}{(z - z_j)\Omega_n'(z_j)} f(z_j), \tag{4.62}$$

donde ahora $\Omega_n(z) = \frac{N_n(z)}{\pi_n(z)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)}{\prod_{j=0}^{n}(1-\overline{\alpha}_j z)}$.

Cuando $\alpha_i = 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots,$ entonces, $\Omega_n(z) = N_n(z)$ y (4.62) nos proporciona la conocida fórmula de interpolación de Lagrange para polinomios.

Ejercicio: *Definamos*

$$\widetilde{L}_j(z) = \frac{z - \alpha_{p+1}}{z_j - \alpha_{p+1}} \frac{\Omega_n(z)}{(z - z_j)\Omega_n'(z_j)},\ j = 1, \ldots, n.$$

Compruébese que:

$$\widetilde{L}_j(z) = L_j(z),\ j = 1, \ldots, n,$$

con $L_j(z),\ j = 1, \ldots, n$ dado por (4.60).

Si ahora integramos la expresión (4.61) con respecto a $\omega(\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, y suponemos que los nodos $\{z_j\}_{j=1}^n$ están sobre $\mathbb{T}$, obtenemos:

$$I_\omega(R_n) = \sum_{j=1}^{n} I_\omega(L_j) f(z_j) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(z_j) = I_n(f), \tag{4.63}$$

donde $A_j = I_\omega(L_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Así pues, hemos obtenido una fórmula de cuadratura, que por propia construcción, es exacta en $\mathcal{R}_{p,q}$, $(p+q=n-1)$, el cual llamaremos el dominio de validez de $I_n(f)$. A esta fórmula de cuadratura $I_n(f)$, la denominaremos de tipo interpolatorio en $\mathcal{R}_{p,q}$, teniéndose:

PROPOSICIÓN 4.6.4 *Una fórmula de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(z_j)$, con nodos distintos sobre $\mathbb{T}$, tiene dominio de validez $\mathcal{R}_{p,q}$, sí y sólo si, es de tipo interpolatorio en tal dominio.*

Demostración: Hágase como ejercicio. □

Llegados a este punto, cabe preguntarse cómo hemos de elegir los nodos $\{z_j\}_{j=1}^n$ sobre $\mathbb{T}$, a efectos de que se pueda agrandar el dominio de validez lo más posible. El intentar dar respuesta a este interrogante constituye el objetivo fundamental de la sección, poniendo para ello de manifiesto el papel desempeñado por las funciones racionales ortogonales que definiremos a continuación. No obstante, conviene precisar en qué sentido "alargamos" o "agrandamos" el espacio $\mathcal{R}_{p,q}$. Nos vamos a restringir a dominios "balanceados", de la forma $\mathcal{R}_{p,p}$, con p tan grande como sea posible. Teniéndose, en primer lugar:

PROPOSICIÓN 4.6.5 *No importa cómo se elijan los nodos $\{z_j\}_{j=1}^n$ sobre $\mathbb{T}$ (o más generalmente en $\mathbb{C} \setminus \left(A \cup \hat{A}\right)$), no puede existir una fórmula de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(z_j)$, que sea exacta en $\mathcal{R}_{n,n}$.*

Demostración: Sean $\{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C} \setminus \left(A \cup \hat{A}\right)$ tal que $z_j \neq z_k$, $\forall j \neq k$ y consideremos:

$$R_n(z) = \frac{N_n(z)}{\omega_n(z)}, \; N_n(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j).$$

Así, $\forall z \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} |R_n(z)|^2 &= R_n(z)\overline{R_n(z)} = \frac{N_n(z)}{\omega_n(z)} \frac{\overline{N_n(z)}}{\overline{\omega_n(z)}} = \frac{N_n(z)}{\omega_n(z)} \frac{\prod_{j=1}^n (\bar{z}-\bar{z}_j)}{\prod_{j=1}^n (\bar{z}-\bar{\alpha}_j)} \\ &= \frac{N_n(z)}{\omega_n(z)} \frac{\prod_{j=1}^n (1-\bar{z}_j z)}{\prod_{j=1}^n (1-\bar{\alpha}_j z)} = \frac{N_n(z)}{\omega_n(z)} \frac{N_n^*(z)}{\pi_n(z)} \ \in \mathcal{R}_{n,n}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, dado que $|R_n(z)|^2 \geq 0,\ \forall z \in \mathbb{T}$, resultará:

$$0 < I_\omega(|R_n|^2) = \sum_{j=1}^n A_j |R_n(z_j)|^2 = 0,$$

ya que $R_n(z_j) = 0,\ j = 1, \ldots, n$. □

De la proposición anterior vemos que lo máximo que se puede agrandar $\mathcal{R}_{p,q}$ es hasta $\mathcal{R}_{n-1,n-1}$. En el supuesto de que sea alcanzable, esto es, que existan nodos distintos sobre $\mathbb{T}$: $\{z_j\}_{j=1}^n$ y pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ tales que $I_\omega(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(z_j) = I_\omega(f),\ \forall f \in \mathcal{R}_{n-1,n-1}$, se dirá el "dominio máximo de validez". Está claro que cuando $\alpha_k = 0,\ \forall k \geq 1$, entonces $\mathcal{R}_{n-1,n-1} = \Delta_{-(n-1),n-1}$ y, en el Capítulo 3 vimos cómo elegir los nodos sobre $\mathbb{T}$ para alcanzar exactitud en tal subespacio. A tal efecto, recuérdese el papel jugado por los polinomios de Szegő, por lo que introduciremos funciones racionales ortogonales que generalizan tales polinomios mediante la siguiente

Definición 4.1 *Sea $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{D}$. Entonces, una sucesión $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ se dirá una sucesión de funciones racionales de Szegő respecto a la función peso $\omega(\theta)$ y $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, si verifica los siguientes requisitos:*

1. $\psi_0(z) = cte \neq 0$.
2. $\psi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$.
3. $\langle \psi_n, \psi_m \rangle_\omega = k_n \delta_{n,m}$, *con* $k_n > 0$.

Ahora bien, ¿existirá tal sucesión? ¿Será única? Evidentemente, dado que $\mathcal{L}_n$ es un espacio con producto interior $\langle .,. \rangle_\omega$ de dimensión $n+1$, aplicando el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$, en este orden, podemos conseguir una base ortogonal $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$, verificando:

$$\psi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1},\ \langle \psi_n, \psi_m \rangle_\omega = 0,\ 0 \leq m \leq n-1.$$

Si repetimos el proceso para $n = 1, 2, \ldots,$ se obtiene la sucesión $\{\psi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, que verifica los requisitos de la Definición 4.1, viendo que $\psi_n(z)$ queda unívocamente determinada salvo factor multiplicativo constante. Cuando en la Definición 4.1, exigimos $\langle \psi_n, \psi_m \rangle_\omega = \delta_{n,m}$, se dirá que $\{\psi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ representa la sucesión ortonormal de funciones racionales de Szegő para $\omega(\theta)$. Conviene ahora fijar algunas notaciones y relaciones elementales entre las funciones racionales de Szegő. Así, dado que $\psi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$, podemos escribir

$$\psi_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k B_k(z),\ \alpha_n \neq 0,$$

de forma que α_n se dirá el "coeficiente director" de $\psi_n(z)$. Cuando $\alpha_n = 1$, a la sucesión $\{\psi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ la denominaremos mónica. Por otro lado, si definimos $\varphi_n(z) = \frac{\psi_n(z)}{\|\psi_n\|_\omega}$, vemos que $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_\omega = 1$ y la sucesión $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ representará la familia o sucesión ortonormal de funciones racionales de Szegő para $\omega(\theta)$.

Obsérvese que si escribimos $\varphi_n(z) = k_n B_n(z) + \ldots + k_0 B_0(z)$, entonces, tomando $k_n > 0$, la sucesión ortonormal quedará unívocamente determinada.

Observación 34 *Téngase en cuenta que si $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia ortonormal de funciones racionales de Szegő, entonces $\widetilde{\varphi}_n(z) = \gamma_n \varphi_n(z)$, con $\gamma_n \in \mathbb{T},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ también lo es.*

Siguiendo un proceso paralelo al realizado al caso polinómico, conviene extender el concepto de "polinomio recíproco" al caso racional. Recordar que, dado P un polinomio de grado exacto n, definíamos su recíproco P^* como:

$$P^*(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})} = z^n \overline{P}(1/z) = z^n P_*(z).$$

Dado que la operación "sub-estrella" se puede aplicar a cualquier función f (convenientemente definida) y que en el caso racional $B_n(z)$ es el "equivalente" a z^n, tenemos la siguiente

Definición 4.2 *Sea $f_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$, entonces, se define su función recíproca f_n^* como:*

$$f^*(z) = B_n(z) f_{n^*}(z) = B_n(z) \overline{f_n(1/\bar{z})}.$$

Ejercicio 6.10: *Comprobar que si* $f_n \in \mathcal{L}_n \backslash \mathcal{L}_{n-1}$*, entonces,* $f_n^* \in \mathcal{L}_n$.

Por otro lado, recuérdese que si $\rho_n(z)$ es el enésimo polinomio de Szegő (mónico), entonces, $\rho_n^*(z)$ verificaba las condiciones de ortogonalidad:

$$\langle \rho_n^*, z^k \rangle_\omega = 0,\ 1 \leq k \leq n,$$

lo cual significa que $\langle \rho_n^*, P(z) \rangle_\omega = 0$, para todo polinomio P de grado a lo sumo n, tal que $P(0) = 0$. Definamos ahora:

$$\mathcal{L}_n\left(\alpha_n\right) = \{f \in \mathcal{L}_n :\ f(\alpha_n) = 0\}.$$

Tenemos la siguiente:

Proposición 4.6.6 *1.* $\mathcal{L}_n\left(\alpha_n\right) = \xi_n \mathcal{L}_{n-1}$, $\xi_n = \xi_n(z) = \frac{\overline{\alpha}_n}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z}$.

2. Si $\psi_n(z)$ *denota la enésima función racional de Szegő con respecto a* $\omega(\theta)$*, entonces:*

$$\langle \psi_n^*, f \rangle_\omega = 0,\ \forall f \in \mathcal{L}_n\left(\alpha_n\right),\ \left(\psi_n^* \perp \mathcal{L}_n\left(\alpha_n\right)\right).$$

Demostración:

1. Hágase como ejercicio.

2. Tomemos $f \in \mathcal{L}_n\left(\alpha_n\right)$, entonces, por 1., $f(z) = \xi_n(z) g(z)$, con $g \in \mathcal{L}_{n-1}$. Además, se tiene que $|\xi_n(z)|^2 = 1,\ \forall z \in \mathbb{T}$. Por tanto, $\forall z \in \mathbb{T}:$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n^*, f \rangle_\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} B_n(z) \psi_{n^*}(z) \overline{f(z)} \omega(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \xi_n(z) B_{n-1}(z) \overline{\psi_n(z) \xi_n(z) g(z)} \omega(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |\xi_n(z)|^2 \overline{\psi_n(z)} B_{n-1}(z) g_*(z) \omega(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_n(z)} g^*(z) \omega(\theta) d\theta = \overline{\langle \psi_n, g^* \rangle_\omega} = 0, \end{aligned}$$

pues, si $g \in \mathcal{L}_{n-1}$, también $g^* \in \mathcal{L}_{n-1}$. □

Como vimos en el Capítulo 2, los ceros de $\rho_n(z)$ están en $\mathbb{D}$. De modo análogo, se tiene el siguiente:

Teorema 4.16 *Sea* $\psi_n(z)$ *la enésima función racional de Szegő para* $\omega(\theta)$*, con* $n = 1, 2, \ldots$*. Entonces, todos sus ceros se encuentran en* $\mathbb{D}$.

Observación 35 *Hay que recordar que para nuestros intereses, que no son otros sino "construir fórmulas de cuadratura con nodos sobre $\mathbb{T}$", el Teorema anterior resulta tremendamente negativo. Al igual que en el caso polinómico, los ceros de las funciones racionales ortogonales no se pueden utilizar como nodos de las fórmulas de cuadratura.*

Al objeto de subsanar los inconvenientes señalados en la observación anterior, se introducen los conceptos de "para-ortogonalidad e invarianza" mediante

Definición 4.3 *Sea $X \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$, entonces X se dirá para-ortogonal con respecto a ω, sí y sólo si,*

1. $\langle X, 1\rangle_\omega \neq 0$, $\langle X, B_n\rangle_\omega \neq 0$.
2. $\langle X, f\rangle_\omega = 0$, $\forall f \in \mathcal{L}_{n-1} \bigcap \mathcal{L}_n(\alpha_n)$.

Definición 4.4 *Sea $X \in \mathcal{L}_n$, entonces X se dirá "invariante", sí y sólo si,*

$$\exists\, k \neq 0 : \; X^*(z) = kX(z), \; \forall z \in \mathbb{C}.$$

Podemos encontrar funciones en $\mathcal{L}_n$ satisfaciendo las definiciones anteriores mediante la siguiente:

Proposición 4.6.7 *Sea $X_n = c_n \left(\psi_n(z) + \tau_n \psi_n^*(z)\right)$, con $c_n \neq 0$ y $\tau_n \in \mathbb{T}$. Entonces, X_n es para-ortogonal e invariante.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{L}_{n-1} \bigcap \mathcal{L}_n(\alpha_n)$. Hemos de probar que $\langle X_n, f\rangle_\omega = 0$. Ahora bien, $f \in \mathcal{L}_{n-1}$, por tanto $\langle \psi_n, f\rangle_\omega = 0$. Además, $f \in \mathcal{L}_n(\alpha_n)$, por consiguiente, $\langle \psi_n^*, f\rangle_\omega = 0$. Luego,

$$\langle X_n, f\rangle_\omega = c_n \left(\langle \psi_n, f\rangle_\omega + \tau_n \langle \psi_n^*, f\rangle_\omega\right) = 0.$$

Por otro lado,

$$\langle X_n, 1\rangle_\omega = c_n \left(\langle \psi_n, 1\rangle_\omega + \tau_n \langle \psi_n^*, 1\rangle_\omega\right) = c_n \tau_n \langle \psi_n^*, 1\rangle_\omega \neq 0.$$

De igual modo, dado que por propia definición, $B_n(z) \in \xi_n \mathcal{L}_{n-1} = \mathcal{L}_(\alpha_n)$, entonces:

$$\langle X_n, B_n\rangle_\omega = c_n \left(\langle \psi_n, B_n\rangle_\omega + \tau_n \langle \psi_n^*, B_n\rangle_\omega\right) = c_n \langle \psi_n, B_n\rangle_\omega \neq 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
X_n^*(z) &= B_n(z)X_{n^*}(z) = B_n(z)\overline{c}_n\left(\psi_{n^*}(z) + \overline{\tau}_n\overline{\psi_n^*\left(1/\overline{z}\right)}\right)\\
&= \overline{c}_n\left(B_n(z)\psi_{n^*}(z) + \overline{\tau}_n B_n(z)B_{n^*}(z)\overline{\psi_n^*\left(1/\overline{z}\right)}\right)\\
&= \overline{c}_n\left(\psi_{n^*}(z) + \overline{\tau}_n\psi_n(z)\right) = \tfrac{\overline{c}_n}{\tau_n}\left(\psi_n(z) + \tau_n\psi_n^*(z)\right)\\
&= \tfrac{\overline{c}_n}{c_n\tau_n}c_n\left(\psi_n(z) + \tau_n\psi_n^*(z)\right) = k_nX_n(z),
\end{aligned}$$

donde $k_n = \frac{\overline{c}_n}{c_n\tau_n}$. $\square$

Además, en [7] y siguiendo fielmente los pasos del caso polinómico, se encuentra demostrado el siguiente resultado fundamental:

Teorema 4.17 *Sea* $X \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$, *para-ortogonal e invariante. Entonces*

1. $X_n = c_n\left(\psi_n(z) + \tau_n\psi_n^*(z)\right),\ c_n \neq 0,\ \tau_n \in \mathbb{T}$.
2. $X_n(z)$ *tiene exactamente* n *ceros distintos sobre* $\mathbb{T}$.

Ya estamos en condiciones de enunciar el principal resultado de esta sección:

Teorema 4.18 *(Cuadraturas Racionales de Szegő).*

Consideremos una fórmula de cuadratura con nodos distintos sobre $\mathbb{T}$ *del tipo usual:* $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$. *Entonces,* $I_n(f)$ *tiene dominio de validez en* $\mathcal{R}_{n-1,n-1}$, *sí y sólo si,*

1. $I_n(f)$ *es de tipo interpolatorio en* $\mathcal{R}_{p,q}$ *con* p *y* q *enteros no negativos, arbitrarios, verificando:* $p+q = n-1$.
2. *Si hacemos* $X_n(z) = \frac{N_n(z)}{\pi_n(z)}$, *siendo* $N_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ *el polinomio nodal, entonces,* X_n *es para-ortogonal e invariante. Además, los pesos* $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ *son positivos.*

Demostración: "$\Rightarrow$"

1. Sean p y q enteros no negativos, tales que: $p+q = n-1$. Entonces $\mathcal{R}_{p,q} \subset \mathcal{R}_{n-1,n-1}$ y puesto que $I_n(f)$ es exacta, por hipótesis, en $\mathcal{R}_{n-1,n-1}$, también lo será en $\mathcal{R}_{p,q}$ y, consecuentemente, es de tipo interpolatorio en dicho subespacio.

2. Veamos en primer lugar que $X_n(z)$ es invariante. En efecto:

$$\begin{aligned} X_n^*(z) &= B_n(z)X_{n^*}(z) = B_n(z = \prod_{j=1}^n \overline{z}_j \frac{z-z_j}{\alpha_j - z} \\ &= \eta_n \frac{\omega_n(z)}{\pi_n(z)}(-1)^n \prod_{j=1}^n \overline{z}_j \frac{N_n(z)}{\omega_n(z)} = k_n \frac{N_n(z)}{\pi_n(z)} \\ &= k_n X_n(z), \end{aligned}$$

con $k_n = \eta_n(-1)^n \prod_{j=1}^n \overline{z}_j$ y $\eta_n = (-1)^n \prod_{j=1}^n \frac{\overline{\alpha}_j}{|\alpha_j|}$, es decir: $k_n = \prod_{j=1}^n \frac{\overline{\alpha_j z_j}}{|\alpha_j|} \in \mathbb{T}$.

Para probar la "para-ortogonalidad", debemos probar en primer lugar que:

$$\langle X_n, f\rangle_\omega = 0,\ \forall f \in \mathcal{L}_{n-1} \bigcap \mathcal{L}_n(\alpha_n).$$

A tal efecto, conviene utilizar una nueva base $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ de $\mathcal{L}_n$ y dada por:

$$U_0 = 1,\ U_k = \frac{(z-\tau)B_{k-1}}{1-\overline{\alpha}_k z},\ k = 1, \ldots, n.$$

Comprobándose fácilmente que es una base (hágase como ejercicio) para cualquier valor $\tau \in \mathbb{C}$. Tomamos en particular $\tau = \alpha_n$, resultando:

$$U_0 = 1,\ U_k = \frac{(z-\alpha_k)B_{k-1}}{1-\overline{\alpha}_k z},\ k = 1, \ldots, n.$$

Así, si $f \in \mathcal{L}_{n-1} \bigcap \mathcal{L}_n(\alpha_n)$, entonces $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k U_k(z)$, con $a_0 = 0$, pues $f(\alpha_n) = 0$. Consecuentemente, tenemos que probar que $\langle X_n, f\rangle_\omega = 0,\ 1 \leq k \leq n-1,\ (n \geq 2)$. Ahora bien, $\left(z = e^{i\theta}\right)$:

$$\langle X_n, U_k\rangle_\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X_n(z)\overline{U_k(z)}\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} X_n(z)U_{k^*}(z)\omega(\theta)d\theta,$$

con $U_{k^*}(z) = \frac{\gamma_k(1-\alpha_n z)\pi_{k-1}(z)}{\omega_k(z)},\ \gamma_k \neq 0$. Así,

$$\begin{aligned} \langle X_n, U_k\rangle_\omega &= \gamma_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{N_n(z)(1-\overline{\alpha}_n z)\pi_{k-1}(z)}{\pi_n(z)\omega_k(z)} \\ &= \gamma_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{N_n(z)\pi_{k-1}(z)}{\pi_{n-1}(z)\omega_k(z)}\omega(\theta)d\theta \\ &= \gamma_k \int_{-\pi}^{\pi} g_{k,n}(z)\omega(\theta)d\theta \\ &= \gamma_k I_n(g_{k,n}) = 0, \end{aligned}$$

ya que $g_{k,n} \in \mathcal{R}_{-(n-1),n-1}$ y $g_{k,n}(z_j) = 0, \ j = 1, \ldots, n$. De aquí concluimos que

$$\langle X_n, U_k \rangle_\omega = 0, \ 1 \leq k \leq n-1,$$

y por consiguiente,

$$\langle X_n, f \rangle_\omega = 0, \ \forall f \in \mathcal{L}_{n-1} \bigcap \mathcal{L}_n(\alpha_n).$$

Veamos ahora que $\langle X_n, 1 \rangle_\omega \langle X_n, B_n \rangle_\omega \neq 0$.

En efecto, si $\langle X_n, 1 \rangle_\omega = 0$, entonces $\langle X_n, U_k \rangle_\omega = 0, \ 0 \leq k \leq n-1$ y como $\{U_k\}_{k=0}^{n-1}$ es una base de $\mathcal{L}_{n-1}$, resultará $X_n \perp \mathcal{L}_{n-1}$. Por consiguiente, $X_n(z) = c_n \psi_n(z), \ c_n \neq 0$ y $X_n(z)$ no podría tener sus ceros sobre $\mathbb{T}$. De modo análogo se prueba que $\langle X_n, B_n \rangle_\omega \neq 0$.

“ $\Leftarrow$” Sea ahora $X_n(z)$ para-ortogonal e invariante. Sabemos que $X_n(z)$ tiene n ceros simples $\{z_j\}_{j=1}^n$ sobre $\mathbb{T}$, y por tanto, tomando p y q enteros no negativos tales que $p + q = n - 1$, podemos determinar de forma única los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ verificándose:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j) = I_\omega(f), \ \forall f \in \mathcal{R}_{p,q}.$$

Ahora seguimos de nuevo el esquema clásico en la demostración de este tipo de resultados. Tomemos $T \in \mathcal{R}_{n-1,n-1}$ y definamos $R(z) = T(z) - L_n(z)$, donde $L_n \in \Delta_{-p,q}$ interpolando a R en los nodos $\{z_j\}_{j=1}^n$, es decir:

$$L_n(z_j) = T(z_j), \ j = 1, \ldots, n.$$

Claramente, $R \in \mathcal{R}_{n-1,n-1}$ y $R(z_j) = 0, \ j = 1, \ldots, n$. Por consiguiente, $R(z) = \frac{N_n(z)S(z)}{\omega_{n-1}(z)\pi_{n-1}(z)}$, con $N_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ y $S \in \Pi_{n-2}$. Luego:

$$R(z) = \frac{N_n(z)S(z)}{\pi_n(z)} \frac{(1 - \overline{\alpha}_n z)S(z)}{\omega_{n-1}(z)} = X_n(z) g_{n^*}(z),$$

donde $g_n(z) = \frac{(z-\alpha_n)S^*(z)}{\pi_{n-1}(z)} \in \mathcal{L}_{n-1} \bigcap \mathcal{L}_n(\alpha_n)$.

Téngase en cuenta que

$$g_{n^*}(z) = \frac{\left(\frac{1}{z} - \overline{\alpha}_n\right) \overline{S^*\left(1/\bar{z}\right)}}{\overline{\pi_{n-1}\left(1/\bar{z}\right)}} = \frac{(1 - \overline{\alpha}_n z) z^{-n+1} S(z)}{\omega_{n-1}(z) z^{-n+1}} = \frac{(1 - \overline{\alpha}_n z) S(z)}{\omega_{n-1}(z)}.$$

Luego, $\left(z = e^{i\theta}\right)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(z)\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} X_n(z) g_{n^*}(z)\omega(\theta)d\theta = \langle X_n, g_n\rangle_\omega = 0,$$

por la para-ortogonalidad de $X_n(z)$ y en consecuencia, ya que $L_n \in \Delta_{-p,q}$:

$$I_\omega(T) = I_\omega(L_n) = I_n(L_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_n(z_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(z_j) = I_n(T).$$

Falta probar que los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, son positivos. Para ello, tomemos $R_j \in \mathcal{L}_{n-1}$, verificando $L_j(z_k) = \delta_{j,k},\ j,k = 1,\ldots,n$ ($L_j(z)$ está unívocamente determinado, $\forall j = 1,\ldots,n$).

Entonces, $\forall z \in \mathbb{T} : |L_j(z)|^2 = L_j(z)\overline{L_j(z)} = L_j(z)L_{j^*}(z) = R_j(z)$, de modo que $R_j \in \mathcal{R}_{n-1,n-1}$ y resulta, para $j = 1,\ldots,n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |L_j(z)|^2\omega(\theta)d\theta = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |L_j(z_k)|^2 = \lambda_j > 0.$$

$\square$

En resumen, fijado $n \geq 1$, hemos deducido una familia uniparamétrica de fórmulas de cuadratura de la forma

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j),$$

dependiendo de un parámetro $\tau \in \mathbb{T}$, tales que:

1. Los nodos son los ceros de $\psi_n(z) + \tau\psi_n^*(z)$, con $\psi_n(z)$ la enésima función racional de Szegő respecto a $\omega(\theta)$.

2. Los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, son positivos.

3. Son exactas en $\mathcal{R}_{n-1,n-1}$ (dominio máximo de validez).

Tales fórmulas fueron inicialmente introducidas por A. Bultheel, et al. en [9] y se denominan "Cuadraturas racionales de Szegő". Estas fórmulas extienden al caso de funciones racionales, las fórmulas de Szegő estudiadas en el Capítulo 3.

Con todo, cabría preguntarse, dado que $I_n(f)$ depende de $2n$ parámetros y $dim\,(\mathcal{R}_{n-1,n-1}) = 2n-1$, si pudieran existir fórmulas de cuadratura con nodos sobre $\mathbb{T}$ que fuesen exactas, bien en $\mathcal{R}_{n,n-1}$ ó en $\mathcal{R}_{n-1,n}$. La respuesta (negativa) la hallaremos en:

PROPOSICIÓN 4.6.8 *No pueden existir fórmulas de cuadratura* $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j)$, *con nodos distintos sobre* $\mathbb{T}$ *que sean exactas en* $\mathcal{R}_{n,n-1}$ *ó en* $\mathcal{R}_{n-1,n}$.

Demostración: Considérese la base $\{U_k\}_{k=0}^{n}$ utilizada en la prueba del teorema anterior y complétese la demostración como ejercicio. $\square$

EJEMPLO 4.2 *Las funciones racionales de Szegő o funciones racionales ortogonales sobre la circunferencia unidad, aparecieron motivadas, tanto por problemas teóricos (Problemas de Interpolación de Pick-Nevalinna), como por problemas aplicados de la Física o la Ingeniería (estimadores racionales para sucesiones estocásticas estacionarias), pero careciéndose, hasta principios de la década de los noventa, de ejemplos de tales funciones racionales similares a los que se ya se conocían para el caso polinómico, tanto en el eje real como en la circunferencia unidad. El primer ejemplo que se nos podría ocurrir es el generado por la función peso* $\omega(\theta) = 1$, *conociéndose las funciones racionales ortogonales correspondientes como "bases de Malmqhist", de gran aplicabilidad en el procesamiento de señales digitales. Tales funciones racionales fueron estudiadas por M. M. Djrbashian en los años sesenta, si bien, sus trabajos no se conocieron hasta finales de los ochenta, que fue cuando el grupo Bultheel-González-vera- Hendriksen-Njáastad comenzó el estudio de las funciones racionales ortogonales de forma similar al estudio de los polinomios. Aquí nos vamos a referir, como ejemplo ilustrativo, a la función peso que figura en el núcleo de Poisson, a saber:*

$$\omega(\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi}\frac{1}{2-r\cos\theta+r^2},\ r\in(0,1),\ \theta\in[-\pi,\pi], \tag{4.64}$$

ó más generalmente

$$\omega(\theta) = \frac{1-|r|^2}{2\pi|z-r|},\ r\in\mathbb{D},\ z=e^{i\theta}\in\mathbb{T}, \tag{4.65}$$

(Obsérvese que la función peso está normalizada de modo que $\int_{-\pi}^{\pi}\omega(\theta)d\theta = 1$ *y que cuando* $r=0$ *entonces:* $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$*).*

Vamos a determinar la sucesión de funciones racionales de Szegő ortonormales: $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Sabemos que* $\varphi_0 = 1$ *y que para* $n = 1, 2, \ldots$, φ_n *ha de verificar las condiciones:*

1. $\varphi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$,

2. $\langle \varphi_n, B_k \rangle_\omega = 0, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$

3. $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_\omega = 1.$

Ahora bien, $\left(z = e^{i\theta}\right)$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, B_k \rangle_\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(z)\overline{B_k(z)}\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\varphi_n(z)(1-|r|^2)}{B_k(z)(z-r)(1-\overline{r}z)}d\theta \\ &= \tfrac{1-|r|^2}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \tfrac{\varphi_n(z)}{B_k(z)(z-r)(1-\overline{r}z)}dz, \ k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Aquí vemos que el denominador $B_k(z)(z-r)(1-\overline{r}z)$ *se anula en* $z = \alpha_i, \ i = 1, \ldots, k$ *y* $z = r$, *los cuales están en* $\mathbb{D}$ *mientras que el otro cero* $z = \frac{1}{\overline{r}} \in \mathbb{E}$. *Tomando* φ_n *de modo que se anule en* $z = \alpha_i, \ i = 1, \ldots, n-1$ *y en* $z = r$, *la integral anterior será cero. Así pues,* $\varphi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$, *deberá ser de la forma:*

$$\varphi_n(z) = k_n \frac{(z-r)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{n-1})}{\pi_n(z)}, \ k_n \neq 0,$$

o de forma equivalente,

$$\varphi_n(z) = k_n \frac{(z-r)B_n(z)}{z-\alpha_n} \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}, \ k_n \neq 0.$$

Así, para $0 \leq k \leq n-1$:

$$\langle \varphi_n, B_k \rangle_\omega = k_n \frac{1-|r|^2}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{B_{n/k}(z)}{(z-\alpha_n)(1-\overline{r}z)}dz = 0,$$

donde $B_{n/k} = \frac{B_n}{B_k}$ *y por consiguiente cumple:* $B_{n/k}(\alpha_n) = 0$.

Tenemos así determinadas nuestras funciones racionales ortogonales salvo factor multiplicativo $k_n \neq 0$, *el cual se fija por la condición:* $\left(z = e^{i\theta}\right)$

$$\begin{aligned} 1 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_\omega &= |k_n|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{(z-r)B_n(z)}{(z-\alpha_n)} \overline{\tfrac{(z-r)B_n(z)}{(z-\alpha_n)}}\omega(\theta)d\theta \\ &= |k_n|^2 \tfrac{1-|r|^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{z}{(z-\alpha_n)(1-\overline{\alpha}_n z)}dz = |k_n|^2 \tfrac{1-|r|^2}{1-|\alpha_n|^2}, \end{aligned}$$

y por tanto, $k_n = \left(\frac{1-|\alpha_n|^2}{1-|r|^2}\right)^{1/2} e^{i\gamma_n}$, $\gamma_n \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, hemos convenido que el coeficiente director de $\varphi_n(z)$, *ha de ser positivo, viniendo dado este por* $\overline{\varphi_n^*(\alpha_n)}$. *Ahora bien,* $\varphi_{n^*}(z) = \overline{k}_n \frac{1-\overline{r}z}{1-\overline{\alpha}_n z} \frac{1}{B_n(z)}$, *luego,*

$$\varphi_n^*(z) = B_n(z)\varphi_{n^*}(z)\overline{k}_n \frac{1-\overline{r}z}{1-\overline{\alpha}_n z},$$

y de aquí, $\overline{\varphi_n^*(\alpha_n)} = k_n \frac{1-r\overline{\alpha}_n}{1-r^2}$, *lo que nos permite concluir:*

$$\gamma_n = -arg(1-r\overline{\alpha}_n),$$

y tener unívocamente determinada una sucesión de funciones ortonormales de Szegő, como sigue:

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = 1, \qquad\qquad \varphi_n = k_n \frac{(z-r)B_n(z)}{z-\alpha_n}, \\ &\text{con :} \\ &k_n = \left(\frac{1-|\alpha_n|^2}{1-|r|^2}\right)^{1/2} e^{i\gamma_n}, \quad \gamma_n = -arg(1-r\overline{\alpha}_n). \end{aligned} \tag{4.66}$$

Casos particulares:

1. $r = 0$, $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$. *Ahora,* $\gamma_n = -arg(1-r\overline{\alpha}_n) = -arg(1) = 0$ *y*

$$\varphi_n = \sqrt{1-|\alpha_n|^2}\frac{zB_n(z)}{z-\alpha_n}. \tag{4.67}$$

Cuando $\alpha_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots$. *Entonces,* $B_n(z) = z^n$ *y* $\varphi_n(z) = z^n$

2. $r = \alpha_n$:

$$\gamma_n = -arg(1-|\alpha_n|^2) = 0, \text{y} \quad \varphi_n(z) = B_n(z).$$

3. $r \neq 0$, $\alpha_k = 0, \ k = 1, 2, \ldots$. *Entonces:*

$$\varphi_n(z) = \frac{(z-r)B_n(z)}{z} = (z-r)z^{n-1},$$

coincidiendo con los resultados obtenidos en el Capítulo 3.

Veamos a continuación las fórmulas de Szegő para la función peso $\omega(\theta)$ dada por (4.64) ó (4.65):

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j),$$

donde los nodos $\{z_j\}_{j=1}^n$ son los ceros de $\psi_n(z) + \widehat{\tau}\psi_n^*(z)$, $|\widehat{\tau}| = 1$. Teniendo en cuenta la forma de φ_n, se deduce:

$$X_n = k_n \frac{(z-r)B_n(z)}{z-\alpha_n} + \widehat{\tau}\overline{k}_n \frac{1-\overline{r}z}{1-\overline{\alpha}_n z} = \frac{N_n(z)}{\pi_n(z)} \in \mathcal{L}_n. \qquad (4.68)$$

Así la ecuación $X_n(z) = 0$ toma la forma:

$$\frac{(z-r)B_n(z)}{z-\alpha_n} + \tau \frac{1-\overline{r}z}{1-\overline{\alpha}_n z} = 0.$$

Usando $B_n(z) = \eta_n \frac{\pi_n(z)}{\omega_n(z)}$, $|\eta_n| = 1$, logramos

$$X_n(z) = 0 \Leftrightarrow (z-r)\eta_n\omega_{n-1}(z) + \tau\pi_{n-1}(z)(1-\overline{r}z) = 0.$$

Dado que $|\eta_n| = 1$, podemos escribir:

$$(z-r)\omega_{n-1}(z) + \tilde{\tau}\pi_{n-1}(z)(1-\overline{r}z) = 0, \ |\tilde{\tau}| = 1,$$

y por consiguiente, cuando $r = 0$, los nodos $\{z_j\}_{j=1}^n$ serán los nodos de la ecuación

$$z\omega_{n-1}(z) + \tilde{\tau}\pi_{n-1}(z) = 0,$$

ó

$$z(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{n-1}) + \tilde{\tau}(1-\overline{\alpha}_1 z)\ldots(1-\overline{\alpha}_{n-1}z) = 0.$$

En cuanto a los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, se tiene, para todo $j = 1, \ldots, n:$

$$\lambda_j = \int_{-\pi}^{\pi} L_j\left(e^{i\theta}\right)\omega(\theta)d\theta,$$

con $L_j \in \mathcal{L}_{n-1}$ tal que $L_j(z_k) = \delta_{j,k}$. Por consiguiente: $\left(z = e^{i\theta}\right)$

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \int_{\mathbb{T}} \tfrac{X_n(z)}{z-z_j} \tfrac{1-\overline{\alpha}_n z}{1-\overline{\alpha}_n z_j} \tfrac{1-|r|^2}{X_n'(z_j)(z-r)(1-\overline{r}z)} dz \\ &= \tfrac{X_n(r)}{r-z_j} \tfrac{1-\overline{\alpha}_n r}{1-\overline{\alpha}_n z_j} \tfrac{1}{X_n'(z_j)}, \ j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Por otra parte, $X_n(z) = \frac{N_n(z)}{\pi_n(z)}$*, con* $N_n(z) = (z-r)\eta_n\omega_{n-1}(z) + \tau\pi_{n-1}(z)(1-\overline{r}z)$ *y dado que* $X_n(z_j) = 0,\ j = 1,\ldots,n$*, entonces,* $X_n'(z_j) = \frac{N_n'(z_j)}{\pi_n(z_j)}$*, deduciéndose:*

$$\pi_n(z_j) = -(1-\overline{\alpha}_n z_j)(z_j - r)\eta_n \frac{\omega_{n-1}(z_j)}{\tau(1-rz_j)},$$

lo cual implica:

$$\lambda_j = \eta_n \frac{1-|r|^2}{1-\overline{r}z_j}\frac{\omega_{n-1}(z_j)}{N_n'(z_j)},\ j = 1,\ldots,n. \tag{4.69}$$

De la propia definición de

$$\pi_k(z) = \textstyle\prod_{j=1}^{k}(1-\overline{\alpha}_j z) \quad \text{y} \quad \omega_k(z) = \prod_{j=1}^{k}(z-\alpha_j),$$

se deduce fácilmente que

$$\pi_k'(z_j) = -\pi_k(z_j)\textstyle\sum_{i=1}^{k}\frac{\overline{\alpha}_i}{1-\overline{\alpha}_j z_j}, \quad \text{y} \quad \omega_k'(z_j) = \omega_k(z_j)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{z_j-\alpha_j},$$

lo cual nos permite deducir de (4.69):

$$\lambda_j = \frac{1-|r|^2}{1-|r|^2 + |z_j - r|^2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|\alpha_k|^2}{|z_j-\alpha_k|^2}},\ j = 1,\ldots,n, \tag{4.70}$$

quedando el carácter positivo de los pesos claramente constatado.

De nuevo, cuando $\alpha_i = 0,\ i = 1,2,\ldots,$ *resulta*

$$\lambda_j = \frac{1-|r|^2}{1-|r|^2+(n-1)|z_j-r|^2},\ j = 1,\ldots,n, \tag{4.71}$$

que son los pesos de la fórmula de Szegő polinómica para el núcleo de Poisson como ya se dedujo en el Capítulo 3.

Finalmente, cuando $r = 0$*, entonces* $\omega(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ *y*

$$\lambda_j = \frac{1}{n},\ j = 1,\ldots,n,$$

recuperándose el ejemplo que motivó el principio del Capítulo 2, la construcción de fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad.

Apéndice A

Ejercicios Propuestos

Los ejercicios que se detallan a continuación son una recopilación de aquellos problemas que hemos propuesto a lo largo de esta memoria (en la forma de "Teorema" o "Proposición" sin demostración), en cada uno de los cuatro capítulos anteriores.

Capítulo 1:

1. Dado cualquier número natural $n \geq 1$, probar que existe un polinomio $P_n(x)$ de grado exacto n (determinado salvo factor multiplicativo) que es ortogonal a cualquier polinomio de grado a lo sumo $n-1$.

2. Si $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ es la $n-$ésima fórmula Gaussiana para $I_\omega(f)$, demostrar que los pesos $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ vienen dados por

$$A_j = \frac{1}{(Q'_n(x_j))^2} \int_a^b \left[\frac{Q_n(x)}{(x-x_j)} \right]^2 \omega(x)dx \ \ , \ j = 1, \ldots, n$$

   donde $l_j(x) = \frac{Q_n(x)}{(x-x_j)Q'_n(x_k)}$ para $j = 1, \ldots, n$, siendo $Q_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$ el polinomio nodal.

3. Considérese la familia de polinomios dados para $n = 0, 1, 2, \ldots$ por

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \cos\theta = x.$$

Demostrar que la sucesión $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ constituye la familia de polinomios ortogonales de Chebyshev de segunda especie, comprobándose que

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \\ \frac{\pi}{2} & si \quad n = m \end{cases}$$

Probar que dicha familia satisface la relación de recurrencia

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

con $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$.

4. Sea $I_{n+2}(f) = B_1 f(a) + B_2 f(b) + \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ la fórmula de "Gauss-Lobatto" para una función peso $\omega(x)$ en $[a, b]$, que sabemos es exacta en Π_{2n+1}. Pruébese que sus pesos son positivos.

Capítulo 2:

1. Utilizar la fórmula Christoffel-Darboux para $\xi = z$, esto es:

$$K_{n-1}(z, z) = \frac{|\varphi_n^*(z)|^2 - |\varphi_n(z)|^2}{1 - |z|^2},$$

para demostrar que los ceros del enésimo polinomio ortonormal de Szegő, φ_n, están en $\mathbb{D}$.

2. Sea $a_k(z) = \sum_{i=0}^{k} a_{k,i} z^i$, el polinomio predictor progresivo asociado a una señal $s(t)$. Sabemos que, por el algoritmo de Levinson, sus coeficientes satisfacen la relación $a_{k,i} = a_{k-1,i} + \delta_k a_{k-1,k-i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Si consideramos su polinomio recíproco $b_k(z) = a_k^*(z)$ (polinomio predictor regresivo), demostrar que la fórmula anterior es equivalente a la relación de recurrencia

$$b_k(z) = zb_{k-1}(z) + \bar{\delta}_k b_{k-1}^*(z).$$

3. Consideremos las funciones peso de Chebyshev en $[-\pi, \pi]$:

$$\omega_1(\theta) = 1 + \cos\theta, \quad \text{y} \quad \omega_2(\theta) = 1 - \cos\theta.$$

Comprobar que la transformada de Herglotz-Riesz para ω_1 y ω_2 viene dada, respectivamente, por:

$$F_{\omega_1}(z) = \begin{cases} 1+z & \text{si} \quad |z|<1 \\ -\frac{1+z}{z} & \text{si} \quad |z|>1, \end{cases} \qquad F_{\omega_2}(z) = \begin{cases} 1-z & \text{si} \quad |z|<1 \\ \frac{1-z}{z} & \text{si} \quad |z|>1, \end{cases}$$

4. Calcular las medidas de segunda especie asociadas a

$$\omega_1(\theta) = 1+\cos\theta, \quad \text{y} \quad \omega_2(\theta) = 1-\cos\theta.$$

Capítulo 3:

1. Dados $2n+1$ puntos $\{y_j\}_{j=1}^{2n+1} \subset \mathbb{R}$, demostrar que existe un único polinomio trigonométrico $T_n(\theta) \in \mathcal{T}_n$ tal que $T_n(\theta_j) = y_j$, $j = 1, \ldots, 2n+1$, donde: $\theta_j \neq \theta_k$, $\forall j \neq k$. (Sugerencia: Utilizar la relación:

$$T_n(\theta) = L_n(z),\ z = e^{i\theta},\ L_n \in \Delta_{-n,n},$$

   y considerando el sistema homogéneo: $L(z_j) = 0$, $j = 1, \ldots, 2n+1$, comprobar que éste sólo admite la solución trivial).

2. Sean a y b reales no nulos y $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ los ceros de $af_n(\theta) + bg_n(\theta)$, siendo $f_0 \bigcup \{f_k, g_k\}_1^\infty$ un sistema bi-ortonormal. Sea $H_{2n} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ tal que

$$H_{2n}(\theta_j) = f(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq 2n$$

$$H'_{2n}(\theta_j) = f'(\theta_j), \quad 1 \leq j \leq 2n,\ j \neq k \in \{1, \ldots, 2n\}.$$

   Probar que entonces $I_\omega(H_{2n})$ coincide con $I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$, la correspondiente fórmula de cuadratura con el máximo grado de precisión trigonométrica.

3. Sea $B_{2n+1}(z)$ para-ortogonal e invariante con respecto a $\omega(\theta)$. Sea $\alpha \in \mathbb{T}$, un cero de $B_{2n+1}(z)$, por lo que podemos escribir:

$$B_{2n+1}(z) = (z-\alpha)\widetilde{B}_{2n}(z),\ |\alpha| = 1,$$

   siendo $\widetilde{B}_{2n}(z)$ de grado $2n$. Comprobar que $\widetilde{B}_{2n}(z)$ es invariante y para-ortogonal con respecto a la función peso $\widetilde{\omega}(\theta) = |e^{i\theta} - \alpha|^2 \omega(\theta)$.

4. Sea $(f_0, \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty})$ un sistema bi-ortogonal para $\omega(\theta)$ y sean a y b números reales tales que $|a|+|b|>0$. Demostrar que

$$T_n(\theta) = af_n(\theta) + bg_n(\theta) = e^{-in\theta} B_{2n}\left(e^{i\theta}\right),$$

donde $B_{2n}(z)$ es un polinomio de grado $2n$, para-ortogonal y $1-$invariante.

5. Sea $F_\omega(z)$ la transformada de Herglotz-Riesz para ω. Demostrar que, para $z \in \mathbb{D}$:

$$F_\omega(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\mu_0 + 2\sum_{k=1}^{n} \mu_k z^k\right),$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, siendo $\{\mu_k\}_k$ la sucesión de momentos trigonométricos con respecto a ω.

6. Demostrar que si una función peso $\omega(\theta)$, es simétrica, entonces sus momentos trigonométricos $\{\mu_k\}_k,\ k \in \mathbb{Z}$ son reales y, por lo tanto, también lo son los coeficientes de los correspondientes polinomios de Szegő $\rho_n(z)$.

7. Sea $J_n(F) = \sum_{j=1}^{m} B_j F(a_j) + \sum_{j=1}^{n} A_j F(x_j)$ una fórmula de cuadratura para $J_\sigma(F) = \int_a^b F(x)\sigma(x)dx$, donde los nodos distintos $\{a_j\}_{j=1}^{m}$ han sido prefijados en $[a,b]$ y los restantes $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ a determinar. Demostrar que $J_n(F)$ es exacta en Π_{2n+m-1} sí y sólo si

   (1) $J_n(F)$ es de tipo interpolatorio en Π_{n+m-1}.

   (2) Los nodos $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ son los ceros del $n-$ésimo polinomio ortogonal respecto a la función $\nu(x)\sigma(x)$ donde $\nu(x) = \prod_{j=1}^{m}(x-a_j)$. Además, si $\nu(x_k) \neq 0$ para $k=1,\ldots,n$ entonces los coeficientes $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ y $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ son positivos.

Capítulo 4:

1. Sea $\omega(\theta)$ una función L_1-integrable en $[-\pi,\pi]$ y sean $x_1,\ldots,x_n$, n nodos distintos sobre $\mathbb{T}$. Probar que entonces existen números

complejos $A_1, \ldots, A_n$, unívocamente determinados tales que

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) = I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \omega(\theta) d\theta, \ \forall f \in \Delta_{-p,q},$$

con p y q enteros no negativos verificando $p + q = n - 1$.

2. Dados los nodos $x_1, \ldots, x_n, \ \ x_i \neq x_j, \ \forall i \neq j, \ x_j \in \mathbb{T}, \ 1 \leq j \leq n$, sabemos que existe un único polinomio de Laurent $L_n(f, z) \in \Delta_{-p,q}$, tal que

$$L_n(f, x_j) = f(x_j), \ 1 \leq j \leq n.$$

Además, se tiene que

$$L_n(f, z) = \sum_{j=1}^{n} l_j(z) f(x_j),$$

siendo $l_j \in \Delta_{-p,q}$, tal que $l_j(x_k) = \delta_{j,k}$. Si $Q_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - x_j)$ (polinomio nodal), pruébese entonces que:

$$l_j(z) = \frac{x_j^p}{z^p} \frac{Q_n(z)}{(z - x_j) Q_n^{'}(x_j)}, \ j = 1, \ldots, n.$$

3. Sabemos que, fijada una sucesión $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ y considerando los factores de Blaschke, para $k = 1, 2, \ldots$:

$$\xi_k = \frac{\overline{\alpha}_k}{|\alpha_k|} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z},$$

podemos definir los productos de Blaschke $B_k(z), \ k = 0, 1, \ldots$:

$$B_0 \equiv 1, \ B_k(z) = B_{k-1}(z) \xi_k, \ k = 1, 2, \ldots,$$

pudiendo escribir:

$$B_n(z) = \eta_n \frac{\omega_n(z)}{\pi_n(z)},$$

con

$$\eta_n = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{\overline{\alpha}_j}{|\alpha_j|}, \qquad \omega_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - \alpha_j),$$
$$\pi_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(1 - \overline{\alpha}_j z) \quad .$$

Probar que: $\forall n \geq 0 : \ B_{n^*}(z) = \frac{1}{B_n(z)}$.

4. Si denotamos por $A = \{\alpha_k\}_{k=1}^{p} \subset \mathbb{D}$ y $\hat{A} = \left\{\frac{1}{\overline{\alpha}_k}\right\}_{k=1}^{p} \subset \mathbb{E}$. Probar que $\forall p, q$ enteros no negativos, $\mathcal{R}_{p,q}$ representa un sistema de Chebyshev sobre cualquier conjunto $X \in \mathbb{C} \setminus \left(A \cup \hat{A}\right)$, siendo $\mathcal{R}_{p,q} = \langle B_j(z) : \ -p \leq j \leq q\rangle$ y $B_{-k}(z) = \frac{1}{B_k(z)},\ k \geq 0$.

5. Sean p y q enteros no negativos tales que $p + q = n - 1$, sean $\{z_j\}_{j=1}^{n} \subset X \in \mathbb{C} \setminus \left(A \cup \hat{A}\right)$ n puntos distintos dados y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Demostrar que existe un único $R_n \in \mathcal{R}_{p,q}$ (definido en el problema anterior) verificando

$$R_n(z_j) = f(z_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

6. Sea

$$\Omega_n(z) = \frac{N_n(z)}{\omega_p(z)\pi_q(z)},$$

siendo $N_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ el polinomio nodal y definamos

$$\widetilde{L}_j(z) = \frac{z - \alpha_{p+1}}{z_j - \alpha_{p+1}} \frac{\Omega_n(z)}{(z - z_j)\Omega_n'(z_j)},\ j = 1, \ldots, n.$$

Compruébese que:

$$\widetilde{L}_j(z) = L_j(z),\ j = 1, \ldots, n,$$

con $L_j(z),\ j = 1, \ldots, n$ dado por

$$L_j(z) = \frac{1 - \overline{\alpha}_{q+1} z}{1 - \overline{\alpha}_{q+1} z_j} \frac{\Omega_n(z)}{(z - z_j)\Omega_n'(z_j)} \in \mathcal{R}_{p,q}.$$

7. Una fórmula de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(z_j)$, con nodos distintos sobre $\mathbb{T}$, tiene dominio de validez $\mathcal{R}_{p,q}$, sí y sólo si, es de tipo interpolatorio en tal dominio.

8. Comprobar que si $f_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$, entonces, $f_n^* \in \mathcal{L}_n$.

9. Sea $\rho_n(z)$ es el enésimo polinomio de Szegő (mónico), entonces, sabemos que el polinomio recíproco $\rho_n^*(z)$ verifica las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\langle \rho_n^*, z^k \rangle_\omega = 0,\ 1 \leq k \leq n,$$

lo cual significa que $\langle \rho_n^*, P(z)\rangle_\omega = 0$, para todo polinomio P de grado a lo sumo n, tal que $P(0) = 0$. Si definimos ahora:

$$\mathcal{L}_n(\alpha_n) = \{f \in \mathcal{L}_n : \ f(\alpha_n) = 0\}.$$

Probar que:

a) $\mathcal{L}_n(\alpha_n) = \xi_n \mathcal{L}_{n-1}$, $\xi_n = \xi_n(z) = \frac{\overline{\alpha}_n}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z}$.

b) Si $\psi_n(z)$ denota la enésima función racional de Szegő con respecto a $\omega(\theta)$, entonces:

$$\langle \psi_n^*, f\rangle_\omega = 0, \ \forall f \in \mathcal{L}_n(\alpha_n), \ (\psi_n^* \perp \mathcal{L}_n(\alpha_n)).$$

10. Sea el sistema $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{L}_n$ dado por:

$$U_0 = 1, \ U_k = \frac{(z-\tau)B_{k-1}}{1 - \overline{\alpha}_k z}, \ k = 1, \ldots, n.$$

Comprobar que dicho sistema es una base para cualquier valor $\tau \in \mathbb{C}$.

11. Demostrar que no pueden existir fórmulas de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$, con nodos distintos sobre $\mathbb{T}$ que sean exactas en $\mathcal{R}_{n,n-1}$ ó en $\mathcal{R}_{n-1,n}$. (Sugerencia: Considérese la base $\{U_k\}_{k=0}^n$ definida en el ejercicio anterior).

Bibliografía

[1] **N. I. Akhiezer**. *The classical moment problem.* Oliver and Boyd, (1965).

[2] **N. I. Akhiezer**. *The classical moment problem and some related questions in Analysis.* Hafner, New York, (1965).

[3] **N. I. Akhiezer**. *Theory of Approximation.* Dover, New York, (1992).

[4] **A. Bultheel**. *Algorithms to compute the reflection coefficients of digital filters.* Numerical Methods of Approximation Theory, Vol. 7, L. Collatz, G. Meinardus and H. Werner eds., (Birkhåuser, Basel, 1984), pp. 33-50.

[5] **A. Bultheel, L. Daruis, P. González- Vera**. *A connection between quadrature formulas on the unit circle and the interval [-1,1].* J. Comp. Appl. Math., 132, (2001), pp. 1-14.

[6] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad**. *On the convergence of multipoint Padé-type approximants and quadrature fromulas associated with the unit circle..* Number Algorithms, 13, (1996), pp. 321-344.

[7] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, and O. Njåstad** . *Orthognal rational functions* . Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, Cambridge University Press, (1999).

[8] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad**. *Orthogonal rational functions and interpolatory product rules on the*

unit circle. **II** *Quadrature and convergence.* Analysis, 18, (1998), pp. 185-200.

[9] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad**. *Quadrature formulas on the unit circle based on rational functions.* Proceedings of the Fifth International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, 1992), J. Comp. Appl. Math., 50, (1994), no. 1-3, pp. 159-170.

[10] **J.B. Conway**. *Functions of One Complex Variable.* Springer-Verlag New York, (1978).

[11] **L. Daruis, O. Nj aastad, W. Van Assche**. *Para-orthgonal polynomials in frequency analysis.* Rocky Mountain Journal of Mathematics. Vol. 33, n. 2, (2003), 629-645.

[12] **L. Daruis, O. Nj aastad, W. Van Assche**. *Szegő quadrature and frequency analysis.* Electronic Transactions on Numerical Analysis. Vol. 19, (2005), 48-57.

[13] **P.J. Davis**. *Interpolation and Approximation* . Dover Publications, INC. New York, (1975).

[14] **P. J. Davis and P. Rabinowitz**. *Methods of Numerical Integration.* Academic Press, New York, (1984).

[15] **C. Glader**. *A Two Parameter Family of Orthogonal Polynomials with Respect to a Jacobi-Type Weight function on the Unit Circle.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 240, (1999), pp. 583-599.

[16] **E. Godoy, F. Marcellán**. *An Analog of the Christoffel Formula for Polynomial Modification of a Measure on the Unit Circle.* Boll. Mat. Ital., (7), 5-A, (1991), pp. 1-12.

[17] **P. González-Vera, J. C Santos-León and O. Njåstad**. *Some results about numerical quadrature on the unit circle.* Advances in Computational Mathematics, 5, (1996), pp. 297-328.

[18] **W. B. Jones, O. Njåstad, and W. J. Thron**. *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle.* Bull. London Math. Soc., 21, (1989), pp. 113-152.

[19] **W. B. Jones, O. Njåstad, and H. Waadeland**. *Asymptotics of Zeros of Orthogonal and Para-Orthogonal Szegő Polynomials in Frequency Analysis.* Continued Fractions and Orthogonal Functions, S. C. Cooper and W. J. Thron (editors), Marcel Dekker, New York, (1994), pp. 153-190.

[20] **W. B. Jones, W. J. Thron**. *Szegő polynomials applied to frequency analysis.* J. Comp. Appl. Math., 46, (1993), pp. 217-228.

[21] **V.I. Krylov**. *Approximate Calculation of Integrals* Mc Millan Co., New York, (1962).

[22] **N. Levinson**. *The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter desing and prediction* J. Math. Phys., 25, (1947), 261-278.

[23] **G. López Lagomasino, H. Pijeira Cabrera**. *Polinomios ortogonales* XIV Escuela Venezolana de Matemáticas, 2001.

[24] **A. Magnus**. *Semiclassical orthogonal polynomials on the unit circle.* MAPA 3072. Special topics in Approximation Theory. Preprint. (1999).

[25] **K. Pan, E. B. Saff**. *Asymptotics for Zeros of Szegő Polynomials Associated with Trigonometric Polynomial Signals.* Journal of Approximation Theory, Vol. 71, No. 3, (1992), pp. 239-251.

[26] **F. Peherstorfer**. *A Special Class of Polynomials Orthogonal on the Unit Circle including the Associated Polynomials.* Constr. Approx., 12, (1996), pp. 161-185.

[27] **F. Peherstorfer, R. Steinbauer**. *Characterization of general orthogonal polynomials with respect to a functional.* J. Comp. Appl. Math., 65, (1995), pp. 339-355.

[28] **T. Ransford**, “Potential Theory in the Complex Plane”, Vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[29] **H. Stahl, V. Totik**. *General Orthogonal Polynomials.* Cambridge University Press, (1992).

[30] **J. Stoer, R. Bulirsch**. *Introduction to Numerical Analysis.* Springer Verlag, New York, (1980).

[31] **G. Szegő**. *On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials.* Magyar Tud. Akad. Kutató Int. Közl 8,(1963), pp. 255-273.

[32] **G. Szegő**. *Orthogonal Polynomials* A.M.S., 4th Ed. Vol. 23, (Colloquium Publications), (1975).

[33] **J. V. Uspensky**. *On the convergence of quadrature formula related to an infinite interval* Trans. Amer. Math. Soc. 30, (1928), pp. 542-559.

[34] **N. Wiener**. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series* MIT Press, Cambridge, MA/Wiley, New York, (1949).